ACTA ARITHMETICA
XXV (1974)

Un problème binaire en théorie additive

par

JEAN-MARC DESHOUILLERS (Talence)

1. Introduction. En 1933, B. I. Segal (cf. [4] et [5]) a démontré que les suites $([n^c])_{n\in N}$, où c est un nombre *réel* fixé supérieur à 1, sont des bases de l'ensemble des entiers, c'est-à-dire qu'à tout c on peut faire correspondre un entier $m(c)$ tel que tout entier puisse s'écrire comme somme d'au plus $m(c)$ nombres de la forme $[n^c]$.

Nous conviendrons, par analogie avec le problème de Waring, de définir $g(c)$ (resp. $G(c)$) comme étant le plus entier $m(c)$ tel que tout entier (resp. tout entier assez grand) soit somme d'au plus $m(c)$ nombres de la forme $[n^c]$.

Dans l'article [4], Segal avait démontré par une méthode analytique que $G(c)$ est inférieur ou égal à 3 lorsque c est compris entre 1 et $3/2$, F. Dress et M. Polzin (cf. [2]) ont retrouvé ce résultat par une méthode élémentaire qui leur permet en outre de déterminer les valeurs de c pour lesquelles on est sûr que $g(c)$ soit supérieur ou égal à 3.

L'objet de ce travail est d'établir le résultat suivant:

THÉORÈME 1. *Lorsque c est strictement compris entre* 1 *et* $4/3$, *on a*:

$$G(c) = 2.$$

Nous indiquerons également comment notre méthode nous permet d'obtenir quelques renseignements concernant la fonction g, en particulier:

THÉORÈME 2. *Il existe un nombre c_0 supérieur à* 1, *effectivement calculable, tel que pour tout c compris entre* 1 *et* c_0, *on ait*:

$$g(c) = 2.$$

Notations: x étant un nombre réel, on notera: $[x]$ l'entier défini par $x-1 < [x] \leqslant x$, $\{x\} = x-[x]$, $e(x) = \exp(2i\pi x)$, c désigne un nombre réel compris entre 1 et $4/3$, $\gamma = 1/c$, N représente un entier naturel supérieur à 2, $X = N+\frac{1}{2}$.

2. Deux résultats classiques. Nous rappellerons ici deux résultats classiques, le premier concernant l'estimation de sommes trigonométriques, le second permettant une majoration de la discrépance d'une suite double.

PROPOSITION 1 (J. G. Van der Corput; cf. [1], p. 401). *Soient a et b deux entiers positifs ($a < b$), k un entier supérieur ou égal à 2 et f une application k-fois continûment différentiable sur $[a, b]$, on posera:*

$$r = \inf_{x\in[a,b]} |f^{(k)}(x)| \quad \text{et} \quad R = \sup_{x\in[a,b]} |f^{(k)}(x)|.$$

On a:

$$\Big|\sum_{n=a}^{b} e\big(f(n)\big)\Big| < 21(b-a)\left\{\left(\frac{r}{R^2}\right)^{-1/(\varkappa-2)} + \big(r(b-a)^k\big)^{-2/\varkappa} + \left(\frac{r(b-a)}{R}\right)^{-2/\varkappa}\right\}$$

où $\varkappa = 2^k$.

PROPOSITION 2 (J. F. Koksma; cf. [3]). *Soient a et b deux nombres entiers ($a < b$), f_1 et f_2 deux applications de $[a, b[$ dans $\mathbf{R}$, α_1, α_2, β_1 et β_2 quatre nombres réels tels que $\alpha_i < \beta_i \leqslant \alpha_i + 1$ et λ_1, λ_2 deux nombres réels supérieurs à 2.*

Définissons $p_{h_i,i}$ ($i = 1, 2$) par:

$$p_{h_i,i} = \begin{cases} \beta_i - \alpha_i + \dfrac{75}{\lambda_i} & \text{si} \quad h_i = 0, \\ \operatorname{Inf}\left\{\beta_i - \alpha_i + \dfrac{75}{\lambda_i}, 1 - \beta_i + \alpha_i + \dfrac{75}{\lambda_i}, \dfrac{30}{|h_i|}\right\} & \text{si} \quad h_i \neq 0, \end{cases}$$

et définissons T par:

$$T = \sum_{(h_1,h_2)\neq(0,0)}^{*} \Big|\sum_{n=a}^{b-1} e\big(h_1 f_1(n) + h_2 f_2(n)\big)\Big| \, p_{h_1,1} p_{h_2,2}$$

où l'astérisque signifie que la somme est étendue aux couples (h_1, h_2) tels que $|h_i| \leqslant 1.7\lambda_i$.

