For $t=1$, there are $[N(1,2)+N(3,2)+N(9,2)]/2$ irreducible factors of $Q(x^{2^{135}}-x)$ of degree 18. For $t=3$, there are $N(27,2)/6$ irreducibles of degree 54. For $t=5$, there are $[N(5,2)+N(15,2)+N(45,2)]/10$ irreducibles of degree 90, and for $t=15$, there are $N(135,2)/30$ irreducibles of degree 270. Since

$$s\sum_{t|15}\sum_{\substack{v|9\\ (t,\frac{9}{v})=1}} N(vt,2) = 9\cdot 2^{135}$$

we see that all the irreducible factors are accounted for.

References

[1] L. Carlitz, Unpublished notes for a course in Arithmetic of Polynomials.

[2] R. Church, *Tables of irreducible polynomials for the first four prime moduli*, Ann. of Math. 36 (1935), pp. 198–209.

[3] L. E. Dickson, *Linear Groups with an Exposition of the Galois Field Theory*, Leipzig 1901.

[4] A. F. Long, *Classification of irreducible factorable polynomials over a finite field*, Acta Arith. 12 (1967), pp. 301–313.

[5] O. Ore, *Contributions to the theory of finite fields*, Trans. Amer. Math. Soc. 36 (1934), pp. 243–274.

UNIVERSITY OF NORTH CAROLINA
Greensboro, North Carolina

Received on 24. 8. 1972 (318)

ACTA ARITHMETICA
XXV (1973)

Über die arithmetische Natur der Werte der Lösungen einer Funktionalgleichung von H. Poincaré

von

R. Wallisser (Freiburg i. Br.)

1. Einleitung. In seiner Arbeit *Sur une classe nouvelle de transcendants uniformes* betrachtet Poincaré [6] Funktionen $f_1, \ldots, f_n$, die einem Multiplikationstheorem genügen: Es gibt eine komplexe Zahl m mit $|m|>1$ und rationale Funktionen $R_i(x_1, \ldots, x_{n+1})$, $1\leqslant i\leqslant n$, so daß

$$f_i(mz) = R_i\big(z, f_1(z), \ldots, f_n(z)\big) \tag{1}$$

gilt. Sind die Funktionen R_i Polynome, so sind die Lösungen eines solchen Systems ganze Funktionen und im allgemeinen ganz transzendent. Spezialfälle solcher Systeme sind Gleichungen der Form

$$f(m^p z) = R\big(z, f(z), f(mz), \ldots, f(m^{p-1}z)\big). \tag{2}$$

Insbesondere gehören die Lösungen der linearen Funktionalgleichung

$$f(m^p z) = P_0(z)f(m^{p-1}z)+ \ldots +P_{p-1}(z)f(z)+P_p(z) \tag{3}$$

zu den Funktionen dieser Art. Dabei sind $P_0, \ldots, P_p$ Polynome.

Es fehlt nicht an Untersuchungen arithmetischer Eigenschaften von Funktionen, die einer linearen homogenen Gleichung der Form (3) genügen. Am umfassendsten dürfte die Arbeit von Osgood [4] sein, der im Falle von Polynomen aus dem Gaußschen Zahlkörper die simultane diophantische Approximation gewisser Funktionswerte von Lösungen einer Gleichung (3) untersucht. Hier soleen mit derselben Methode, mit der Gelfond [3] die Transzendenz von e^π bewies, die Werte gewisser Lösungen der Funktionalgleichung

$$f(mz) = P(z)f(z)+Q(z) \tag{4}$$

untersucht werden. Dabei seien P und Q Polynome mit Koeffizienten aus einem imaginär quadratischen Zahlkörper K. Die Methode besteht darin, f in eine geeignete Interpolationsreihe zu entwickeln und die Interpolationskoeffizienten zu analysieren. Es wird sich zeigen, daß man bei linearem P Irrationalitätsaussagen für die Werte der Lösungen solcher Gleichungen machen kann. Bei nichtlinearem P lassen sich jedoch nur

Aussagen der Form „unter einer gewissen Anzahl von Werten der Lösungen ist mindestens eine irrational" gewinnen. Die Aussagen dieser Art könnte man erweitern zu „unter einer gewissen Anzahl von Werten der Lösungen ist mindestens eine vom t-ten Grad irrational". Jedoch läßt sich so kein Transzendenzresultat ableiten, da nach Wittich [8] eine Lösung von (4) keiner algebraischen Differentialgleichung genügt, und man deshalb aus der Annahme, a und $f(a)$ seien algebraisch, zu wenig Information über die arithmetische Natur der Werte der Funktion und ihrer Ableitungen an weiteren Stellen erhält.

