Литература

[1] E. Bombieri and H. Davenport, *On the large sieve method*, Landau memorial volume, edited by P. Turán, Berlin 1968.
[2] H. Davenport, *Multiplicative Number Theory*, Chicago 1967.
[3] — and H. Halberstam, *The values of a trigonometric polynomial at well spaced points*, Mathematika 13 (1966), стр. 91–96.
[4] P. X. Gallagher, *The large sieve*, Mathematika 14 (1967), стр. 14–20.
[5] — *A large sieve density estimate near* $\sigma = 1$, Invent. Math. 11 (1970), стр. 329–339.
[6] Ю. В. Линник, *Большое решето*, ДАН СССР 30 (4) (1941), стр. 290–292.
[7] H. L. Montgomery, *A note on the large sieve*, J. London Math. Soc. 43 (1968), стр. 93–98.

Получено 8. 11. 1972 (365)

ACTA ARITHMETICA
XXV (1974)

Об одном новом следствии из гипотезы Римана

Ян Мозер (Братислава)

Пусть $\frac{1}{2}+i\gamma'$, $\frac{1}{2}+i\gamma''$ — соседние нули дзета-функции Римана. Если предположить справедливой ослабленную гипотезу Мертенса

$$\int_1^X \left\{\frac{M(t)}{t}\right\}^2 dt = O(\ln X), \tag{1}$$

(где $M(t)$ — функция Мертенса), то имеет место оценка ([1], 379):

$$\gamma''-\gamma' > \frac{A}{\gamma'}\exp\left(-A\frac{\ln\gamma'}{\ln\ln\gamma'}\right). \tag{2}$$

Напомним, что из ослабленной гипотезы Мертенса следует гипотеза Римана.

До сих пор неизвестно соотношение аналогичное (2), в случае, если предположить справедливой только гипотезу Римана.

Здесь приведем соотношение аналогичное (2), касающееся некоторой подпоследовательности соседних нулей.

Положим:

$$\chi(\tfrac{1}{2}+it) = \pi^{it}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}-i\frac{t}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}+i\frac{t}{2}\right)},$$

$$\vartheta(t) = -\tfrac{1}{2}\arg\chi(\tfrac{1}{2}+it),$$

$$Z(t) = e^{i\vartheta(t)}\zeta(\tfrac{1}{2}+it), \tag{3}$$

(см. [1], 23, 94).

Пусть $0<\gamma'<\gamma''$ — ординаты соседних нулей дзета-функции Римана, $\varrho' = \frac{1}{2}+i\gamma'$, $\varrho'' = \frac{1}{2}+i\gamma''$, и $\{t_0\}$ последовательность значении $t_0>0$, таких, что

(a) $$\gamma' < t_0 < \gamma'',$$

(б) $$Z'(t_0) = 0,$$

(b) $$t_0 \to +\infty,$$

(последнее обстоятельство имеет место даже независимо от гипотезы Римана, если вспомнить теорему Харди о бесконечности множества нулей функции $\zeta(s)$ на критической прямой).

Пусть $\{\tilde{t}_0(\alpha)\}$ подпоследовательность последовательности $\{t_0\}$, такого рода, что

$$(4)\qquad |\zeta(\tfrac{1}{2}+i\tilde{t}_0)| > \frac{1}{\tilde{t}_0^{\alpha}}, \quad 0<\alpha\leqslant 1,$$

(она бесконечная, см. Ω-теорему Литтлвуда-Титчмарша [1], 201).

Пусть $\tilde{\gamma}'$, $\tilde{\gamma}''$ ординаты таких соседних нулей функции $\zeta(s)$, что $\tilde{\gamma}'<\tilde{t}_0<\tilde{\gamma}''$. Символ $\{\tilde{\gamma}',\tilde{\gamma}''\}$ обозначает последовательность таковых соседних ординат.

Имеет место следующая

Теорема 1. *В предположении справедливости гипотезы Римана, имеет место оценка*

$$\tilde{\gamma}''-\tilde{\gamma}' > \frac{1}{\tilde{\gamma}'^{\alpha}}, \quad 0<\alpha\leqslant 1.$$

Прежде чем приступить к доказательству, приведем основное соотношение.

Положим:

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = b-\frac{1}{s-1}-\frac{d}{ds}\ln\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)+\sum_{\varrho}\left(\frac{1}{s-\varrho}+\frac{1}{\varrho}\right),$$

$$\frac{d}{ds}\ln\Gamma(s) = \ln s-\frac{1}{2s}-2\int_0^\infty \frac{u}{(u^2+s^2)(e^{2\pi u}-1)}\,du,$$

(см. [1], 41, 34).

