Added in proof

[9] M. Fried and D. J. Lewis, *Solution spaces to Diophantine problems*, Bull. Amer. Math. Soc., to appear.
[10] M. Mumford, *Introduction to Algebraic Geometry*, Harvard Notes.

Received on 24. 4. 1972 (384)

ACTA ARITHMETICA
XXV (1974)

О гипотезе Л. Эйлера

В. А. Демьяненко (Свердловск)

Леонард Эйлер [2] высказал гипотезу, что для всякого натурального числа $n \geqslant 3$ уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^n = x_{n+1}^n$$

имеет решения в рациональных числах, отличных от 0, а уравнение

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_i^n = x_n^n$$

таких решений не имеет. Случай $n = 3$ был рассмотрен самим Эйлером [2]. При $n = 5$, предположение Эйлера в силу найденного Паркиным и Лэндером [3] тождества $27^5+84^5+110^5+113^5 = 144^5$, оказалось неверным. На пути же доказательства этой гипотезы в случае $n = 4$ были получены следующие результаты:

1) Уорд [6] доказал неразрешимость уравнения

$$x^4+y^4+z^4 = t^4 \tag{1}$$

в натуральных числах x, y, z, t при $t \leqslant 10^8$.

2) Норри, Лич, Розэ и Брудно [2], [6] нашли несколько рациональных решений уравнения

$$x^4+y^4+z^4+t^4 = r^4. \tag{2}$$

3) Демьяненко [1] указал рекуррентные формулы, позволяющие по одному решению уравнения (1) находить бесчисленное множество других.

Насколько нам известно, других существенных сведений, касающихся этих уравнений, не имеется.

(А. С. Шинцель любезно сообщил, что покойный Уорд занимался уравнениями (1) и (2) и получил, по всей вероятности, очень интересные результаты. Однако опубликовать эти результаты Уорд, к большому сожалению, не успел.)

Целью настоящей работы являются полное решение в рациональных числах уравнений

$$x^4+y^4\pm z^2=t^4 \tag{3}$$

и сведение гипотезы Эйлера в случае $n=4$ к вопросу представления биквадратичных форм в виде точного квадрата.

В дальнейшем задачу о решении уравнений (3) нам удобнее будет интерпретировать как задачу о нахождении точек с рациональными координатами, лежащих на поверхностях, уравнения которых есть (3).

Предварительно докажем несколько лемм.

Лемма 1. *Поверхности*

$$X:\ a(x^4-y^4)=b(z^4+t^2) \tag{4}$$

и

$$Y:\ b(p^4-q^4)=a(r^4-s^2) \tag{5}$$

бирационально изоморфны.

Доказательство. Так как

$$a\{(pr^2-qs)^4-(qr^2-ps)^4\}-b\{[r(p^2-q^2)]^4+[(p^2-q^2)(2pqr^2-s(p^2+q^2))]^2\} =$$
$$=[a(r^4-s^2)-b(p^4-q^4)][(p^2+q^2)(r^4+s^2)-4pqr^2s](p^2-q^2),$$

$$b\left\{\left[z^4+z^2t-\frac{a}{b}y(x-y)(x+y)^2\right]^4-\left[-z^4+z^2t+\frac{a}{b}x(x-y)(x+y)^2\right]^4\right\}-$$
$$-a\left\{[z((x+y)t+(x-y)z^2)]^4-\left[((x+y)t+(x-y)z^2)\left((x+y)z^2t-\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.-(x-y)z^4+\frac{a}{b}(x+y)^3(x-y)^2\right)\right]^2\right\}=$$
$$=\left[2z^2t+\frac{a}{b}(x^2-y^2)^2\right]\left[2z^4-\frac{a}{b}(x-y)(x+y)^3\right]^2[b(z^4+t^2)-a(x^4-y^4)],$$

то

$$\varphi:\ X\to Y=\{x,y,z,t\}\to\{p,q,r,s\}=$$
$$=\left\{\varrho\left[z^4+z^2t-\frac{a}{b}y(x-y)(x+y)^2\right],\right.$$
$$\varrho\left[-z^4+z^2t+\frac{a}{b}x(x-y)(x+y)^2\right],\ \varrho z[(x+y)t+(x-y)z^2],$$
$$\left.\varrho^2[(x+y)t+(x-y)z^2]\left[(x+y)z^2t-(x-y)z^4+\frac{a}{b}(x+y)^3(x-y)^2\right]\right\}$$