Le nombre N^* de solutions en n du système:

$$\alpha_i \leqslant f_i(n) < \beta_i \pmod 1, \quad i = 1, 2, \quad a \leqslant n < b,$$

vérifie la relation:

$$|N^* - (\beta_1 - \alpha_1)(\beta_2 - \alpha_2)(b-a)| \leqslant T + 75(b-a)\left\{\frac{\beta_1 - \alpha_1}{\lambda_2} + \frac{\beta_2 - \alpha_2}{\lambda_1} + \frac{75}{\lambda_1\lambda_2}\right\}.$$

3. Méthode utilisée. Enoncé du lemme fondamental. Le fondement de notre démonstration est le lemme suivant, qui sera démontré dans le quatrième paragraphe.

LEMME FONDAMENTAL. *Si X est assez grand, il existe un entier positif n inférieur à X^γ, tel que l'on ait simultanément:*

(i) $$1 - \frac{X^{\gamma-1}}{4} \leqslant \{(X - n^c)^\gamma\} < 1,$$

(ii) $$\{n^c\} < \tfrac{1}{2}.$$

De ce lemme, on déduit qu'il existe un entier positif n tel que:

$$1 - \frac{X^{\gamma-1}}{4} \leqslant \{(N + \tfrac{1}{2} - n^c)^\gamma\} < 1,$$

c'est-à-dire qu'il existe un entier m tel que:

$$(N + \tfrac{1}{2} - n^c)^\gamma < m \leqslant (N + \tfrac{1}{2} - n^c)^\gamma + \frac{X^{\gamma-1}}{4}.$$

Cette inégalité implique que pour tout réel θ compris entre 0 et 1 on a:

$$(N + \tfrac{1}{2} - n^c)^\gamma < m < (N + \tfrac{1}{2} - n^c)^\gamma + \frac{\gamma}{2}\left(N + \frac{1}{2} - n^c + \frac{\theta}{2}\right)^{\gamma-1}.$$

Par le théorème des accroissements finis, on en déduit:

$$(N + \tfrac{1}{2} - n^c)^\gamma < m < (N + 1 - n^c)^\gamma$$

c'est-à-dire

$$N + \tfrac{1}{2} < m^c + n^c < N + 1.$$

On a donc:

$$N + \tfrac{1}{2} - \{m^c\} - \{n^c\} \leqslant [m^c] + [n^c] < N + 1.$$

De la seconde condition imposée à n, on déduit que:

$$N - 1 < [m^c] + [n^c] < N + 1,$$

c'est-à-dire que $[m^c] + [n^c]$ est égal à N, et donc $G(c)$ est inférieur ou égal à 2. Puisque la suite $([n^c])_{n\in N}$ a une densité nulle, $G(c)$ doit être supérieur ou égal à 2, et le théorème 1 est démontré.

4. Démonstration du lemme fondamental

4.1. La démonstration du lemme est fondée sur les propositions 1 et 2 et se ramène à l'estimation des sommes trigonométriques du genre $\sum_a^b e\big(h_1 f_1(n) + h_2 f_2(n)\big)$. En règle générale, la dérivée seconde de $f = h_1 f_1 + h_2 f_2$ aura un comportement agréable; il n'y aura alors pas d'ennuis pour estimer $\sum e\big(f(n)\big)$; il peut cependant arriver que la dérivée seconde de f s'annule sur $[a, b]$; nous montrerons qu'alors on peut décomposer $[a, b]$ en sous-intervalles sur lesquels soit f'', soit f''' a un comportement acceptable; nous démontrerons le lemme, d'une part lorsque c est compris entre 1 et 9/7, d'autre part lorsque c est compris entre $\dfrac{9}{7}$ et $\dfrac{4\cdot 4^n + 1}{3\cdot 4^n + 1}$, et ce pour tout entier n positif.