Из последних формул, в случае справедливости гипотезы Римана, при $s_0=\frac{1}{2}+it_0$, получается

$$\frac{\zeta''(s_0)}{\zeta(s_0)} = \sum_\gamma \frac{1}{(t_0-\gamma)^2}+\left\{\frac{\zeta'(s_0)}{\zeta(s_0)}\right\}^2+\frac{1}{(s_0-1)^2}-\frac{d^2}{ds^2}\ln\Gamma\left(\frac{s_0}{2}+1\right) =$$
$$= \sum_\gamma \frac{1}{(t_0-\gamma)^2}+\left\{\frac{\zeta'(s_0)}{\zeta(s_0)}\right\}^2+O\left(\frac{1}{t_0}\right).$$

Так как, см. (3),

$$(5)\qquad \frac{\zeta'(s_0)}{\zeta(s_0)} = -\vartheta'(t_0),$$

(конечно, $\vartheta'(t_0)=\dfrac{d\vartheta(t_0)}{dt}$, $\zeta'(s_0)=\dfrac{d\zeta(s_0)}{ds}$), то имеет место основное соотношение

$$(6)\qquad \frac{\zeta''(s_0)}{\zeta(s_0)} = \sum_\gamma \frac{1}{(t_0-\gamma)^2}+\{\vartheta'(t_0)\}^2+O\left(\frac{1}{t_0}\right),$$

где (см. [1], 260)

$$(7)\qquad \vartheta'(t_0) = \tfrac{1}{2}\ln t_0-\tfrac{1}{2}\ln 2\pi+O\left(\frac{1}{t_0}\right).$$

Теперь приведем

Доказательство теоремы 1. Предположим, что существуют: бесконечная подпоследовательность $\{\tilde{\tilde{\gamma}}',\tilde{\tilde{\gamma}}''\}$ последовательности $\{\tilde{\gamma}',\tilde{\gamma}''\}$, и число $\alpha_0\in(0,1\rangle$, такого рода, что

$$(8)\qquad \tilde{\tilde{\gamma}}''-\tilde{\tilde{\gamma}}' \leqslant \frac{1}{(\tilde{\tilde{\gamma}}')^{\alpha_0}}.$$

Напомним, что

$$(9)\qquad |\zeta(\tfrac{1}{2}+i\tilde{\tilde{t}}_0)| > \frac{1}{\tilde{\tilde{t}}_0^{\alpha_0}}.$$

Так как $\tilde{\tilde{\gamma}}'<\tilde{\tilde{t}}_0<\tilde{\tilde{\gamma}}''$ то, используя (8), получается

$$(10)\qquad \sum_\gamma \frac{1}{(\tilde{\tilde{t}}_0-\gamma)^2} > \frac{1}{(\tilde{\tilde{t}}_0-\tilde{\tilde{\gamma}}')^2} > \frac{1}{(\tilde{\tilde{\gamma}}''-\tilde{\tilde{\gamma}}')^2} \geqslant (\tilde{\tilde{\gamma}}')^{2\alpha_0} > A_1\tilde{\tilde{t}}_0^{2\alpha_0}.$$

Теперь, соотношения (6), (10), (9) дают:

$$(11)\qquad |\zeta''(\tilde{\tilde{s}}_0)| > A_2\tilde{\tilde{t}}_0^{2\alpha_0}|\zeta(\tilde{\tilde{s}}_0)| > A_2\tilde{\tilde{t}}_0^{\alpha_0}, \quad \tilde{\tilde{s}}_0=\tfrac{1}{2}+i\tilde{\tilde{t}}_0.$$

Так что

$$(12)\qquad |\zeta''(\tilde{\tilde{s}}_0)| > A_2\exp(\alpha_0\ln\tilde{\tilde{t}}_0).$$

Это означает, что неравенство

$$(13)\qquad |\zeta''(\tfrac{1}{2}+it)| > A_2\exp(\alpha_0\ln t),$$

удовлетворяется для сколь угодно больших t. Значит, мы получили следующую Ω-теорему

$$(14)\qquad \zeta''(\tfrac{1}{2}+it) = \Omega\{\exp(\alpha_0\ln t)\}.$$

Это, однако, противоречит оценке (см. [1], 379)

$$(15)\qquad \zeta''(\tfrac{1}{2}+it) = O\left\{\exp\left(A\frac{\ln t}{\ln\ln t}\right)\right\},$$

имеющей место в предположении справедливости гипотезы Римана. На этом доказательство закончено.