и

$$\psi:\ Y\to X=\{p,q,r,s\}\to\{x,y,z,t\}=$$
$$=\{\varrho'(pr^2-qs),\ \varrho'(-qr^2+ps),\ \varrho'r(p^2-q^2),\ \varrho'^2(p^2-q^2)[2pqr^2-s(p^2+q^2)]\}$$

есть рациональные отображения поверхностей X и Y друг на друга. Далее, непосредственным вычислением нетрудно установить, что $\varphi\psi=\psi\varphi=1$. Следовательно, поверхности X и Y связаны бирациональным преобразованием

$$\begin{aligned} x&=\varrho'(pr^2-qs),\\ y&=\varrho'(-qr^2+ps),\\ z&=\varrho'r(p^2-q^2),\\ t&=\varrho'^2(p^2-q^2)[2pqr^2-s(p^2+q^2)]\end{aligned} \tag{6}$$

и, наоборот,

$$\begin{aligned} p&=\varrho\left[z^4+z^2t-\frac{a}{b}y(x-y)(x+y)^2\right],\\ q&=\varrho\left[-z^4+z^2t+\frac{a}{b}x(x-y)(x+y)^2\right],\\ r&=\varrho z[(x+y)t+(x-y)z^2],\\ s&=\varrho^2[(x+y)t+(x-y)z^2]\left[(x+y)z^2t-(x-y)z^4+\frac{a}{b}(x+y)^3(x-y)^2\right].\end{aligned} \tag{7}$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Зная все рациональные точки на одной из поверхностей X, Y по формулам* (6), (7) *можно найти и все рациональные точки на другой.*

Доказательство. Пусть $P=\{x,y,z,t\}\in X$. Тогда по лемме 1 имеем

$$\psi(\varphi(P))=\{fx,fy,fz,f^2t\},$$

где

$$f=\varrho^3\varrho'\{(x+y)t+(x-y)z^2\}\left\{2z^2t+\frac{a}{b}(x^2-y^2)^2\right\}\left\{2z^4-\frac{a}{b}(x-y)(x+y)^3\right\}.$$

Следовательно, все рациональные точки X могут быть найдены по формулам (6) из рациональных точек Y, за исключением, быть может, только тех, которые расположены на кривой

$$\begin{gathered} a(x^4-y^4)=b(z^4+t^2),\\ \{(x+y)t+(x-y)z^2\}\left\{2z^2t+\frac{a}{b}(x^2-y^2)^2\right\}\left\{2z^4-\frac{a}{b}(x-y)(x+y)^3\right\}=0.\end{gathered} \tag{8}$$

Далее, нетрудно установить, что кривая (8) рациональна и может быть параметризована следующим образом:

$$R(k)=\{\pm l'(ak^4+2b),\ \pm l'(ak^4-2b),\ \pm 2l'ak^3,\ \pm 8l'^2ak^2b\}.$$

Аналогично, если $Q = \{p, q, r, s\} \in Y$, то

$$\varphi(\psi(Q)) = \{pg, qg, rg, sg^2\}$$

где

$$g = \varrho'^4\varrho(p^2-q^2)^2\{(p^2+q^2)(s+r^2)^2-2(p+q)^2r^4\}(q-p).$$

Получаемая кривая

$$b(p^4-q^4) = a(r^4-s^2),$$
$$(p^2-q^2)^2\{(p^2+q^2)(s+r^2)^2-2(p+q)^2r^4\} = 0$$

также будет рациональной и параметризация ее задается посредством функций

(9) $S(k) =$

$$\begin{cases}\{\pm l, \pm l, \pm lk, \pm l^2k^2\},\\ \{\pm l(a^2k^8+4k^4-4), \pm l(k^8-4k^4-4), \pm lk(k^8+4), \pm l^2k^2(k^8+4)(k^8-12)\}.\end{cases}$$

Таким образом, все рациональные точки на Y могут быть найдены по формулам (7) из рациональных точек x, за исключением, быть может, только тех, координаты которых суть (9). С другой стороны,

$$\varphi(R(k)) = S(k), \quad \psi(S(k)) = R(k),$$

что и доказывает лемму.

