[17] J. J. Sylvester, *Sur une classe spéciale des diviseurs de la somme d'une série géométrique*, Comptes Rendus CVI (1888), pp. 446–450.

[18] — *On the divisors of the sum of a geometrical series whose first term is unity and common ratio any positive or negative integer*, Nature XXXVII (1888), pp. 417–418.

[19] B. Tuckerman, *Odd perfect numbers: a search procedure and a new lower bound of* 10^{36}, IBM Research Paper RC–1925, October 20, 1967.

[20] G. C. Webber, *Non-existence of odd perfect numbers of the form* $3^{2\beta}p^{\alpha}s_1^{2\beta_1}s_2^{2\beta_2}s_3^{2\beta_3}$, Duke Math. J. 18 (1951), pp. 741–749.

[21] K. Zsigmondy, *Zur Theorie der Potenzreste*, Monatshefte Math. Phys. 3 (1892), pp. 265–284.

UNIVERSITY OF GEORGIA
Athens, Georgia 30602

Received on 1. 8. 1972 (310)

ACTA ARITHMETICA
XXV (1974)

О „большом решете"

А. В. Соколовский (Ташкент)

Памяти моего учителя и друга профессора Барбана М. Б.

Основным неравенством „большого решета" Ю. В. Линника (см. [6]) в настоящее время называют неравенство типа:

$$\sum_{\substack{1\leqslant q\leqslant Q\\ q\in D}}\ \sum_{\substack{a=1\\ (a,q)=1}}^{q}\left|S\left(\frac{a}{q}\right)\right|^2\leqslant \Delta(Q,x)\sum_{|n|\leqslant x}|a_n|^2\ (^1), \tag{1}$$

где D — произвольное множество натуральных чисел, a_n — произвольные комплексные, n — целые числа, $S(\alpha)=\sum_{|n|\leqslant x}a_n e^{2\pi i\alpha n}$, а

$$\Delta(Q,x)\leqslant\begin{cases}2\max(2x,Q^2) & (\text{см. } [3]),\\ Q^2+2\pi x & (\text{см. } [4]),\\ (Q+\sqrt{2x})^2 & (\text{см. } [1]).\end{cases}$$

Мы не касаемся аналогичного неравенства для $S(x_r)$, где x_r — иные последовательности точек из $[0,1]$.

Легко показать, что в некоторых предельных случаях естественно наличие в правой части (1) не только $2x$ или Q^2, но и постоянной, вообще говоря, большей 1 (см. [2]).

Левую часть (1) удобнее записывать в следующей — эквивалентной (1) — форме:

$$\sum_{\substack{1\leqslant q\leqslant Q\\ q|P}}\ \sum_{\substack{a=1\\ (a,q)=1}}^{q}\left|S\left(\frac{a}{q}\right)\right|^2$$

где $P=P(Q)$ — наименьшее общее кратное чисел $\leqslant Q$ из D.

(1) Условие $q\in D$ будем в дальнейшем опускать.

Неравенство (1) можно усилить при малых Q, используя в рассуждении само же (1). А именно:

$$(2)\qquad \sum_{\substack{1\leqslant q\leqslant Q\\ q|P}}\sum_{\substack{a=1\\ (a,q)=1}}^{q}\left|S\left(\frac{a}{q}\right)\right|^2\leqslant \Delta\big(Q,\min(x,P/2)\big)\sum_{|m|\leqslant\min(x,P/2)}\Big|\sum_{\substack{|n|\leqslant x\\ n\equiv m\,(\mathrm{mod}\,P)}}a_n\Big|^2.$$

Для доказательства достаточно применить (1) к предварительно преобразованной сумме:

$$S\left(\frac{a}{q}\right)=\sum_{|n|\leqslant x}a_n e^{2\pi i\frac{a}{q}n}=\sum_{1\leqslant m\leqslant P}\Big(\sum_{\substack{|n|\leqslant x\\ n\equiv m\,(\mathrm{mod}\,P)}}a_n\Big)e^{2\pi i\frac{a}{q}m}.$$

Мы покажем, что неравенства типа (1) можно получать при огрублении правой части некоторого почти очевидного равенства, не прибегая к традиционному использованию замены суммы интегралов по окрестностям точек a/q интегралом по отрезку $[0,1]$.