Nous appliquerons la proposition **2** avec:

$$a:=\left[\left(\frac{X}{2}\right)^{\gamma}\right]+1,\qquad b:=\left[\left(\frac{3X}{4}\right)^{\gamma}\right]$$

(c'est-à-dire que nous limitons l'intervalle dans lequel nous cherchons n).

$$f_1(x):=(X-x^c)^{\gamma},\qquad f_2(x):=x^c,$$

$$\alpha_1:=1-\tfrac{1}{4}X^{\gamma-1},\qquad \beta_1:=1,\qquad \alpha_2:=1,\qquad \beta_2:=\tfrac{1}{2},$$

$$\lambda_1:=\tfrac{1}{2}X^{1-\gamma}\operatorname{Log}X,\qquad \lambda_2:=\tfrac{1}{2}\operatorname{Log}X.$$

Nous cherchons à montrer que N^* est positif. D'après la proposition **2**:

$$N^*=\frac{3^{\gamma}-2^{\gamma}}{8\cdot 4^{\gamma}}X^{2\gamma-1}+O(1)+o(X^{2\gamma-1})+O(T).$$

Il nous suffit donc de montrer que T est $o(X^{2\gamma-1})$.

Notons

$$S_{h_1,h_2}=\sum_{n=a}^{b-1}e\big(h_1f_1(n)+h_2f_2(n)\big)\quad\text{et}\quad R_{h_1,h_2}=|S_{h_1,h_2}|\cdot p_{h_1,1}\cdot p_{h_2,2}.$$

On a alors:

(1) $$T\ll\sum_{h_1=-X^{1-\gamma}\operatorname{Log}X}^{-1}R_{h_1,0}+\sum_{h_2=1}^{\operatorname{Log}X}R_{0,h_2}+\sum_{h_1=-X^{1-\gamma}\operatorname{Log}X}^{-1}\ \sum_{h_2=1}^{\operatorname{Log}X}R_{h_1,h_2}+\sum_{h_1=1}^{X^{1-\gamma}\operatorname{Log}X}\ \sum_{h_2=1}^{\operatorname{Log}X}R_{h_1,h_2},$$

en tenant compte du fait que $R_{-h_1,-h_2}=R_{h_1,h_2}$.

4.2. Nous allons regrouper ici quelques propriétés de la fonction $f(x)=h_1\cdot f_1(x)+h_2\cdot f_2(x)$, dont nous aurons besoin par la suite:

(2) $$f''(x)=(c-1)x^{c-2}\big(ch_2-h_1X(X-x^c)^{\gamma-2}\big),$$

(3) $$f'''(x)=(c-1)x^{c-3}\big(c(c-2)h_2+h_1X(X-x^c)\big)^{\gamma-3}\big((2-c)X-(c+1)x^c\big),$$

(3 bis) $$f'''(x)=x^{-1}\big((c-2)f''(x)-(c-1)(2c-1)h_1X(X-x^c)^{\gamma-3}x^{2c-2}\big).$$

On déduit de ces relations les propriétés suivantes:

(4) Si $h_1\cdot h_2\leqslant 0$: $|h_1|X^{-\gamma}+|h_2|X^{1-2\gamma}\ll|f''(x)|\ll|h_1|X^{-\gamma}+|h_2|X^{1-2\gamma}$.

Considérons maintenant le cas où h_1 et h_2 sont positifs.

(5) Si $h_1<\dfrac{X^{1-\gamma}}{16}$: $|h_2|X^{1-2\gamma}\ll|f''(x)|\ll|h_2|X^{1-2\gamma}$.

Dans ce cas, on a en effet $h_1X(X-x^c)^{\gamma-2}<\dfrac{4^{2-\gamma}}{16}<1<1\cdot|h_2|$.

Il nous reste à considérer le cas où $\dfrac{X^{1-\gamma}}{16}<h_1<X^{1-\gamma}\operatorname{Log}X$.

(i) f''' est toujours négatif sur l'intervalle considéré. En effet, on a:

$$(2-c)X-(c+1)x^c$$

$$\leqslant(2-c)X-(c+1)\frac{X}{2}=\frac{X}{2}(4-2c-c-1)\leqslant\frac{3X(1-c)}{2}\leqslant 0,$$

on déduit alors de (3) que f''' est négatif sur l'intervalle considéré lorsque h_1 et h_2 sont positifs.