В качестве применения лемм 1 и 2 рассмотрим следующий пример: найти все рациональные точки на поверхности

$$4(x^4-y^4) = z^4+t^2. \tag{10}$$

Решая уравнение

$$2(a^2-b^2)A^2+4aAB+B^2 = A^2B^2+2(a^2+b^2)$$

относительно A и B, получим

$$A = \frac{-2aB\pm\sqrt{B^4+4(a^4-b^4)}}{2(a^2-b^2)-B^2},$$
$$B = \frac{-2aA\pm\sqrt{2(a^2-b^2)A^4+2(a^2+b^2)}}{1-A^2}. \tag{11}$$

Из (11) видно, что для нахождения всех рациональных решений уравнения $4(x^4-y^4) = z^4-t^2$ достаточно решить уравнение

$$(a^2-b^2)A^4+a^2+b^2 = 2c^2. \tag{12}$$

Очевидно,

$$\pm\varrho a = (1+A^4)u^2-4uv+2v^2, \qquad \pm\varrho b = (1+A^4)u^2-2v^2,$$
$$\pm\varrho c = (1+A^4)u^2-2(1+A^4)uv+2v^2,$$

поэтому

$$\begin{aligned}
\pm\varrho_1 x &= (A-1)(2u^2-A^4-1),\\
\pm\varrho_1 y &= (A-1)(2u^2-4u+A^4+1),\\
\pm\varrho_1 z &= 4u^2-4(A^3-A^2+A+1)u+2A^4+2,\\
\pm\varrho_1^2 t &= 16u^4-16(A^2+1)(A^2-2A+3)u^3+\\
&\quad+16(2A^5-A^4+4A^2-2A+3)u^2-\\
&\quad-8(A^2+1)(A^4+1)(A^2-2A+3)u+4(A^4+1)^2.
\end{aligned} \tag{13}$$

Полагая в (13):

$$(x, y, z, t, s, u)\to(p, q, r, s, (A-1)^2s, (A-1)u+1)$$

а затем подставляя это в (6) и делая подстановку:

$$u \to -\frac{1}{2}\,\frac{2u-(A+1)(A^2+1)}{(A-1)u+1}$$

получаем что все рациональные точки $P(x, y, z, t)$ на поверхности (10) суть

$$\begin{aligned}
\pm\varrho' x &= 4u^4-4(A+1)u^3+4(A^2+1)u^2+2(A-1)(A^2+1)u+(A^2+1)^2,\\
\pm\varrho' y &= 4u^4-4(A+1)u^3+8Au^2-2(A-1)(A^2+1)u-(A^2+1)^2,\\
\pm\varrho' z &= 2u\{2u^2-2(A^2+1)u+A^2+1\},\\
\pm\varrho'^2 t &= 2u\{8(A-1)u^6-8(A^2-2)u^5+4(A+1)(A^2-3)u^4+16Au^3+\\
&\quad+2(A-1)(A^2+1)(A^2-3)u^2+\\
&\quad+2(A^2+1)^2(A^2-2)u+(A+1)(A^2+1)^3\}.
\end{aligned}$$

