ACTA ARITHMETICA
XXV (1973)

# Об оценке некоторых тригонометрических сумм

Г. А. Колесник (Киев)

В теореме Ван дер Корпута получена оценка тригонометрической суммы вида $\sum\limits_{X\leqslant x\leqslant X_1} e^{2\pi i f(x)}$ (см., например, теорему I из [1], стр. 43). Для отдельных $f(x)$ получены более сильные оценки, например, для $f(x) = -\frac{t}{2\pi}\ln\frac{x+r}{x}$, [2], стр. 117.

В этой работе, в лемме 2, доказана оценка (1) для $f(x)$, удовлетворяющих некоторым условиям. Из (1) следует теорема Ван дер Корпута. Для $f(x) = -\frac{t}{2\pi}\ln\frac{x+r}{x}$ оценка (1) подобна с точностью до множителя $\ln X$ приведенной в [2].

Лемма 2 используется для доказательства теоремы, в которой получена новая оценка двойных сумм некоторого вида.

Показано, что из теоремы следует:

1. $\Delta(R) \ll R^{\frac{346}{1067}}\ln^{\frac{211}{100}}R$; 2. $\zeta(\frac{1}{2}+it) \ll t^{\frac{173}{1067}}\ln^{\frac{331}{200}}t$,

что усиливает оценки, полученные в [3], [4], [5].

Работа состоит из трех частей: в § 1 приведены леммы, в § 2 доказана теорема, в § 3 следствия из нее.

Автор выражает благодарность А. А. Карацубе за руководство работой.

Употребляемые обозначения.

$\Delta(R)$ — остаточный член в проблеме делителей.

$$\tilde{f} \equiv \tilde{f}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{n_1,\ldots,n_k} |x_1^{n_1}\ldots x_k^{n_k}|$$

для $f(x_1,\ldots,x_n) = \sum\limits_{n_1,\ldots,n_k} a_{n_1,\ldots,n_k} x_1^{n_1}\ldots x_k^{n_k}$ (очевидно, что $f(x_1,\ldots,x_k) \ll \tilde{f}(x_1,\ldots,x_k)$).

$R_{li}(f_1(x_1,\ldots,x_k), f_i(x_1,\ldots,x_k))$ — результант двух многочленов как функций от $x_l$; если $f_j(x_1,\ldots,x_k)$ не зависит от $x_j$, $j=1$ или $j=i$, то считаем, что

$$R_{li}(f_1(x_1,\ldots,x_k), f_i(x_1,\ldots,x_k)) = f_j(x_1,\ldots,x_k).$$

$R\big(f_1(x_1,\ldots,x_k),\ldots,f_k(x_1,\ldots,x_k)\big)$ — результант $k$ многочленов от $k$ переменных.

$\varepsilon$ — достаточно малое число.

Будем говорить, что однородные многочлены $f_1(x_1,\ldots,x_k),\ldots$ $\ldots,f_n(x_1,\ldots,x_k)$, первые $m\leqslant n\leqslant k$ из которых симметричны, удовлетворяют условиям $I_{k,n,m}$, если:

а) $f_i(x_1,\ldots,x_k)$ $(i=1,\ldots,k)$, где $f_{n+j}(x_1,\ldots,x_k)\equiv\dfrac{\partial}{\partial x_j}\big(f_1(x_1,\ldots,x_k)\big)$ $(j=1,\ldots,k-n)$, удовлетворяют условиям $I_{k,k,m}$;

б) для любых $l,i,x_j$ и $\varepsilon_i$ таких, что $1\leqslant l\leqslant k$, $2\leqslant i\leqslant k$, $x_j>0$ $(j=1,\ldots,k)$ и $|\varepsilon_i|\leqslant\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned}R_{li}\big(f_1(x_1,\ldots,x_k)+\varepsilon_1\tilde f_1, f_i(x_1,\ldots,x_k)+\varepsilon_i\tilde f_i\big) &=\\ = R_{li}\big(f_1(x_1,\ldots,x_k), f_i(x_1,\ldots,x_k)\big)&+\\ +O(|\varepsilon_1|+|\varepsilon_i|)\cdot\tilde R_{li}\big(f_1(x_1,\ldots,x_k), f_i(x_1,\ldots,x_k)\big)&;\end{aligned}$$

в) для любого $1\leqslant l\leqslant k-n+1$ при $m_1=\max\{m-1;0\}$ многочлены

$$f_{l,i-1}(x_1,\ldots,x_{l-1},x_{l+1},\ldots,x_k)\equiv R_{li}\big(f_1(x_1,\ldots,x_k), f_i(x_1,\ldots,x_k)\big)$$
$$(i=2,\ldots,n+l-1)$$

удовлетворяют условиям $I_{k-1,n+l-2,m_1}$.