Формулы (5), (6), (7) наводят на мысль получит Ω-теоремы на критической прямой для функций $\zeta'(s)$, $\zeta''(s)$. А именно, имеет место следующая простая

Теорема 2. *В предположении справедливости гипотезы Римана, имеет место*

$$\zeta'(\tfrac{1}{2}+it) = \Omega\{\exp(\ln^{\beta} t)\},$$
$$\zeta''(\tfrac{1}{2}+it) = \Omega\{\exp(\ln^{\beta} t)\}, \quad \beta < \tfrac{1}{2}.$$

Доказательство. Прежде всего соотношение (6) в силу (7) дает

(16) $$|\zeta''(s_0)| > A_3 \ln^2 t_0 |\zeta(s_0)|.$$

Пусть $\{\bar{t}\}$ бесконечная последовательность значении удовлетворяющих неравенству ([1], 201)

(17) $$|\zeta(\tfrac{1}{2}+i\bar{t})| > \exp(\ln^{\beta}\bar{t}).$$

Так как $\bar{\gamma}' < \bar{t} < \bar{\gamma}''$, $\bar{\gamma}' < t_0 < \bar{\gamma}''$, и, по оценке Литтлвуда

$$\bar{\gamma}'' - \bar{\gamma}' < \frac{A_4}{\ln\ln\ln\bar{\gamma}'},$$

[1], 223, то

(18) $$\exp(\ln^{\beta}\bar{t}) > A_5 \exp(\ln^{\beta}\bar{t}_0).$$

Так как

$$|\zeta(\tfrac{1}{2}+it_0)| \geqslant |\zeta(\tfrac{1}{2}+i\bar{t})|,$$

то, в силу (18), из соотношения (16) получается

$$|\zeta''(\tfrac{1}{2}+i\bar{t}_0)| > A_6 \exp(\ln^{\beta}\bar{t}_0),$$

на чем доказательство закончено. Аналогично поступается и в первом случае, используя соотношения (5), (7).

Пусть $u = |\zeta(s)|$, $s \neq 1$ – рельефная поверхность дзета-функции Римана. Приведем одну простую теорему, касающуюся внутренней геометрии рельефной поверхности.

Сначала приведем одно вспомогательное утверждение. В силу (3), (5), (6), обозначим

(19) $$\begin{aligned} e^{i\vartheta(t_0)}\zeta(s_0) &= Z(t_0), \\ e^{i\vartheta(t_0)}\zeta'(s_0) &= -\vartheta'(t_0)Z(t_0) = -aZ(t_0), \\ e^{i\vartheta(t_0)}\zeta''(s_0) &= (b+ic)Z(t_0). \end{aligned}$$

Имеет место

Лемма. *Если* $s - s_0 = x + iy$, *то*

(20) $$|\zeta(s)| = |Z(t_0)|\{1 - ax + \tfrac{1}{2}bx^2 + \tfrac{1}{2}(a^2-b)y^2 - cxy + \ldots\}.$$

Действительно. Прежде всего

$$\zeta(s) = \zeta(s_0) + \zeta'(s_0)(s-s_0) + \frac{\zeta''(s_0)}{2!}(s-s_0)^2 + \ldots$$

Дальше, используя (19):

$$e^{i\vartheta(t_0)}\zeta(s_0) = Z(t_0)\{1 - ax + \tfrac{1}{2}b(x^2-y^2) - cxy + \ldots + \\ + i[-ay + \tfrac{1}{2}c(x^2-y^2) + bxy + \ldots]\}.$$

Теперь

$$|\zeta(s)| = |Z(t_0)|\{1 - 2ax + (a^2+b)x^2 + (a^2-b)y^2 - 2cxy + \ldots\}^{1/2}.$$

Наконец, используя формулу

$$\sqrt{1+\omega} = 1 + \frac{\omega}{2} - \frac{\omega^2}{8} + \ldots, \quad |\omega| < 1,$$

получается (20).

Покажем, что имеет место

Теорема 3. *В предположении справедливости гипотезы Римана, точки* $(s_0, |\zeta(s_0)|)$, *поверхности* $u = |\zeta(s)|$ *гиперболические (начиная с определенного* t_0).

Действительно. Положим

$$\varphi(x, y) = 1 - ax + \tfrac{1}{2}bx^2 + \tfrac{1}{2}(a^2-b)y^2 - cxy.$$

Для классификации точки поверхности, решающим является знак выражения

$$D = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\right)^2 = -b(b-a^2) - c^2.$$

Соотношения (6) и (19) дают $D < 0$.

Литература

[1] Е. К. Титчмарш, *Теория дзета-функции Римана*, Москва 1953.

Получено 8. 2. 1973 (370)