(ii) On en déduit que pour tout couple de nombres réels positifs u et v; l'ensemble des x tels que $u<|f''(x)|<v$ est la réunion d'au plus deux intervalles.

(6) Il y a donc au plus deux intervalles sur lesquels

$$|f''(x)|\geqslant\frac{(c-1)(2c-1)}{16(c-2)}X^{1-2\gamma}.$$

(7) Si $|f''(x)|<\dfrac{(c-1)(2c-1)}{16(c-2)}X^{1-2\gamma}$, alors

$$X^{1-3\gamma}\ll|f'''(x)|\ll X^{1-3\gamma}\operatorname{Log}X.$$

En effet, considérons la formule (3 bis); on vérifie que sous nos hypothèses: $(c-1)(2c-1)h_1X(X-n^c)^{\gamma-3}x^{2c-2}$ est supérieur à

$$\frac{(c-1)(2c-1)}{8}X^{1-2\gamma}.$$

(8) Soient alors u et v deux nombres réels tels que l'on ait:

$$0<u<v<\frac{(c-1)(2c-1)}{16(c-2)}X^{1-2\gamma};$$

l'ensemble des x (compris entre $\left(\dfrac{X}{2}\right)^{\gamma}$ et $\left(\dfrac{3X}{4}\right)^{\gamma}$) tels que $u<|f''(x)|<v$ est alors la réunion d'au plus deux intervalles de longueur $O(v\cdot X^{3\gamma-1})$.

Considérons en effet un point x_0 où $f''(x_0)<v$; par la formule des accroissements finis, nous pouvons écrire:

$$v+|f''(x_0+\lambda)|\geqslant|\lambda|\cdot|f'''(x_0+\theta\lambda)|.$$

En supposant que $f''(x_0+\lambda\theta)$ est inférieur à v pour tout θ, on a:

$$|\lambda|\leqslant\frac{|f''(x_0+\lambda)|}{|f'''(x_0+\theta\lambda)|}\ll v\cdot X^{3\gamma-1},\qquad\text{d'après (7).}$$

4.3. Nous pouvons maintenant passer à la majoration des sommes S_{h_1,h_2}.

Premier cas: $-X^{1-\gamma}\operatorname{Log} X \leqslant h_1 \leqslant X^{1-\gamma}/16$, $0 \leqslant h_2 \leqslant \operatorname{Log} X$, $|h_1|+|h_2| \neq 0$.

En vertu des relations (4) et (5), on a, avec les notations de la proposition 1:

$$1 \ll \frac{R}{r} \ll 1;$$

$$R \ll X^{1-2\gamma}\operatorname{Log} X;$$

$$r \gg \inf(X^{-\gamma}, X^{1-2\gamma}) \gg X^{-\gamma}.$$

On obtient donc:

$$|S_{h_1,h_2}| \ll X^{1/2}(\operatorname{Log} X)^{1/2}.$$

On en déduit:

$$\sum_{h_1=-X^{1-\gamma}\operatorname{Log} X}^{X^{1-\gamma}/16}\ \sum_{h_2=0}^{\operatorname{Log} X}{}^{*} |R_{h_1,h_2}| \ll X^{1/2}(\operatorname{Log} X)^{1/2} \sum_{h_1=-X^{1-\gamma}\operatorname{Log} X}^{X^{1-\gamma}/16}\ \sum_{h_2=0}^{\operatorname{Log} X}{}^{*} p_{h_1,1}\cdot p_{h_2,2}.$$

L'astérisque signifiant que l'on omet le terme $R_{0,0}$ (resp. $p_{0,1}\cdot p_{0,2}$) dans la sommation.