Теорема 1. *При любых $Q\geqslant 1$ и $P=P(Q)$ справедливо неравенство*:

$$(3)\qquad \sum_{\substack{1\leqslant q\leqslant Q\\ q|P}}\sum_{\substack{a=1\\ (a,q)=1}}^{q}\left|S\left(\frac{a}{q}\right)\right|^2\leqslant P\sum_{m\,(\mathrm{mod}\,P)}\Big|\sum_{\substack{|n|\leqslant x\\ n\equiv m\,(\mathrm{mod}\,P)}}a_n\Big|^2.$$

Очевидно, этот результат усиливает неравенство (2) при $P<2x$. Он особенно эффективен в применении к последовательностям, для которых известны оценки типа Бруна–Титчмарша.

Доказательство. Запишем очевидное равенство:

$$(4)\qquad \sum_{\substack{1\leqslant q\leqslant Q\\ q|P}}\sum_{\substack{a=1\\ (a,q)=1}}^{q}\left|S\left(\frac{a}{q}\right)\right|^2=\sum_{\substack{P/q|P\\ P/Q\leqslant P/q\leqslant P}}\sum_{\substack{A=1\\ (A,P)=P/q}}^{P}\left|S\left(\frac{A}{P}\right)\right|^2=\sum_{\substack{A=1\\ P/Q\leqslant(A,P)\leqslant P}}^{P}\left|S\left(\frac{A}{P}\right)\right|^2.$$

Отбрасывая условие $P/Q\leqslant(A,P)\leqslant P$ мы и получаем утверждение теоремы.

При $P>2x$ это огрубление значительно, и мы будем действовать тоньше, следуя идее Галлагера (см. [5]).

Теорема 2. *При любых $Q\geqslant 1$ и $P=P(Q)$*

$$\sum_{\substack{1\leqslant q\leqslant Q\\ q|P}}\sum_{\substack{a=1\\ (a,q)=1}}^{q}\left|S\left(\frac{a}{q}\right)\right|^2=\sum_{m\,(\mathrm{mod}\,P)}\Big|\sum_{|n|\leqslant x}a_nF_{P,Q}(m-n)\Big|^2$$

где

$$F_{P,Q}(k)=\frac{1}{\sqrt{P}}\sum_{l\,(\mathrm{mod}\,P)}\hat{F}_{P,Q}(l)e^{-2\pi i\frac{l}{P}k}$$

а

$$|\hat{F}_{P,Q}(l)|=\begin{cases}1, & \text{если}\quad P/Q\leqslant(l,P)\leqslant P,\\ 0, & \text{если}\quad 1\leqslant(l,P)<P/Q.\end{cases}$$

Доказательство. Продолжая равенство (4), имеем

$$(5)\qquad \sum_{\substack{1\leqslant q\leqslant Q\\ q|P}}\sum_{\substack{a=1\\ (a,q)=1}}^{q}\left|S\left(\frac{a}{q}\right)\right|^2=\sum_{A=1}^{P}\left|S\left(\frac{A}{P}\right)\right|^2\cdot|\hat{F}_{P,Q}(A)|^2.$$

Для конечных преобразований Фурье mod P: $F_{P,Q}(k)$ и $\hat{F}_{P,Q}(l)$ равенство Парсеваля выполнено в виде:

$$(6)\qquad \sum_{A\,(\mathrm{mod}\,P)}|F_{P,Q}(A)|^2=\sum_{l\,(\mathrm{mod}\,P)}|\hat{F}_{P,Q}(l)|^2=\sum_{\substack{1\leqslant d\leqslant Q\\ d|P}}\varphi(d).$$