Лемма 3. *Координаты всех рациональных точек, лежащих на поверхности*

$$p^4-q^4 = r^4-s^2 \tag{14}$$

даются формулами

$$p = \pm q,\ s = \pm r^2; \quad p = \pm r,\ s = \pm q^2 \tag{15}$$

и

$$\begin{aligned}
\pm\varrho p &= a[-a+b+(\alpha^2-4\alpha\beta+2\beta^2)c],\\
\pm\varrho q &= a[a+b+(\alpha^2-2\beta^2)c],\\
\pm\varrho r &= (2\beta-\alpha)a+\alpha b+(\alpha^3-2\alpha^2\beta+6\alpha\beta^2-4\beta^3)c,\\
\pm\varrho^2 s &= r^2+4[a+2(\alpha\beta-\beta^2)c][2(\alpha\beta-\beta^2)a+(\alpha^2-2\alpha\beta)b+(\alpha^2-2\alpha\beta+2\beta^2)^2c],\\
a &= (f_1f_3-f_2f_4)(u^2-1)-2(f_1f_4+f_2f_3)u,\\
b &= 2(f_1f_3-f_2f_4)u+(f_1f_4+f_2f_3)(u^2-1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c &= u^2+1,\\
\alpha &= h_1^2+h_2^2-2h_3^2-2h_4^2,\\
\beta &= 2(h_1h_4+h_2h_3),\\
f_1 &= -h_1^2+h_2^2+2h_3^2-2h_4^2,\\
f_2 &= 2(h_1h_2+2h_3h_4),\\
f_3 &= h_5^2-h_6^2+2h_7^2-2h_8^2,\\
f_4 &= 2(h_5h_6-2h_7h_8),
\end{aligned}$$

(16) $$(h_8-h_4)h_5+(h_7-h_3)h_6 = (h_1-h_5)h_4+(h_2-h_6)h_3,$$

$$2(2h_8-h_1+h_5)h_5+2(2h_7-h_2+h_6)h_6 = \\ = (h_1-h_5)^2+(h_2-h_6)^2-2h_3^2-2h_4^2-2h_7^2-2h_8^2.$$

Доказательство. Будем искать p, q, r, s, отличные от тривиальных (15). Положим

(17) $$q = p+\alpha t, \quad r = p+\beta(t+1), \quad s = r^2+t(p^2+q^2).$$

Так как p, q, r, s отличны от (15), то $\alpha\beta t(t+1) \neq 0$. Подставляя (17) в (14) и сокращая на $t(t+1)(p^2+q^2)$, получим

$$2p^2+4\beta p+2\alpha(t-1)p+2\beta^2(t+1)+\alpha^2 t(t-1) = 0$$

или

$$\{2\alpha p+2\alpha\beta+\alpha^2(t-1)\}^2+\{\alpha^2 t-2\alpha\beta+2\beta^2\}^2 = (\alpha^2+2\beta^2)(\alpha^2-4\alpha\beta+2\beta^2),$$

откуда

$$\begin{aligned}
a^2+b^2 &= (\alpha^2+2\beta^2)(\alpha^2-4\alpha\beta+2\beta^2)c^2,\\
p &= \alpha[-a+b+(\alpha^2-4\alpha\beta+2\beta^2)c],\\
q &= \alpha[a+b+(\alpha^2-2\beta^2)c],\\
r &= (2\beta-\alpha)a+\alpha b+(\alpha^3-2\alpha^2\beta+6\alpha\beta^2-4\beta^3)c,\\
s &= r^2+4[a+2(\alpha\beta-\beta^2)c]\times\\
&\quad\times[2(\alpha\beta-\beta^2)a+(\alpha^2-2\alpha\beta)b+(\alpha^2-2\alpha\beta+2\beta^2)^2c].
\end{aligned}$$

Очевидно,

$$\alpha^2+2\beta^2 = f_1^2+f_2^2, \quad \alpha^2-4\alpha\beta+2\beta^2 = f_3^2+f_4^2.$$

Подберем такие m и n, чтобы выполнялось тождество

$$a^2+b^2 = (f_1^2+f_2^2)(f_3^2+f_4^2)(m^2+n^2).$$

Для этого достаточно решить систему

$$\begin{aligned}
a &= (f_1f_3-f_2f_4)m-(f_1f_4+f_2f_3)n,\\
b &= (f_1f_4+f_2f_3)m+(f_1f_3-f_2f_4)n.
\end{aligned}$$

Так как $m^2+n^2 = c^2$, то

$$\varrho' m = u^2-1, \quad \varrho' n = 2u, \quad \varrho' c = u^2+1.$$

Из системы

$$\alpha^2+2\beta^2 = f_1^2+f_2^2, \quad \alpha^2-4\alpha\beta+2\beta^2 = f_3^2+f_4^2$$