$I_{k,n,m}$, где $n\geqslant k$, означает что, помимо перечисленных условий, система уравнений $f_i(x_1,\ldots,x_k)=0$ $(i=1,\ldots,k)$ не имеет ненулевых решений.

$\sigma_1(x_1,\ldots,x_k),\ldots,\sigma_k(x_1,\ldots,x_k)$ — элементарные симметрические многочлены от $x_1,\ldots,x_k$; $\sigma_0(x_1,\ldots,x_k)=1$.

Область типа $\Omega$ — связная область, содержащая вместе с любыми точками $A$ и $B$ с координатами соответственно $(x_1,y_1)$ и $(x_2,y_2)$ такими, что $x_1=x_2$ или $y_1=y_2$, и весь отрезок $AB$.

$$Q=q_1q_2\ldots q_{2k};\quad Q_1=q_1q_3\ldots q_{2k-1};\quad Q_2=q_2q_4\ldots q_{2k};$$
$$q=q_1q_2;\quad H_2=h_2h_4\ldots h_{2k}.$$

**§ 1. Леммы.** В этом параграфе будут доказаны или приведены леммы, необходимые для доказательства теоремы из § 2. Леммы I, II, …, VIII будут использоваться непосредственно при доказательстве теоремы.

Лемма 1. *Пусть $f(z)$ функция, аналитичная в области $|z-x|\leqslant$ $\leqslant\sqrt{M_1\ln X}$, $X\leqslant x\leqslant X_1\leqslant 2X$ такая, что в этой области $f^{(k+2)}(z)\ll$ $\ll(MX^k)^{-1}$ $(k=1,2)$; при $X\leqslant x\leqslant X_1$ $f(x)$ — действительная функция такая, что $M_1^{-1}\leqslant f''(x)\leqslant CM_1^{-1}$; $X$ и $M$ — достаточно большие числа такие, что $M_1>M>0$, $X_1-X>1$, $X^2>M_1^3M^{-2}\ln^3X$, $x_n=x(n)$ определяется из тождества $f'(x_n)\equiv n$; $XM^2>M_1^2$.*

*Тогда*

$$\sum_{X\leqslant x\leqslant X_1}e^{2\pi i f(x)}=e^{\pi i/4}\sum_{f'(X)\leqslant n\leqslant f'(X_1)}\big(f''(x_n)\big)^{-1/2}e^{2\pi i(f(x_n)-nx_n)}+O(\sqrt{M_1}+\ln^2X).$$

Лемма доказывается подобно лемме 2 из [7].

Лемма I (см. теорема 2, [1], стр. 44). *Пусть $f(x)$ действительная функция с непрерывной производной вплоть до $k$-го порядка и пусть $r\leqslant f^{(k)}(x)\leqslant hr$. Тогда*

$$\sum_{a\leqslant x\leqslant b}e^{2\pi i f(x)}\ll h^{2^{2-k}}(b-a)r^{1/(2^k-2)}+(b-a)^{1-2^{2-k}}r^{-1/(2^k-2)}.$$

Лемма II. *Пусть $f(x,y)$ удовлетворяет условиям леммы 1 как функция от $x$ и такая, что всюду в области $D$*

$$M_1^{-1}\leqslant f''_{x^2}(x,y)\leqslant M^{-1},\quad f'''_{x^3}(x,y)\ll(MX)^{-1},\quad f''_{xy}(x,y)\ll X\cdot(YM)^{-1},$$
$$M_2^{-1}\leqslant\left|f''_{x^2}(x,y)f''_{y^2}(x,y)-\big(f''_{xy}(x,y)\big)^2\right|\ll X^2\cdot(YM)^{-2};$$