Кроме того

$$(7)\qquad \sum_{|n|\leqslant x}a_ne^{2\pi i\frac{A}{P}n}\hat{F}_{P,Q}(A)=\frac{1}{\sqrt{P}}\sum_{m\,(\mathrm{mod}\,P)}F_{P,Q}(m)e^{2\pi i\frac{A}{P}m}\sum_{|n|\leqslant x}a_ne^{2\pi i\frac{A}{P}n}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{P}}\sum_{k\,(\mathrm{mod}\,P)}\Big(\sum_{|n|\leqslant x}a_nF_{P,Q}(k-n)\Big)e^{2\pi i\frac{A}{P}k}=\hat{f}_{P,Q}(A)$$

где

$$\hat{f}_{P,Q}(A)=\sum_{|n|\leqslant x}a_nF_{P,Q}(A-n).$$

Продолжим равенство (5) с учетом (6) и (7)

$$=\sum_{A=1}^{P}|\hat{f}_{P,Q}(A)|^2=\sum_{A=1}^{P}|f_{P,Q}(A)|^2=\sum_{A=1}^{P}\Big|\sum_{|n|\leqslant x}a_nF_{P,Q}(A-n)\Big|^2$$

что и завершает доказательство.

Обозначим через $A(x)=\sum_{1\leqslant n\leqslant x}a_n$ и $A(x,D,l)=\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant x\\ n\equiv l\,(\mathrm{mod}\,D)}}a_n$.

Из теоремы 1 и равенства Монтгомери (см. [7]) вытекает

Следствие 1.

$$\sum_{q|P}q\sum_{l=1}^{q}\Big|\sum_{d|q}\frac{\mu(d)}{d}A\left(x,\frac{q}{d},l\right)\Big|^2=P\sum_{m=1}^{P}|A(x,P,m)|^2.$$

В качестве обычной модели (см. [1], [7]) рассмотрим оценку для числа чисел $\leqslant x$, взаимно простых с числом P. С помощью неравенства Монтгомери (см. [7]) выводим

$$\sum_{d|P}\frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)}\Big(\sum_{\substack{n\leqslant x\\ (n,P)=1}}1\Big)^2\leqslant P\sum_{m\,(\mathrm{mod}\,P)}\Big|\sum_{\substack{n\leqslant x\\ (n,P)=1\\ n\equiv m\,(\mathrm{mod}\,P)}}1\Big|^2.$$

Откуда, воспользовавшись неравенством Шварца, получаем:

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\(n,P)=1}} 1 \leqslant (x+P)\prod_{p|P}\left(1-\frac{1}{p}\right).$$

Подставляя в равенство (5) и теорему 2 любые функции $|\hat{F}_1(A)| \geqslant |\hat{F}_{P,Q}(A)|$, получаем правые части равенств (соответственно, неравенств) в том или ином виде. Так, например, полагая

$$\hat{F}(A) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad P/Q \leqslant (A,P) \leqslant P,\\ 0, & \text{если} \quad 1 \leqslant (A,P) < P/Q \end{cases}$$

получаем

$$\sum_{\substack{q\leqslant Q\\ q|P}} \sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q} \left|S\left(\frac{a}{q}\right)\right|^2 = \frac{1}{P}\sum_{m(\mathrm{mod}\,P)} \left| \sum_{\substack{1\leqslant d\leqslant Q\\ d|P}} d \sum_{\delta|d}\frac{\mu(\delta)}{\delta} \sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\equiv m\left(\mathrm{mod}\,\frac{d}{\delta}\right)}} a_n\right|^2.$$

Аналогично, имеем при

$$\hat{F}(A) = \begin{cases} \chi^*_{P/(A,P)}(A), & \text{если} \quad P/Q \leqslant (A,P) \leqslant P,\\ 0, & \text{если} \quad 1 \leqslant (A,P) < P/Q, \end{cases}$$

где $\chi^*_{P/(A,P)}(A)$ — любой первообразный характер $\mathrm{mod}\, P/(A,P)$, один и тот же для всех A с данным (A,P):

$$\sum_{\substack{1\leqslant q\leqslant Q\\ q|P}} \sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q} \left|S\left(\frac{a}{q}\right)\right|^2 = \frac{1}{P}\sum_{m(\mathrm{mod}\,P)} \left| \sum_{\substack{d|P\\ 1\leqslant d\leqslant Q}} \tau(\chi^*_d) \sum_{n\leqslant x} \chi^*_d(m-n)\, a_n\right|^2.$$

Однако, возможность реально использовать „интерференцию" a_n при оценках правых частей этих равенств кажется маловероятной.