выводим

$$\begin{aligned}
\pm\alpha &= h_1^2+h_2^2-2h_3^2-2h_4^2, & \pm\beta &= 2(h_1h_4+h_2h_3),\\
\pm f_1 &= -h_1^2+h_2^2+2h_3^2-2h_4^2, & \pm f_2 &= 2(h_1h_2+2h_3h_4),\\
\pm(\alpha-2\beta) &= h_5^2+h_6^2+2h_7^2+2h_8^2, & \pm\beta &= 2(h_5h_8+h_6h_7),\\
\pm f_3 &= h_5^2-h_6^2+2h_7^2-2h_8^2, & \pm f_4 &= 2(h_5h_6-2h_7h_8).
\end{aligned}$$

Наконец, с помощью перестановок h_i нетрудно убедиться в необходимости рассмотрения лишь одной линейной системы относительно h_5, h_6

$$h_5(h_8-h_4)+h_6(h_7-h_3) = (h_1-h_5)h_4+(h_2-h_6)h_3,$$

$$2(2h_8-h_1+h_5)h_5+2(2h_7-h_2+h_6)h_6 = \\ = (h_1-h_5)^2+(h_2-h_6)^2-2h_3^2-2h_4^2-2h_7^2-2h_8^2,$$

что в результате дает формулы (16). Лемма доказана.

Как следствие, из лемм 1–3 вытекает

Теорема. *Координаты всех рациональных точек на поверхности*

(18) $$x^4-y^4 = z^4+t^2$$

даются формулами (6) *и* (16), *причем* t *есть многочлен* 4 *степени относительно параметра* u.

В частности на (18) есть следующая точка с параметрическими координатами

$$\begin{aligned}
x &= (2a^4+8a^3+12a^2+8a+3)u^2-4a(2a^3+6a^2+5a+2)u+\\
&\quad+14a^4+16a^3+8a^2+1,\\
y &= -(2a^4+8a^3+12a^2+8a+1)u^2+4a(2a^3+6a^2+7a+2)u-\\
&\quad-6a^4-16a^3-8a^2+1,\\
z &= -2(a+1)u^2+2(2a^4+4a^3+6a^2+6a+1)u-\\
&\quad-2a(2a^3+4a^2+6a+1),\\
t &= 8(a+1)^6u^4+\\
&\quad+4(4a^8+24a^7+48a^6+20a^5-60a^4-96a^3-56a^2-10a+1)u^3+\\
&\quad+8a(-12a^7-60a^6-106a^5-66a^4+18a^3+44a^2+14a-1)u^2+\\
&\quad+4(52a^8+200a^7+256a^6+124a^5-28a^4-32a^3+2a+1)u+\\
&\quad+4a(-48a^7-104a^6-94a^5-24a^4+6a^3-2a-2).
\end{aligned}$$

Следовательно, если гипотеза Л. Эйлера верна, то однопараметрическое семейство кривых

$$\begin{aligned}\pm v^2 = 8(a+1)^6u^4 + \\ &+4(4a^8+24a^7+48a^6+20a^5-60a^4-96a^3-56a^2-10a+1)u^3+\\ &+8a(-12a^7-60a^6-106a^5-66a^4+18a^3+44a^2+14a-1)u^2+\\ &+4(52a^8+200a^7+256a^6+124a^5-28a^4-32a^3+2a+1)u+\\ &+4a(-48a^7-104a^6-94a^5-24a^4+6a^3-2a-2)\end{aligned}$$

не содержит ни одной рациональной точки.

Формулы для координат точек на поверхности (18) имеют довольно громоздкий вид, однако, с другой стороны, в отличие от выше рассмотренного примера, можно было бы показать, что их нельзя представить зависящими только от двух параметров.

В заключение приведем несколько интересных, на наш взгляд, фактов, касающихся рассматриваемых нами поверхностей.