Ähnliche Untersuchungen haben zuvor Lototsky [5] und Bundschuh ([1], [2]) durchgeführt. Lototsky betrachtet die Lösung

$$f(z) = \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{m^{\nu}}\right)$$

der Funktionalgleichung $f(mz) = (1+z)f(z)$ und zeigt, $f(z)$ ist keine Gaußsche Zahl (von der Form $a+bi$, a, b rational, $i=\sqrt{-1}$), falls m eine ganze Gaußsche Zahl mit $|m|>1$ ist und z eine rationale Gaußsche Zahl mit $z\neq 0$, $-m^{\nu}$, $\nu=1,2,\ldots$, darstellt. Bundschuh findet in [1] dieses Ergebnis wieder und gibt darüber hinaus Irrationalitätsmaße an. Schließlich beweist er in [2] einen allgemeinen Satz über ganze transzendente Funktionen, die arithmetischen Bedingungen genügen, der es erlaubt, im Falle von linearem P Irrationalitätsaussagen für Lösungen von (4) zu machen.

2. Ergebnisse.

SATZ 1. *Die Koeffizienten der Polynome P und Q und der Multiplikator m der Funktionalgleichung* (4) *seien ganz in* K(¹), $|m|>1$, *P habe den* Grad *g. f sei eine ganze transzendente Lösung von* (4), *deren Taylorentwicklung um Null Koeffizienten in* K *besitze. Sind $a_1,\ldots,a_g$ die Nullstellen von P und ist $a\neq 0$, $a\neq a_i m^n$, $1\leq i\leq g$, $n=1,2,\ldots$, so sind nicht alle der Zahlen $a, f(a), f'(a),\ldots,f^{(t)}(a)$, $t=\max\left(0, g^2+2g-2-\left[\frac{3}{g}\right]\right)$ aus* K.

Für $g=1$ gibt der Satz einen Irrationalitätsbeweis für $f(a)$ bei rationalem a. Es sei daher gestattet, den Satz für diesen Fall noch einmal zu formulieren.

SATZ 2. *Die ganze transzendente Funktion $f(z)=\sum_{\mu=0}^{\infty}c_{\mu}z^{\mu}$ sei Lösung der Funktionalgleichung $f(mz)=(az+b)f(z)+Q(z)$*(²). *m, a, b und die Koeffizienten des Polynoms Q seien ganz in* K, $|m|>1$. *Ist dann $a\neq 0$, $a\neq -\frac{b}{a}m^n$, $n=1,2,\ldots$, so ist mindestens eine der Zahlen a und $f(a)$ nicht in* K.

KOROLLAR 1 (Lototsky [5]). *Es sei m ganz in* K, $|m|>1$. *Für die ganze transzendente Funktion*

$$\varphi(z) = \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{m^{\nu}}\right)$$

gilt: Ist $a\neq 0$, $a\neq -m^n$, $n=1,2,\ldots$, so können die Zahlen a und $\varphi(a)$ nicht zugleich in K *liegen. Insbesondere sind die Zahlen $\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1\pm\frac{1}{2^{\nu}}\right)$ irrational.*

KOROLLAR 2 (Tschakaloff [7]). *Die ganze transzendente Funktion*

$$f(z) = \sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{z^{\mu}}{2^{\mu(\mu+1)/2}}$$

nimmt für jede von Null verschiedene rationale Zahl einen irrationalen Wert an.

KOROLLAR 3. *Es seien m und r ganz in* K, $|m|>|r|\geq 1$. *Dann nimmt die Reihe*

$$\frac{z}{m-r}+\frac{z^2}{(m-r)(m^2-r)}+\frac{z^3}{(m-r)(m^2-r)(m^3-r)}+\ldots$$

für jedes z aus K *einen Wert an, der nicht zu* K *gehört.*

Schließlich soll noch erwähnt werden, daß im Falle spezieller Polynome P der Wert von t in Satz 1 verkleinert werden kann. So gilt beispielsweise der folgende.

SATZ 3. *Es seien die Voraussetzungen von Satz 1 erfüllt, jedoch habe P die Form $P(z)=a_0(z+a)^g$. Dann sind nicht alle Zahlen $a, f(a), f'(a),\ldots,f^{(t)}(a)$, $t=[\frac{5}{2}(g-1)]$, zugleich in* K.

3. Hilfsbetrachtungen.

HILFSSATZ 1. *Die ganze transzendente Funktion f sei Lösung der Funktionalgleichung* (4). *P habe den* Grad *g und die Nullstellen $a_1,\ldots,a_g$, $a\geq 2$ und $s\geq 1$ seien ganz rational. Gilt*

$$\tfrac{1}{2}(g+s)+\frac{g}{2}a^2-a(g+s+1)<0, \tag{5}$$

(¹) K sei in der ganzen Arbeit ein fest vorgegebener imaginärquadratischer Zahlkörper.