De la définition des $p_{h_i,i}$, on voit que:

$$p_{h_1,1} \ll X^{\gamma-1}, \qquad p_{h_2,2} \ll 1.$$

On a donc:

$$\sum_{h_1=-X^{1-\gamma}\operatorname{Log} X}^{X^{1-\gamma}/16}\ \sum_{h_2=0}^{\operatorname{Log} X}{}^{*} p_{h_1,1}\cdot p_{h_2,2} \ll (\operatorname{Log} X)^2,$$

et la contribution T_1, des termes indexés par les h_i que nous considérons, à T est $O\big(X^{1/2}(\operatorname{Log} X)^{5/2}\big)$. On vérifie que lorsque c est inférieur à $4/3$ ($\gamma > 3/4$), on a: $2\gamma-1 > 1/2$, c'est-à-dire: $T_1 = o(X^{1-2\gamma})$.

Il nous reste à considérer le:

Deuxième cas: $X^{1-\gamma}/16 \leqslant h_1 \leqslant X^{1-\gamma}\operatorname{Log} X$, $0 \leqslant h_2 \leqslant \operatorname{Log} X$.

Lemme A. *Soient μ et ν deux nombres réels compris entre* 0 *et γ. Si $X^{1-2\gamma-\mu} \ll |f''(x)| \ll X^{1-2\gamma-\nu}$ (resp. $X^{1-3\gamma} \ll |f'''(x)| \ll X^{1-3\gamma}\operatorname{Log} X$) sur un intervalle I de longueur au plus $X^{\gamma-\nu}$, on a:*

$$\Big|\sum_{n\in I} e\big(f(n)\big)\Big| \ll X^{\frac12+\frac{\mu}{2}-2\nu} + X^{\gamma+\frac{\mu}{2}-\frac12} + X^{\frac{\mu}{2}-\nu+\frac{\gamma}{2}}$$

(resp.

$$\Big|\sum_{n\in I} e\big(f(n)\big)\Big| \ll \big(X^{\frac16+\frac{\gamma}{2}-\nu} + X^{\gamma-\frac14-\frac{\nu}{4}} + X^{\frac34\gamma-\frac34\nu}\big)X^{\varepsilon}$$

pour tout ε).

Ce lemme est une conséquence triviale de la proposition 1; nous l'avons formulé ici pour la clarté de l'exposition.

Soit n un entier positif; définissons les nombres a_k par la relation:

$$a_k = \frac{4^k-1}{3(4^{n+1}+1)}(3\gamma-2) \qquad \text{pour} \qquad k = 1, 2, \ldots, n+1.$$

(On vérifie que $0 < a_k < \gamma$.)

D'après les relations (7) et (8), on peut décomposer l'intervalle $(X/2)^{\gamma}$, $(3X/4)^{\gamma}$ en $n+2$ groupes d'au plus 2 intervalles $I_k^{(m)}$ ($m = 1, 2$) tels que l'on ait le système de relations suivant:

$$X^{1-2\gamma-a_1} \ll |f''(x)| \ll X^{1-2\gamma}\operatorname{Log} X \quad \text{sur} \quad I_1^{(m)},$$

$$X^{1-2\gamma-a_{k+1}} \ll |f''(x)| \ll X^{1-2\gamma-a_k} \quad \text{sur} \quad I_{k+1}^{(m)},\ k = 1, \ldots, n,$$

$$X^{1-3\gamma} \ll |f'''(x)| \ll X^{1-3\gamma}\operatorname{Log} X \quad \text{sur} \quad I_{n+2}^{(m)},$$

$$I_i^{(m)} \text{ contient au plus } O(X^{\gamma-a_{i-1}}) \text{ entiers } (a_0 = 0).$$

Soit S_i la contribution des intervalles $I_i^{(m)}$ à la somme S_{h_1,h_2}; d'après le lemme A, on a:

$$|S_1| \ll X^{\frac12+\frac{a_1}{2}+\varepsilon} \qquad (\text{pour tout } \varepsilon > 0),$$

$$|S_{k+1}| \ll X^{\frac12+\frac{a_{k+1}}{2}-2a_k} + X^{\gamma+\frac{a_{k+1}}{2}-\frac12} + X^{\frac{a_{k+1}}{2}-a_k+\frac{\gamma}{2}}, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

$$|S_{n+2}| \ll X^{\varepsilon}\big(X^{\frac16+\frac{\gamma}{2}-a_{n+1}} + X^{\gamma-\frac14-\frac{a_{n+1}}{4}} + X^{\frac34(\gamma-a_{k+1})}\big) \qquad (\text{pour tout } \varepsilon > 0).$$