*пусть также область $D$ можно разбить на конечное число областей типа $\Omega$, в каждой из которых*

$$L\big(f(x,y)\big),\quad L_1\big(f(x,y)\big),\quad f''_{xy}(x,y)\quad \text{и}\quad f''_{x^2}(x,y)$$

*(где $L\big(f(x,y)\big)\equiv f''_{x^2}(x,y)f''_{y^2}(x,y)-\big(f''_{xy}(x,y)\big)^2$ и $L_1\big(f(x,y)\big)\equiv f''_{xy}(x,y)\times$ $\times\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(L\big(f(x,y)\big)\Big)-f''_{x^2}(x,y)\cdot\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(L\big(f(x,y)\big)\Big)\Big)$ монотонны по обеим переменным; $D$ — область типа $\Omega$, содержащаяся в прямоугольнике $X\leqslant x\leqslant$ $\leqslant 2X$, $Y\leqslant y\leqslant 2Y$; область $D_1=D_1(\gamma,\varepsilon)$ — подобласть $D$, содержащая при некоторых $\gamma$ и $0<\varepsilon<1$ все точки из $D$ с условием $\left|\dfrac{x}{y}-\gamma\right|\leqslant\varepsilon\dfrac{x}{y}$; $N>XY$; $M_1\geqslant M$.*

*Тогда*

$$\sum_D e^{2\pi i f(x,y)}\ll\ln^2N\left(\frac{x^2}{M}+X\sqrt{M_2}M^{-1}+Y\sqrt{M_1}+Y\ln^2N\right)$$

*и*

$$\sum_{D_1}e^{2\pi i f(x,y)}\ll\ln N(\varepsilon N\cdot M^{-1/2}+Y\sqrt{M_1}+Y\ln^2N).$$

Лемма доказывается подобно лемме 2 из [5].

Лемма 2. *Пусть $f(x)$, заданная на $[X,X_1]$, $k$ раз непрерывно дифференцируема и такая, что $M\leqslant\big(f''(x)\big)^{-1}\leqslant M_1$; $f''(x)$ — кусочно-монотонная; при любом $M_3$ таком, что $M\leqslant M_3\leqslant M_1$ и любом отрезке,* *на котором* $M_3 \leqslant (f''(x))^{-1} \leqslant 2M_3$, $f(x)$ *удовлетворяет условиям леммы* 1; *функция* $L_k(f(x))$, *которая определяется рекуррентно*:

$$L_2(f(x)) = 1,$$

$$L_{i+1}(f(x)) = (f''(x))^{2i-1}\frac{d}{dx}\big(L_i(f(x))(f''(x))^{3-2i}\big) \quad (i = 2, \ldots, k-1),$$

*является кусочно-монотонной и удовлетворяет неравенствам*:

$$0 \leqslant \frac{\varepsilon}{L} \leqslant |L_k(f(x))| \leqslant \frac{1}{L} \ll 1; \quad 1 \ll X \leqslant X_1 \leqslant 2X; \quad \ln\varepsilon \ll \ln X; \quad k \geqslant 3.$$

*Тогда*

$$(1) \quad \sum_{X \leqslant x \leqslant X_1} e^{2\pi i f(x)} \ll \sqrt{M_1}\ln^2 N + \ln^4 N + X\ln^2 N \cdot L^{-\frac{1}{2^k-2}} M^{\frac{3k-3}{2^k-2}-\frac{1}{2}} + \\ + X^{1-2^{2-k}} M^{\frac{4}{2^k}-\frac{2k-3}{2^k-2}-\frac{1}{2}} \left(\frac{L}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2^k-2}} \ln^2 N.$$

Доказательство. $\sum\limits_{X \leqslant x \leqslant X_1} e^{2\pi i f(x)} \ll \ln^2 N \left|\sum' e^{2\pi i f(x)}\right|$, где $\sum'$ означает сумму по $x$ таким, что $L_k(f(x))$ и $f''(x)$ — монотонные,

$$(M')^{-1} \leqslant f''(x) \leqslant (M_1')^{-1} \leqslant 2(M')^{-1}, \quad M \leqslant M' \leqslant M_1$$

и

$$\frac{1}{L'} \leqslant |L_k(f(x))| \leqslant \frac{1}{L''} \leqslant \frac{2}{L'}, \quad L < L' \leqslant \frac{L}{\varepsilon}.$$

Из монотонности $f''(x)$ и $L_k(f(x))$ следует, что $x$ пробегает последовательное множество, т.к.

$$(M')^{-1} \leqslant f''(x_1) \leqslant f''(x_2) \leqslant f''(x_3) \leqslant (M_1')^{-1}$$

при $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3$ (или $x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3$) и

$$(L')^{-1} \leqslant L_k(f(y_1)) \leqslant L_k(f(y_2)) \leqslant L_k(f(y_3)) \leqslant (L'')^{-1}$$

при $y_1 \leqslant y_2 \leqslant y_3$ (или $y_1 \geqslant y_2 \geqslant y_3$).