(²) Durch die Formulierung wird impliziert, daß die Funktionalgleichung eine ganze transzendente Lösung besitzt. Für $a=0$ ist dies z. B. nicht der Fall.

so läßt sich f in eine Newtonsche Interpolationsreihe entwickeln mit den Interpolationsstellen

$$z_n = \begin{cases} 0, & n \equiv 0\,(g+s+1), \\ a_i m^{l+1}, & n = l(g+s+1)+i,\ 1 \leqslant i \leqslant g, \\ am^l, & n = l(g+s+1)+j,\ g < j \leqslant g+s. \end{cases} \tag{6}$$

Beweis. Die Newtonsche Interpolationsreihe hat die Form

$$f(z) = A_0 + \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu \prod_{\varkappa=0}^{\nu-1} (z - z_\varkappa) + R_n(z).$$

Dabei gelten für die Interpolationskoeffizienten A_n und die Restglieder R_n die Darstellungen

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\prod_{\nu=0}^{n} (\xi - z_\nu)}\, d\xi \tag{7}$$

und

$$R_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \prod_{\varkappa=0}^{n} \frac{z - z_\varkappa}{\xi - z_\varkappa} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi. \tag{8}$$

Γ ist ein beliebiger Weg, der die Stellen $z, z_0, \ldots, z_n$ einschließt.

Hat n die Form $n = (s+g+1)l+r$, $1 \leqslant r \leqslant g$, so gilt

$$R_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \left(\frac{z}{\xi}\right)^{l+1} \prod_{\varkappa=0}^{l-1} \left(\left(\frac{z - am^\varkappa}{\xi - am^\varkappa}\right)^s \prod_{i=1}^{g} \frac{z - a_i m^{\varkappa+1}}{\xi - a_i m^{\varkappa+1}}\right) \times$$
$$\times \prod_{i=1}^{r} \frac{z - a_i m^{l+1}}{\xi - a_i m^{l+1}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi. \tag{9}$$

Für Γ nehmen wir nun den Kreis $|\xi| = |m|^{al}$. Wird l so groß gewählt, daß

$$|m|^{al} > \max(|a|, |a_1|, \ldots, |a_g|)\, m^{l+1} \tag{10}$$

gilt (dies ist möglich, da $a \geqslant 2$ ganz rational vorausgesetzt wurde) und daß ferner bei vorgegebenem $\delta > 0$

$$|\xi - z| > \delta \tag{11}$$

ist, so haben wir, um eine Aussage über die Konvergenz von $R_n(z)$ machen zu können, das Polynom

$$P_n(z) = z^{l+1} \prod_{\varkappa=0}^{l-1} \left((z - am^\varkappa)^s \prod_{i=1}^{g} (z - a_i m^{\varkappa+1})\right) \prod_{i=1}^{r} (z - a_i m^{l+1}) \tag{12}$$

bezüglich z nach oben und bezüglich ξ nach unten abzuschätzen. Ist $|z| \leqslant R$, so wird

$$|P_n(z)| \leqslant R^{l+1} m^{\frac{l(l+1)}{2}g + \frac{l(l-1)}{2}s + (l+1)r} \times$$
$$\times \prod_{\varkappa=0}^{l-1} \left(\left(\frac{R}{m^\varkappa} + |a|\right)^s \prod_{i=1}^{g} \left(\frac{R}{m^{\varkappa+1}} + |a_i|\right)\right) \prod_{i=1}^{r} \left(\frac{R}{m^{l+1}} + |a_i|\right).$$

Daraus erhalten wir die Abschätzung nach oben

$$|P_n(z)| \leqslant m^{\frac{l^2}{2}(g+s) + o(l^2)}. \tag{13}$$

Ersetzt man in (12) z durch ξ, so ergibt sich die folgende Abschätzung nach unten:

$$|P_n(\xi)| \geqslant m^{al(l+1) + al^2(s+g) + alr} \times$$
$$\times \prod_{\varkappa=0}^{l-1} \left(\left(1 - \frac{|a|}{m^{al-\varkappa}}\right)^s \prod_{i=1}^{g} \left(1 - \frac{|a_i|}{m^{al-\varkappa-1}}\right)\right) \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{|a_i|}{m^{al-l-1}}\right).$$

Daraus folgt

$$|P_n(\xi)| \geqslant m^{a(g+s+1)l^2 + o(l^2)}. \tag{14}$$

Durch Iteration kann man nun aus der Funktionalgleichung leicht schließen (vgl. Wittich [8], S. 92), daß für $M(R) = \max_{|z|=R} |f(z)|$

$$\log M(R) = \frac{g}{2\log|m|} \left[(\log R)^2 (1 + \varepsilon(R))\right] \tag{15}$$

mit $\lim_{R\to\infty} \varepsilon(R) = 0$ gilt.

Benutzen wir nun (11), (13), (14) und (15), so erhalten wir für das Restglied $R_n(z)$ im Falle $n = l(g+s+1)+r$, $1 \leqslant r \leqslant g$, die Abschätzung

$$|R_n(z)| \leqslant m^{l^2\left(\frac{1}{2}(g+s) + \frac{g}{2}a^2 - a(g+s+1)\right) + o(l^2)}. \tag{16}$$

Wegen der Bedingung (5) strebt daher die Folge $R_{l(g+s+1)+r}(z)$, $1 \leqslant r \leqslant g$, für $l \to \infty$ nach Null. Auf entsprechende Weise zeigt man $\lim_{l\to\infty} R_{l(g+s+1)+\delta}(z) = 0$ für $\delta = 0$ oder $r < \delta \leqslant g+s$. Damit ist Hilfssatz 1 bewiesen.