Nous allons montrer que lorsque c est compris entre $\dfrac{9}{7}$ et $\dfrac{3\cdot 4^{n+1}+1}{4\cdot 4^{n+1}+1}$, toutes ces quantités sont inférieures à $X^{u_n+\varepsilon}$, où $u_n = \dfrac{4^{n+1}-1+3\gamma}{2(4^{n+1}+1)}$

$$\frac12 + \frac{a_{k+1}}{2} - 2a_k = \frac{4^{n+1}-1+3\gamma}{2(4^{n+1}+1)}$$

également vrai avec $a_0 = 0$

$$\gamma + \frac{a_{k+1}}{2} - \frac12 = \frac{3\gamma(2\cdot 4^{n+1}+2\cdot 4^{k+1}-1) - 3\cdot 4^{n+1}+2\cdot 4^{k+1}-1}{6(4^{n+1}+1)}.$$

Cette quantité est inférieure à u_n si $c > 1 + \dfrac{4^{k+1}-4}{6\cdot 4^{n+1}+2(4^{k+1}-1)}$. La fonction $g(x) = \dfrac{x-4}{6\cdot 4^{n+1}+2(x-1)}$ étant croissante pour $x > 0$, on a:

$$\frac{4^{k+1}-4}{6\cdot 4^{n+1}+2(4^{k+1}-1)} < \frac{4^{n+1}-4}{8\cdot 4^{n+1}-2} < \frac{4^{n+1}-4}{8\cdot 4^{n+1}-32} = \frac18 < \frac27,$$

$$\frac{a_{k+1}}{2} - a_k + \frac{\gamma}{2} = \frac{3\gamma(2\cdot 4^k+4^{n+1}+2) - 4^{k+1}-2}{6(4^{n+1}+1)}.$$

Cette quantité est inférieure à u_n si $c > 1+\dfrac{2\cdot 4^k-1}{3\cdot 4^{n+1}+4\cdot 4^k-1}$. Mais

$$\frac{2\cdot 4^k-1}{3\cdot 4^{n+1}+4\cdot 4^k-1} < \frac{2\cdot 4^k-1}{12\cdot 4^k+4\cdot 4^k-8} = \frac{2\cdot 4^k-1}{8(2\cdot 4^k-1)} = \frac{1}{8} < \frac{2}{7},$$

$$\frac{1}{6}+\frac{\gamma}{2}-a_{n+1} = \frac{5\cdot 4^{n+1}-3-3\gamma(4^{n+1}+3)}{6(4^{n+1}+1)},$$

quantité inférieure à u_n si $c < \dfrac{3\cdot 4^{n+1}+18}{2\cdot 4^{n+1}}$, donc si $c < \dfrac{3}{2}$.

$$\gamma-\frac{1}{4}-\frac{a_{n+1}}{4} = \frac{3\gamma(3\cdot 4^{n+1}+5)-(4^{n+1}+5)}{12(4^{n+1}+1)},$$

quantité inférieure à u_n si $\gamma < \dfrac{7\cdot 4^{n+1}-1}{9\cdot 4^{n+1}-3}$.

Mais $$\frac{9\cdot 4^{n+1}-3}{7\cdot 4^{n+1}-1} < \frac{9\cdot 4^{n+1}-\frac{9}{7}}{7\cdot 4^{n+1}-1} = \frac{9}{7}$$

$$\frac{3}{4}(\gamma-a_{n+1}) = \frac{3\gamma(2-4^{n+1})+3\cdot 4^{n+1}-3}{3(4^{n+1}+1)}.$$

Si $c < 3/2$, cette quantité est inférieure à u_n.

En conclusion, si c est compris entre $9/7$ et $3/2$: $|S_{h_1,h_2}| \ll X^{u_n+\varepsilon}$, et cela pour tout entier n. En prenant n suffisamment grand, on voit que

(9) $$|S_{h_1,h_2}| \ll X^{\frac{1}{2}+\varepsilon'}, \quad \text{car} \quad \lim_{n\to\infty} u_n = \tfrac{1}{2}.$$

Il nous reste à combler l'intervalle $[1, 9/7]$.