Больший интерес представляет следующее

Следствие 2.

$$\sum_{\substack{1\leqslant q\leqslant Q\\ q|P}} q \sum_{l=1}^{q} \left|A(x,q,l) - \frac{A(x)}{q}\right|^2 \leqslant \frac{1}{P}\sum_{m(\mathrm{mod}\,P)} \left| \sum_{\substack{d|P\\ 1\leqslant d\leqslant Q}} d\left(A(x,d,m) - \frac{A(x)}{d}\right)\right|^2. \tag{8}$$

Следствие показывает, что „плохую" распределенность последовательности в прогрессиях „в среднем" не может хорошо выправить „интерференция по модулям".

Доказательство следствия 2.

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{2\leqslant q\leqslant Q\\ q|P}} q \sum_{l=1}^{q} \left|A(x,q,l) - \frac{A(x)}{q}\right|^2 &= \sum_{\substack{2\leqslant q\leqslant Q\\ q|P}} \sum_{a=1}^{q-1} \left|S\left(\frac{a}{q}\right)\right|^2 = \sum_{\substack{P/q|P\\ P/Q\leqslant P/q<P}} \sum_{\substack{A=1\\ A\equiv 0(P/q)}}^{P-1} \left|S\left(\frac{A}{P}\right)\right|^2 = \\ &= \sum_{A=1}^{P-1} \left|S\left(\frac{A}{P}\right)\right|^2 \sum_{\substack{d|(A,P)\\ P/Q\leqslant d<P}} 1 \leqslant \sum_{A=1}^{P-1} \left|S\left(\frac{A}{P}\right)\right|^2 \Big(\sum_{\substack{d|(A,P)\\ P/Q\leqslant d<P}} 1\Big)^2. \end{aligned} \tag{9}$$

Следовательно, так как

$$\hat{F}_1(A) = \begin{cases} \sum\limits_{\substack{d|(A,P)\\ P/Q\leqslant d<P}} 1, & \text{при} \quad A \neq P,\\ 0, & \text{при} \quad A = P, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F_1(k) &= \frac{1}{\sqrt{P}} \sum_{A=1}^{P} \hat{F}_1(A) e^{-2\pi i \frac{A}{P}k} = \frac{1}{\sqrt{P}} \sum_{A=1}^{P-1} \sum_{\substack{d|(A,P)\\ P/Q\leqslant d<P}} e^{-2\pi i\frac{A}{P}k} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{P}} \sum_{\substack{d|P\\ P/Q\leqslant d<P}} \sum_{\substack{A=1\\ A\equiv 0(d)}}^{P-1} e^{-2\pi i \frac{A}{P}k} = \frac{1}{\sqrt{P}} \sum_{\substack{2\leqslant q\leqslant Q\\ q|P}} \sum_{a=1}^{q-1} e^{-2\pi i\frac{a}{q}k} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{P}} \sum_{\substack{q|P,\, q|k\\ 2\leqslant q\leqslant Q}} q - \frac{1}{\sqrt{P}} \sum_{\substack{q|P\\ 2\leqslant q\leqslant Q}} 1. \end{aligned}$$

Теперь неравенство (8) вытекает из (9) так же, как теорема 2 следовала из равенства (5).

Видимо, неравенство (1), быть может даже более сильное в случае невещественных a_n, можно извлечь из теоремы 2 так же, как неравенство (3). Вполне вероятно, что для его получения на этом пути недостает лишь аналога по $\mathrm{mod}\, P$ „стаканчиков И. М. Виноградова".