Hilfssatz 2. *Für eine Lösung der Funktionalgleichung* (4) *gilt:*

$$f(m^\nu z) = f(z) \prod_{\varkappa=0}^{\nu-1} P(m^\varkappa z) + \sum_{\varrho=0}^{\nu-1} \prod_{\alpha=\varrho+1}^{\nu-1} P(m^\alpha z)\, Q(m^\varrho z), \quad \nu = 1, 2, \ldots, \tag{17}$$

oder

$$(18)\qquad f(z)=f\left(\frac{z}{m^{\nu}}\right)\prod_{\varkappa=1}^{\nu}P(zm^{-\varkappa})+\sum_{l=1}^{\nu}Q(m^{-l}z)\prod_{\varkappa=1}^{l-1}P(m^{-\varkappa}z),\,(^3)\qquad \nu=1,2,\ldots$$

Beweis. Der Beweis wird durch vollständige Induktion geführt. Für $\nu=1$ ergibt sich $f(mz)=f(z)P(z)+Q(z)$. (17) sei richtig für ν_0. Dann gilt für $\nu=\nu_0+1$:

$$\begin{aligned} f(m^{\nu_0+1}z) &= f\big(m^{\nu_0}(mz)\big)\\ &= f(mz)\prod_{\varkappa=0}^{\nu_0-1}P(m^{\varkappa+1}z)+\sum_{\varrho=0}^{\nu_0-1}\prod_{\alpha=\varrho+1}^{\nu_0-1}P(m^{\alpha+1}z)Q(m^{\varrho+1}z)\\ &= f(z)\prod_{\varkappa=0}^{\nu_0}P(m^{\varkappa}z)+\sum_{\varrho=0}^{\nu_0}Q(m^{\varrho}z)\sum_{\alpha=\varrho+1}^{\nu_0}P(m^{\alpha}z). \end{aligned}$$

Die Beziehung (18) ist eine einfache Umformung von (17).

Hilfssatz 3. *Für die ganze transzendente Funktion*

$$f(z)=\sum_{\mu=0}^{\infty}c_\mu z^\mu$$

sollen die Voraussetzungen von Satz 1 gelten. Dann gibt es eine ganz rationale Zahl A und ein μ_0, so daß für alle $\mu\geqslant\mu_0$

$$(19)\qquad \mu!\,A\prod_{\nu=\mu_0}^{\mu}\big(m^{\nu}-P(0)\big)c_\mu$$

ganz in K *ist.*

Beweis. Aus der Funktionalgleichung (4) folgt, daß für die Ableitungen $f^{(\mu)}(0)=c_\mu\mu!$ die Beziehung

$$(20)\qquad \big(m^{\mu}-P(0)\big)f^{(\mu)}(0)=\prod_{\nu=1}^{\mu}\binom{\mu}{\nu}P^{(\nu)}(0)f^{(\mu-\nu)}(0)+Q^{(\mu)}(0)$$

gelten muß. Aufgrund der Voraussetzungen sind die Werte von P und Q mit allen Ableitungen an der Stelle Null ganz in K. Gilt also für $\mu\geqslant\mu_0$ $m^{\mu}-P(0)\neq0$ (ein solches μ_0 gibt es wegen der Voraussetzung $|m|>1$), und schreiben wir $f^{(i)}(0)$ in der Form $f^{(i)}(0)=\dfrac{A_i}{A}$, $0\leqslant i<\mu_0$, A_i ganz

---

(3) $\prod\limits_{i}^{j}:=1$ für $i>j$.

in K, A ganz rational, so folgt aus der Rekursionsformel (20) sofort die Behauptung.

Hilfssatz 4. *Es gelten die Voraussetzungen von Satz 1 bzw. Satz 3 für die ganze transzendente Funktion $f(z)=\sum\limits_{\mu=0}^{\infty}c_\mu z^\mu$. f werde nach Hilfssatz 1 in eine Newtonsche Reihe entwickelt. Gehören dann die Werte $a, f(a),\ldots,f^{(s-1)}(a)$ alle zu* K, *so gibt es in* K *ganze Zahlen $\Omega_n\neq0$ bzw. $\Omega'_n\neq0$, derart daß Ω_nA_n bzw. Ω'_nA_n ganz in* K *ist und die Ungleichungen*

$$(21)\qquad |\Omega_n|\leqslant m^{\frac{l^2}{2}(g(s+1)+4s+1)+o(l^2)}\quad\text{bzw.}\quad |\Omega'_n|\leqslant m^{\frac{l^2}{2}(2g+5s+1)+o(l^2)}$$

für $(s+g+1)l\leqslant n<(s+g+1)(l+1)$ erfüllt sind.