Par les formules (6) et (7), on voit que l'on peut décomposer $[a, b]$ en au plus 4 intervalles sur lesquels, soit:

$$X^{1-2\gamma} \ll |f''(x)| \ll X^{1-2\gamma}\operatorname{Log} X,$$

soit:

$$X^{1-3\gamma} \ll |f'''(x)| \ll X^{1-3\gamma}\operatorname{Log} X.$$

Cela conduit, par le lemme A, à l'estimation:

(10) $$|S_{h_1,h_2}| \ll X^{\frac{3\gamma}{4}+\varepsilon} \quad \text{si} \quad c < \frac{9}{7}.$$

Pour combler le dernier trou (autour de $9/7$), on considère $[a, b]$ comme réunion d'intervalles sur lesquels soit $|f''(x)|$ est compris entre $X^{1-2\gamma-(3\gamma-2)/10}$ et $X^{1-2\gamma}\operatorname{Log} X$, soit $|f'''(x)|$ est compris entre $X^{1-3\gamma}$ et $X^{1-3\gamma}\operatorname{Log} X$. Par le lemme A, on trouve alors que:

(11) $$|S_{h_1,h_2}| \ll X^{\frac{3\gamma+3}{10}+\varepsilon} \quad \text{lorsque } c \text{ est compris entre } 11/9 \text{ et } 3/2.$$

Les formules (9), (10) et (11) permettent de trouver (selon les valeurs de c) des majorations de $|S_{h_1,h_2}|$ (appelons les S) indépendantes de h_1 et h_2.

Soit T_2 la contribution à T des termes R_{h_1,h_2} avec $X^{1-\gamma}/16 < h_1 < X^{1-\gamma}\operatorname{Log} X$. On a:

$$T_2 = \sum_{h_1=X^{1-\gamma}/16}^{X^{1-\gamma}\operatorname{Log} X} \sum_{h_2=1}^{\operatorname{Log} X} p_{h_1,1}p_{h_2,2}|S_{h_1,h_2}| \ll X^{\varepsilon}\cdot S$$

pour tout $\varepsilon > 0$, car $p_{h_1,1} \ll X^{\gamma-1}$ et $p_{h_2,2} \ll 1$.

Lorsque c est compris entre 1 et $5/4$, on déduit de (10) que

$$T_2 = o(X^{2\gamma-1}).$$

Lorsque c est compris entre $11/9$ et $17/13$, on déduit de (11) que

$$T_2 = o(X^{2\gamma-1}).$$

Lorsque c est compris entre $9/7$ et $4/3$, on déduit de (9) que

$$T_2 = o(X^{2\gamma-1}).$$

On achève la démonstration du lemme en vérifiant que:

$$1 < \frac{11}{9} < \frac{5}{4} < \frac{9}{7} < \frac{17}{13} < \frac{4}{3}.$$

5. Quelques remarques concernant la détermination de g

5.1. Nous commencerons par donner quelques indications sur la démonstration du théorème 2.

En procédant ainsi que nous l'avons fait dans le quatrième paragraphe, à cette différence près que l'on prendra:

$$\lambda_1 = X^{1-\gamma+0.04} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = X^{0.04},$$

on montrera qu'il existe une constante K' (effectivement calculable) telle que pour tout nombre réel c compris entre 1 et 1.05 on ait:

$$\left| N^* - \frac{3^\gamma-2^\gamma}{8\cdot 4^\gamma}X^{2\gamma-1}\right| \leqslant \frac{K'}{c-1}X^{2\gamma-1-0.04}.$$

On en déduit aisément qu'il existe une constante K effective telle que N^* soit positif dès que X est supérieur à $K(c-1)^{-25}$, c'est-à-dire que tout entier supérieur à $K(c-1)^{-25}$ est somme d'au plus deux éléments de la forme $[n^c]$. Notons que nous n'avons pas calculé de valeur pour la constante K.

Soit alors x_0 un nombre réel positif (il en existe) tel que pour tout x supérieur à x_0, on ait:

$$2^x > Kx^{25}.$$

Nous allons montrer que pour tout nombre c compris entre 1 et $\inf\left(1.05, 1+\frac{1}{x_0}\right)$, on a $g(c) = 2$.