Заметим в заключение, что равенство теоремы 2 можно легко проверить непосредственно, не пользуясь методом, изложенным выше:

$$\begin{aligned} \sum_{m(\mathrm{mod}\,P)} \left|\sum_{n\leqslant x} a_n F_{P,Q}(m-n)\right|^2 &= \frac{1}{P} \sum_{m(\mathrm{mod}\,P)} \left| \sum_{l(\mathrm{mod}\,P)} \hat{F}_{P,Q}(l) \sum_{n\leqslant x} a_n e^{2\pi i \frac{l}{P}(m-n)}\right|^2 = \\ &= \frac{1}{P} \sum_{m(\mathrm{mod}\,P)} \left| \sum_{\substack{l=1\\ P/Q\leqslant (l,P)\leqslant P}}^{P} \hat{F}_{P,Q}(l)\, S\left(\frac{l}{P}\right) e^{2\pi i\frac{l}{P}m}\right|^2 = \sum_{\substack{l=1\\ P/Q\leqslant(l,P)\leqslant P}}^{P} \left|S\left(\frac{l}{P}\right)\right|^2. \end{aligned}$$

Приложения теорем 1 и 2 мы надеемся привести в отдельной заметке.

Литература

[1] E. Bombieri and H. Davenport, *On the large sieve method*, Landau memorial volume, edited by P. Turán, Berlin 1968.

[2] H. Davenport, *Multiplicative Number Theory*, Chicago 1967.

[3] — and H. Halberstam, *The values of a trigonometric polynomial at well spaced points*, Mathematika 13 (1966), стр. 91–96.

[4] P. X. Gallagher, *The large sieve*, Mathematika 14 (1967), стр. 14–20.

[5] — *A large sieve density estimate near $\sigma = 1$*, Invent. Math. 11 (1970), стр. 329–339.

[6] Ю. В. Линник, *Большое решето*, ДАН СССР 30 (4) (1941), стр. 290–292.

[7] H. L. Montgomery, *A note on the large sieve*, J. London Math. Soc. 43 (1968), стр. 93–98.

Получено 8. 11. 1972 (365)

ACTA ARITHMETICA
XXV (1974)

Об одном новом следствии из гипотезы Римана

Ян Мозер (Братислава)

Пусть $\frac{1}{2}+i\gamma'$, $\frac{1}{2}+i\gamma''$ — соседние нули дзета-функции Римана. Если предположить справедливой ослабленную гипотезу Мертенса

$$\int_1^X \left\{\frac{M(t)}{t}\right\}^2 dt = O(\ln X), \tag{1}$$

(где $M(t)$ — функция Мертенса), то имеет место оценка ([1], 379):

$$\gamma''-\gamma' > \frac{A}{\gamma'}\exp\left(-A\frac{\ln\gamma'}{\ln\ln\gamma'}\right). \tag{2}$$

Напомним, что из ослабленной гипотезы Мертенса следует гипотеза Римана.

До сих пор неизвестно соотношение аналогичное (2), в случае, если предположить справедливой только гипотезу Римана.

Здесь приведем соотношение аналогичное (2), касающееся некоторой подпоследовательности соседних нулей.

Положим:

$$\chi(\tfrac{1}{2}+it) = \pi^{it}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}-i\frac{t}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}+i\frac{t}{2}\right)},$$

$$\vartheta(t) = -\tfrac{1}{2}\arg\chi(\tfrac{1}{2}+it),$$

$$Z(t) = e^{i\vartheta(t)}\zeta(\tfrac{1}{2}+it), \tag{3}$$

(см. [1], 23, 94).

Пусть $0<\gamma'<\gamma''$ — ординаты соседних нулей дзета-функции Римана, $\varrho' = \frac{1}{2}+i\gamma'$, $\varrho'' = \frac{1}{2}+i\gamma''$, и $\{t_0\}$ последовательность значении $t_0>0$, таких, что

(а) $$\gamma' < t_0 < \gamma'',$$

(б) $$Z'(t_0) = 0,$$

(в) $$t_0 \to +\infty,$$