Beweis. Nach (7) gilt für $n=(g+s+1)l+j$, $g<j\leqslant g+s$, die Beziehung

$$(22)\qquad A_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{\xi^{l+1}\prod\limits_{\varkappa=0}^{l-1}\big((\xi-am^{\varkappa})^{s}\prod\limits_{i=1}^{g}(\xi-a_im^{\varkappa+1})\big)}\times\frac{d\xi}{\Big(\prod\limits_{i=1}^{g}(\xi-a_im^{l+1})\Big)(\xi-am^{l})^{j-g}}.$$

Aus (18) erhält man

$$f(\xi)=f\left(\frac{\xi}{m^{l+1}}\right)\prod_{\varkappa=1}^{l+1}P(\xi m^{-\varkappa})+H(z)$$

mit einem Polynom $H(z)$ höchstens vom Grad $lg+g'$, $g':=$ Grad von Q. Da das Nennerpolynom des Integranden in (22) den Grad $l(g+s+1)+j+1$ hat, läßt sich (22) für genügend großes l in folgender Form schreiben

$$(23)\qquad A_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f\left(\dfrac{\xi}{m^{l+1}}\right)\prod\limits_{\varkappa=1}^{l+1}P(\xi m^{-\varkappa})}{\xi^{l+1}\prod\limits_{\varkappa=0}^{l-1}\big((\xi-am^{\varkappa})^{s}\prod\limits_{i=1}^{g}(\xi-a_im^{\varkappa+1})\big)}\times\frac{d\xi}{\Big(\prod\limits_{i=1}^{g}(\xi-a_im^{l+1})\Big)(\xi-am^{l})^{j-g}}.$$

Mit $P(z)=a_0\prod\limits_{i=1}^{g}(z-a_i)$ wird

$$(24)\qquad P(\xi m^{-\varkappa})=a_0m^{-\varkappa g}\prod_{i=1}^{g}(\xi-a_im^{\varkappa}).$$

Setzen wir (24) in (23) ein, so ergibt sich

$$(25)\qquad a_0^{-(l+1)} m^{\frac{(l+1)(l+2)}{2}g} A_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f\left(\frac{\xi}{m^{l+1}}\right)}{\xi^{l+1}\left(\prod\limits_{\varkappa=0}^{l-1}(\xi-am^\varkappa)^s\right)(\xi-am^l)^{j-g}}\,d\xi.$$

Dieses Integral wird nun mit Hilfe des Residuensatzes ausgewertet. Zunächst gilt für das Residuum an der Stelle Null

$$(26)\qquad \operatorname*{Res}_0 = \frac{1}{l!}\sum_{\nu=0}^{l}\binom{l}{\nu}\frac{d^{l-\nu}}{d\xi^{l-\nu}}f\left(\frac{\xi}{m^{l+1}}\right)\bigg|_{\xi=0}\frac{d^\nu}{d\xi^\nu}p(\xi)\bigg|_{\xi=0}$$

mit

$$(27)\qquad p(\xi) = (\xi-am^l)^{g-j}\prod_{\varkappa=0}^{l-1}(\xi-am^\varkappa)^{-s}.$$

Aus $f(\xi) = \sum\limits_{\mu=0}^{\infty} c_\mu \xi^\mu$ gewinnt man

$$f\left(\frac{\xi}{m^{l+1}}\right) = \sum_{\mu=0}^{\infty} c_\mu m^{-(l+1)\mu}\xi^\mu,$$

also

$$(28)\qquad \frac{d^{l-\nu}}{d\xi^{l-\nu}}f\left(\frac{\xi}{m^{l+1}}\right)\bigg|_{\xi=0} = (l-\nu)!\,c_{l-\nu}m^{-(l+1)(l-\nu)}.$$

Ferner wird

$$(29)$$
$$\frac{d^\nu}{d\xi^\nu}p(\xi) = \sum_{s_0+\ldots+s_l=\nu}\frac{\nu!}{s_0!\ldots s_l!}\,\frac{(-j+g)(-j+g-1)\ldots(-j+g-(s_l-1))}{(\xi-am^l)^{j-g+s_l}}\times$$
$$\times\prod_{\varkappa=0}^{l-1}\frac{(-1)^{s_\varkappa}s(1+s)(2+s)\ldots(s_\varkappa-1+s)}{(\xi-am^\varkappa)^{s+s_\varkappa}}.$$

Aus (28) und (29) entnimmt man nun unter Verwendung von Hilfssatz 3, daß mit $a = \tau/M$, τ ganz in K, M ganz rational,

$$(30)\qquad m^{(l+1)(l-\nu)}(l-\nu)!\,A\prod_{i=\mu_0}^{l-\nu}\left(m^i-P(0)\right)\tau^{(l+1)s+\nu}\times$$
$$\times m^{\frac{l(l+1)}{2}s+l\nu}\frac{d^{l-\nu}}{d\xi^{l-\nu}}f\left(\frac{\xi}{m^{l+1}}\right)\bigg|_{\xi=0}\frac{d^\nu}{d\xi^\nu}p(\xi)\bigg|_{\xi=0}$$

eine ganze Zahl in K ist. Schließlich ergeben (26) und (30) zusammen das Ergebnis, daß

$$(31)\qquad l!\,Am^{\frac{l(l+1)}{2}(s+2)}\tau^{(l+1)(s+1)}A\prod_{i=\mu_0}^{l}\left(m^i-P(0)\right)\operatorname*{Res}_0$$

ganz in K ist.