D'après ce qui précède, il suffit de montrer que tout nombre inférieur à $K(c-1)^{-25}$ est somme de deux nombres de la forme $[n^c]$.

Considérons la suite finie $\mathscr{A}$ des nombres de la forme $[n^c]$ qui sont inférieurs à $K(c-1)^{-25}$; cette suite contient 0 et 1 et a donc une densité de Šnirelman positive; calculons cette densité σ.

Le nombre d'éléments de $\mathscr{A}$ inférieurs ou égaux à x est au moins $x^{1/c}$. On a donc

$$\sigma \geqslant \left(K(c-1)^{-25}\right)^{(1/c)-1}.$$

Puisque c est inférieur à $1+1/x_0$, on a:

$$2^{c/(c-1)} > 2^{1/(c-1)} > K(c-1)^{-25}$$

d'où l'on déduit:

$$2 > \left(K(c-1)^{-25}\right)^{(c-1)/c}$$

et donc:

$$\sigma \geqslant \left(K(c-1)^{-25}\right)^{(1/c)-1} > \tfrac{1}{2}.$$

La suite $\mathscr{A}$ ayant une densité supérieure à 1/2, tout nombre inférieur à $K(c-1)^{-25}$ est somme d'au plus deux éléments de $\mathscr{A}$, ce qui achève la démonstration du théorème 2.

5.2. Pour clore, au moins du point de vue théorique l'étude de g dans l'intervalle $[1, 4/3[$, nous allons indiquer le résultat:

THÉORÈME 3. *Soit $\bar{c}$ un nombre réel inférieur à 4/3. On peut déterminer effectivement une suite finie de nombres réels $1 = c_0 < c_1 < \ldots < c_k = \bar{c}$ et une suite finie de nombres entiers $g_0, g_1, \ldots, g_{k-1}$ telles que sur chaque intervalle $[c_i, c_{i+1}]$ $(i = 0, \ldots, k-1)$, la fonction g soit constante et vale g_i.*

D'après le théorème 2, il existe un nombre réel positif ε effectivement calculable tel que $g(c)$ vale 2 sur l'intervalle $[1, 1+\varepsilon]$. Il nous suffit donc de nous occuper de l'intervalle $[1+\varepsilon, \bar{c}]$.

En suivant les constantes introduites dans les calculs du quatrième paragraphe, on se rend compte que l'on peut trouver une constante effective uniforme N_0 telle que tout nombre supérieur à N_0 est somme de deux termes de la forme $[n^c]$ et ce pour tout c compris entre $1+\varepsilon$ et $\bar{c}$.

Il nous suffit alors de remarquer que l'ensemble des suites

$$\mathscr{A}(N_0, c) = \{[n^c] \leqslant N_0,\ 1+\varepsilon \leqslant c \leqslant \bar{c}\}$$

est en fait un ensemble fini (car c'est une partie de $\mathscr{P}([1, N_0])$).

Bibliographie

[1] J. G. van der Corput, *Neue zahlentheorische Abschatzungen*, zweite Mitteilung, Math. Zeitschr. 29 (1929), p. 397–426.

[2] F. Dress et M. Polzin, *Problème de Waring à exposant réel compris entre 1 et 3/2: estimations de G et de g*, Publications Mathématiques de Bordeaux, 1972–1973, fasc. 4.

[3] J. F. Koksma, *Some theorem on Diophantine inequalities*, Math. Cent. Amsterdam, Scrip. 5 (1950) (cf. également Math. Reviews 12, 394).

[4] B. I. Segal, *A general theorem concerning some properties of an arithmetical function*, C. R. Acad. Sci. URSS 3 (1933), p. 95–98.

[5] — *Théorème de Waring pour les exposants fractionnaires et irrationnels* (en russe), Travaux de l'Institut Steklov 5 (1933), p. 73–86.

EQUIPE DE RECHERCHE ASSOCIÉE AU CNRS n° 362
U.E.R. DE MATHÉMATIQUES ET D'INFORMATIQUE
UNIVERSITÉ DE BORDEAUX I
Talence, France
CENTRE DE MATHÉMATIQUES ECOLE POLYTECHNIQUE
Paris, France

Reçu le 25. 5. 1973 (404)