1) Морделл [5] и Лемер [4] рассматривали уравнение $x^3+y^3+z^3=1$. Так, например, Морделл указал параметрическое решение

$$9t^4, \quad -9t^4+3t, \quad -9t^3+1$$

этого уравнения, а Лемер вывел рекуррентные соотношения

$$(x_0, y_0, z_0) = (9t^4, -9t^4+3t, -9t^3+1),$$
$$(x_1, y_1, z_1) = (9t^4, -9t^4-3t, 9t^3+1),$$
$$x_{n+1} = 2(216t^6-1)x_n - x_{n-1} - 108t^4,$$

позволяющие находить бесконечное множество таких решений. Аналогичные результаты имеют место для поверхностей

$$x^4-y^4+z^2 = 1, \tag{19}$$
$$x^4-y^4-z^2 = 1. \tag{20}$$

Так, например, для поверхности (19) справедливы рекуррентные соотношения

$$x_{k+1} = t^4x_k + (t^4-1)y_k, \qquad y_{k+1} = (t^4+1)x_k + t^4y_k,$$
$$z_{k+1} = (2t^6+t^2)x_k^2 + 4t^6x_ky_k + (2t^6-t^2)y_k^2 + 1,$$
$$x_0 = t, \quad y_0 = t, \quad z_0 = 1$$

откуда

$$x_1 = 2t^5-t, \qquad y_1 = 2t^5+t, \qquad z_1 = 8t^8+1,$$
$$x_2 = 4t^9-2t^5-t, \qquad y_2 = 4t^9+2t^5-t, \qquad z_2 = 64t^{16}-16t^8+1,$$
$$x_3 = 8t^{13}-4t^9-4t^5+t, \qquad y_3 = 8t^{13}+4t^9-4t^5-t,$$
$$z_3 = 128t^{24}-96t^{16}+16t^8+1,$$
$$x_4 = 16t^{17}-8t^{13}-12t^9+4t^5+t, \qquad y_4 = 16t^{17}+8t^{13}-12t^9-4t^5+t,$$
$$z_4 = 512t^{32}-640t^{24}+224t^{16}-16t^8+1.$$

А для поверхности (20)

$$x_{k+1} = -737x_k - 832y_k + 418, \qquad y_{k+1} = -256x_k - 289y_k + 146,$$
$$z_{k+1} = (x_{k+1}+y_{k+1})(x_{k+1}-5y_{k+1}) + 4x_{k+1} + 6y_{k+1} - 5,$$

откуда

$$x_0 = 3, \qquad y_0 = -2, \qquad z_0 = 8;$$
$$x_1 = -129, \qquad y_1 = -44, \qquad z_1 = -16528;$$
$$x_2 = 132099, \qquad y_2 = 45886, \qquad z_2 = -17322654328.$$

2) Поверхность

$$x^4 = (y+z)^4 + (y-z)^4 + t^4 \tag{21}$$

допускает расслоение на однопараметрическое семейство кривых

$$\begin{cases}(u^2+2)z^2 = -2ux^2 - 2(u^2-2)xy - (3u^2-8u+6)y^2,\\ (u^2+2)t^2 = (2-u^2)x^2 + 8uxy + 4(u^2-2)y^2.\end{cases}$$

3) Для наличия на поверхности (1) рациональной точки необходимо и достаточно существования на поверхности

$$x^4+y^4-z^4 = t^2$$

тройки рациональных точек с координатами $\{x_1, y_1, z_1, t_1\}$, $\{x_2, y_1, z_1, t_2\}$, $\{x_3, y_1, z_1, t_3\}$, удовлетворяющими условию

$$\frac{x_2^2 \pm t_2}{y_1 - z_1} = \frac{x_3^2 \pm t_3}{y_1 + z_1}.$$

Литература

[1] В. А. Демьяненко, *О гипотезе Л. Эйлера*, Изв. вузов, 70 (3) (1968), стр. 37–42.
[2] L. E. Dickson, *History of the Theory of Numbers*, vol. II, New York 1934.
[3] L. J. Lander and T. R. Parkin, *A counterexample to Euler's sum of powers conjecture*, Math. Comp. 21 (1967), стр. 101–103.
[4] D. H. Lehmer, *On the diophantine equation* $x^3+y^3+z^3=1$, J. London Math. Soc. 30 (1955), стр. 111–113.
[5] L. J. Mordell, *On an infinity of integer solutions of* $ax^3+ay^3+bz^3=bc^3$, J. London Math. Soc. 31 (1956), стр. 275–280.
[6] K. Rose and S. Brudno, *More about four biquadrates equal one biquadrate*, Math. Comp. 27 (1973), стр. 491–494.

Получено 8. 5. 1972 (228)