Für das Residuum an der Stelle am^μ, $0\leqslant\mu\leqslant l$, gilt:

$$(31')\qquad \operatorname*{Res}_{am^\mu} = \frac{1}{(s-1)!}\sum_{\nu=0}^{s-1}\binom{s-1}{\nu}f^{(s-1-\nu)}(am^{\mu-l-1})\frac{d^\nu}{d\xi^\nu}\hat{p}(\xi)\bigg|_{\xi=am^\mu}.$$

Dabei ist

$$(32)\qquad \hat{p}(\xi) = \xi^{-(l+1)}\prod_{\substack{\varkappa=0\\ \varkappa\neq\mu}}^{l-1}(\xi-am^\varkappa)^{-s}(\xi-am^l)^{j-g}.$$

Nach Hilfssatz 2 gilt mit

$$H_1(z) = a_0^\nu\prod_{\varkappa=1}^{\nu}\prod_{i=1}^{g}(z-a_im^\varkappa),$$

$$(33)\qquad m^{\frac{\nu(\nu+1)}{2}g+g'}f(z) = f\left(\frac{z}{m^\nu}\right)m^{g'}H_1(z)+H_2(z),$$

wobei H_1 und H_2 Polynome mit in K ganzen Koeffizienten sind. Aus (33) leitet man ab:

$$(34)\qquad m^{\frac{\nu(\nu+1)}{2}g+g'}f^{(j)}(z) = \sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}f^{(j-i)}\left(\frac{z}{m^\nu}\right)\frac{m^{g'}}{m^{\nu(j-i)}}H_1^{(i)}(z)+H_2^{(j)}(z).$$

Gilt also $f^{(l)}(\alpha) = \tau_l/M$, τ_l ganz in K, $0\leqslant l\leqslant j$, so folgt aus (33) und (34), daß

$$(35)\qquad m^{g'}a_0M^{g\nu(j+1)+g'}\prod_{\varkappa=1}^{\nu}\prod_{i=1}^{g}(\alpha-a_im^\varkappa)^{j+1}f^{(j)}\left(\frac{\alpha}{m^\nu}\right)$$

ganz in K ist.

Ist jedoch P von der Form $P(z) = a_0(z+a)^g$, so wird

$$H_1(z) = a_0^\nu\prod_{\varkappa=1}^{\nu}(z+am^\varkappa)^g.$$

Dann folgt aus (33) und (34), daß

$$(35')\qquad m^{g'}a_0^\nu M^{(g+j)\nu+g'}\prod_{\varkappa=1}^{\nu}(\alpha+am^\varkappa)^{g+j}f^{(j)}\left(\frac{\alpha}{m^\nu}\right)$$

ganz in K ist.

Für die Ableitungen von $\hat{p}(\xi)$ ergibt sich:

$$\frac{d^\nu}{d\xi^\nu}\hat{p}(\xi) = \sum_{s_0+\ldots+s_l=\nu} \frac{(-1)^\nu \nu!}{s_0!\ldots s_l!}\,\frac{(l+1)(l+2)\ldots(l+s_0)}{\xi^{l+1+s_0}} \times \tag{36}$$

$$\times\Bigg(\prod_{\substack{\varkappa=0\\ \varkappa\neq\mu}}^{l-1} \frac{s(s+1)\ldots(s+s_\varkappa-1)}{(\xi-am^\varkappa)^{s+s_\varkappa}}\Bigg)\frac{(g-j)\ldots(g-j+s_l-1)}{(\xi-am^l)^{j-g+s_l}}.$$

Aus (31′), (35) bzw. (35′) und (36) folgt das wichtige Resultat

$$(s-1)!\,a_0^l M^{lsg+\sigma'} \prod_{\varkappa=1}^{l-1}\prod_{i=1}^{g}(a-a_i m^\varkappa)^s \tau^{2(l+1)s} \prod_{\substack{\varkappa=0\\ \varkappa\neq\mu}}^{l}(m^\mu-m^\varkappa)^{2s-1} m^{\mu(l+s)} \operatorname*{Res}_{am^\mu} \tag{37}$$

bzw.

$$(s-1)!\,a_0^l M^{l(g+s)+\sigma'} \prod_{\varkappa=1}^{l-1}(a+am^\varkappa)^{g+s} \tau^{2(l+1)s} \prod_{\substack{\varkappa=0\\ \varkappa\neq\mu}}^{l}(m^\mu-m^\varkappa)^{2s-1} m^{\mu(l+s)} \operatorname*{Res}_{am^\mu} \tag{37′}$$

ist eine ganze Zahl in K.

Nun gilt

$$\prod_{\substack{\varkappa=0\\ \varkappa\neq\mu}}^{l}(m^\mu-m^\varkappa) = m^{\frac{(\mu-1)\mu}{2}+(l-\mu)\mu}\prod_{k=1}^{\mu}(m^k-1)\prod_{k=1}^{l-\mu}(1-m^k). \tag{38}$$

Man überlegt sich leicht, daß (38) in

$$m^{\frac{(l-1)l}{2}}\prod_{\varkappa=1}^{l}(m^\varkappa-1) \tag{39}$$

als Faktor enthalten ist. Ersetzt man daher in (37) bzw. (37′) $\prod\limits_{\substack{\varkappa=0\\ \varkappa\neq\mu}}^{l}(m^\mu-m^\varkappa)$ durch (39) und $m^{\mu(l+s)}$ durch $m^{l(l+s)}$, so wird (37) bzw. (37′) unabhängig von μ. Die Überprüfung des Beweises zeigt, daß man denselben Faktor auch bei $\mu = l$ verwenden kann. So finden wir mit Hilfe von (25), (31) und (37) bzw. (37′), daß für $n = (g+s+1)l+j$, $g < j \leqslant g+s$, die in K ganze Zahl

$$\Omega_n = m^{\frac{(l+1)(l+2)}{2}g}\, l!\,A\prod_{i=\mu_0}^{l}\big(m^i-P(0)\big)a_0^l M^{lsg+\sigma'}m^{g'}\times \tag{40}$$

$$\times\,\tau^{2(l+1)s}\prod_{\varkappa=1}^{l-1}\prod_{i=1}^{g}(a-a_i m^\varkappa)^s\, m^{\frac{(l-1)l}{2}(2s-1)}\prod_{\varkappa=1}^{l}(m^\varkappa-1)^{2s-1}\cdot m^{l(l+s)}$$

bzw. Ω_n' genommen werden kann. Ω_n' entspricht bezüglich der Abhängigkeit von m der Formel (40), wobei $\prod\limits_{\varkappa=1}^{l-1}\prod\limits_{i=1}^{g}(a-a_i m^\varkappa)^s$ durch $\prod\limits_{\varkappa=1}^{l}(a+am^\varkappa)^{g+s}$

zu ersetzen ist. Wegen $a \neq a_i m^n$ bzw. $a \neq -am^n$, $n = 1, 2, \ldots$, ist Ω_n bzw. Ω_n' von Null verschieden und genügt der Abschätzung

$$|\Omega_n| \leqslant m^{\frac{l^2}{2}(g(s+1)+4s+1)+o(l^2)} \tag{41}$$

bzw.

$$|\Omega_n'| \leqslant m^{\frac{l^2}{2}(2g+5s+1)+o(l^2)}. \tag{41′}$$

Analoge Überlegungen für $n = (g+s+1)l+\delta$, $\delta = 0$ oder $1 \leqslant \delta \leqslant g$, beweisen den Hilfssatz.

Hilfssatz 5. *Genügt die ganze transzendente Funktion f der Funktionalgleichung* (4) *und entwickelt man sie nach Hilfssatz* 1 *in eine Newtonsche Interpolationsreihe, so gelten für die Interpolationskoeffizienten A_n die Abschätzungen*

$$|A_{(s+g+1)n+r}| \leqslant m^{\frac{l^2}{2}a^2g-al^2(g+s+1)+o(l^2)}. \tag{42}$$

Beweis. Der Beweis ergibt sich sofort aus der Formel (22) unter Verwendung von (15) und der Abschätzung (14).

4. Beweise für die Sätze und Korollare.

Beweis von Satz 1. Kombinieren wir die Hilfssätze 4 und 5, so ergibt sich, daß die in K ganze Zahl $\Omega_n A_n$ der Abschätzung

$$|\Omega_n A_n| \leqslant m^{\frac{l^2}{2}(g(s+1)+4s+1)+\frac{l^2}{2}ga^2-al^2(g+s+1)+o(l^2)} \tag{43}$$

genügen muß. Setzt man $a = g+2$, so ist der Exponent für $s > g^2+ +2g-1-3/g$ kleiner Null. Nehmen wir also $s = \max(1, g^2+2g-1-[3/g])$, so ist für genügend großes l $|\Omega_n A_n| < 1$. Da $\Omega_n A_n$ eine ganze Zahl eines imaginär-quadratischen Zahlkörpers ist, folgt hieraus, daß von einem gewissen n ab alle Interpolationskoeffizienten verschwinden. f wäre also ein Polynom im Widerspruch zur Voraussetzung. Unsere Annahme, $a, f(a), \ldots, f^{(s-1)}(a)$ seien Werte aus K, war also falsch. Damit ist Satz 1 bewiesen.

Beweis von Satz 3. In diesem Falle erhält man aus (41′) und (42)

$$|\Omega_n' A_n| \leqslant m^{\frac{l^2}{2}(2g+5s+1)+\frac{l^2}{2}ga^2-al^2(g+s+1)+o(l^2)}.$$

Nimmt man hier $a = 3$, so wird für $s > \frac{5}{2}(g-1)$ der Exponent negativ. Wählt man also für s den Wert $s = [\frac{5}{2}(g-1)]+1$, so ergibt sich wie im Beweis von Satz 1 die Behauptung.

Beweis von Korollar 1. $\varphi(z)$ genügt der Funktionalgleichung $\varphi(mz) = (1+z)\varphi(z)$. Für die Entwicklung

$$\varphi(z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(\mu)}(0)}{\mu!} z^{\mu}$$

gilt

$$(m^{\mu}-1)\varphi^{(\mu)}(0) = \mu\varphi^{(\mu-1)}(0), \quad \mu = 1, 2, \ldots$$

Mit $\varphi(0) = 1$ folgt hieraus, daß die Entwicklungskoeffizienten aus K sind und somit die Voraussetzungen von Satz 2 erfüllt werden.

Beweis der Korollare 2 und 3. Die Beweise ergeben sich sofort aus Satz 2, falls man beachtet, daß f der Funktionalgleichung $f(2z) = zf(z)+z$ bzw. $f(mz) = (z+r)f(z)+z$ genügt.

Literaturverzeichnis

[1] P. Bundschuh, *Arithmetische Untersuchungen unendlicher Produkte*, Inventiones Math. 6 (1969), S. 275–295.

[2] — *Ein Satz über ganze Funktionen und Irrationalitätsaussagen*, Inventiones Math. 9 (1970), S. 175–184.

[3] A. O. Gelfond, *Sur les nombres transcendants*, C. R. Acad. Sci. (Paris) 189 (1929), S. 1224–1226.

[4] C. F. Osgood, *On the Diophantine Approximation of Values of Functions Satisfying Certain Linear q-Difference-Equations*, Journal of Number Theory 2 (1971), S. 159–177.

[5] A. V. Lototsky, *Sur l'irrationalité d'un produit infini*, Mat. Sbornik 12(54) (1943), S. 262–272.

[6] H. Poincaré, *Sur une classe nouvelle de transcendants uniformes*, Journal de Math. (1850).

[7] L. Tschakaloff, *Arithmetische Eigenschaften der unendlichen Reihe* $\sum_{\nu=0}^{\infty} x^{\nu} a^{-\frac{\nu(\nu+1)}{2}}$, Math. Ann. 80 (1921), S. 62–74.

[8] H. Wittich, *Bemerkungen zu einer Funktionalgleichung von H. Poincaré*, Arch. Math. 2 (1949/50), S. 90–95.

MATHEMATISCHES INSTITUT DER UNIVERSITÄT
D 78 Freiburg i. Br.

Eingegangen 8. 11. 1972 (345)

ACTA ARITHMETICA
XXV (1973)

Metric theorems on the approximation of zero by a linear combination of polynomials with integral coefficients

by

E. I. Kovalevskaja (Minsk)

1. In 1964 V. G. Sprindžuk ([8], [9], [10], [1]) proved Mahler's conjecture: let n be a fixed integer; then for almost every real t there are only finitely many polynomials $P(x) = a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$ with integral coefficients satisfying $|P(t)| < h_p^{-n-\varepsilon}$ where $\varepsilon > 0$ is any number, $h_p = \max(|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_n|)$. The proof was based on the special properties of polynomials with integral coefficients. In the present paper a generalization of this problem is considered. This is the problem of an approximation to zero by the linear combinations $\lambda_1P_1(x_1)+\ldots+\lambda_mP_m(x_m)$ where $P_1(x_1), \ldots, P_m(x_m)$ are polynomials with integral coefficients, $\lambda_1 \neq 0, \ldots, \lambda_m \neq 0$ are real numbers, i.e. $\|\lambda_1P_1(x_1)+\ldots+\lambda_mP_m(x_m)\|$ is studied where $\|x\|$ is the distance from x to the nearest integer. In the proof Sprindžuk's method introduced in [7], [13] and Vinogradov's mean value theorem are used. Four theorems are proved. Theorems 1 and 3 are concerned with polynomials $P_i(x_i)$ for which $P_i(0) = 0$. Theorems 2 and 4 are concerned with those $P_i(x_i)$ for which $P_i(0) \neq 0$.

THEOREM 1. *Let $\lambda_1 \neq 0, \ldots, \lambda_m \neq 0$ be real numbers, and let $k_1 \geq 1, \ldots, k_m \geq 1$ be integers, $K = \max(k_1, \ldots, k_m)$, $k = \min(k_1, \ldots, k_m)$. Let w_0 be the least upper bound of those $w > 0$ for which there are infinitely many m-tuples of polynomials $P_1(x_1), \ldots, P_m(x_m)$ with integral coefficients*

$$P_i(x_i) = \sum_{n=1}^{k_i} a_{in}x^n \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

which satisfy

$$(1) \qquad \|\lambda_1P_1(t_1)+\ldots+\lambda_mP_m(t_m)\| < h^{-w}, \qquad h = \max_{\substack{1\leq n\leq k_i\\ 1\leq i\leq m}} (|a_{in}|) \neq 0$$

when $k_1, \ldots, k_m$ are fixed integers, and $t_1, \ldots, t_m$ are real numbers, $h\to\infty$. Then for almost every $(t_1, \ldots, t_m) \in R^m$

$$w_0 = k_1+\ldots+k_m,$$