Применив лемму 1, получим:

$$\sum_{X' \leqslant x \leqslant X_1'}{}' e^{2\pi i f(x)} \ll \sum_n (f''(x_n))^{-1/2} \cdot e^{2\pi i (f(x_n) - n x_n)} + \sqrt{M_1} + \ln^2 N,$$

где суммирование по $n$ ведется по области $N_1 = f'(X') \leqslant n \leqslant f'(X_1') = N_2$; $f'(x_n) \equiv n$. Найдем

$$\frac{d^k}{dn^k}(f(x_n) - n x_n) = \frac{d^{k-1}}{dn^{k-1}}\left(f'(x_n) - \frac{dx_n}{dn} - n\frac{dx_n}{dn} - x_n\right) = -\frac{d^{k-1}x_n}{dn^{k-1}}.$$



Из $f'(x_n) \equiv n$ следует, что

$$f''(x_n)\cdot\frac{dx_n}{dn} = 1, \quad \frac{dx_n}{dn} = (f''(x_n))^{-1};$$

индукцией по $k \geqslant 2$ можно легко показать, что

$$\frac{d^{k-1}x_n}{dn^{k-1}} = L_k(f(x_n))(f''(x_n))^{3-2k}$$

и что $L_k(f(x_n))$ есть сумма произведений некоторых производных от $f(x_n)$ порядка не менее второго и не более $k$-го, в каждом произведении $(k-2)$ множителя и сумма степеней производных равна $3(k-2)$; в сумме содержится с некоторым коэффициентом член $(f'''(x_n))^{k-2}$. Применив преобразование Абеля и лемму I, получим:

$$\sum_n (f''(x_n))^{-1/2} e^{2\pi i (f(x_n) - n x_n)} \ll \sqrt{M'}\left|\sum_n e^{2\pi i (f(x_n) - n x_n)}\right| \ll \\ \ll \sqrt{M'}\Big((N_2 - N_1)\big((M')^{2k-3}(L')^{-1}\big)^{1/(2^k-2)} + \\ + (N_2 - N_1)^{1-2^{2-k}}\big(L'(M')^{3-2k}\big)^{1/(2^k-2)}\Big).$$

Отсюда (т.к. $N_2 - N_1 = f'(X_1') - f'(X') = (X_1' - X')f''(\zeta) \leqslant X/M'$) убеждаемся в справедливости леммы.

Лемма III. *Пусть* $f(x, y)$ *удовлетворяет условиям леммы* 1 *как функция от* $x$ *с*

$$M = \frac{X^2}{F_1}, \quad M_1 = \frac{Q_2}{H_2}\cdot\frac{M}{a_1}, \quad M_2 = \frac{Y^2 M^2 Q_2^2}{X^2 H_2^2 a_2},$$

*где*

$$H_2 \leqslant Q_2, \quad \max_{1 \leqslant i \leqslant 3}\left\{\ln\frac{Q_2}{H_2 a_i}\right\} \ll \ln N \quad и \quad \max_{1 \leqslant i \leqslant 3}\{a_i\} \ll 1,$$

*и пусть*

$$\psi(x) = f(\varphi_n(x), x) - n\varphi_n(x)$$

*удовлетворяет условиям леммы* 2 *с*

$$\frac{1}{L} = \frac{F_1^{4k-8}}{X^{6k-12}Y^{3k-6}}\left(f_{x^2}''(\varphi_n, y)\right)^{6-3k}$$

*где* $\varphi_n = \varphi_n(x)$ *находится из тождества*: $f_t'(t, x)|_{t=\varphi_n} \equiv n$.

*Тогда*

$$\sum_D e^{2\pi i f(x,y)} \ll \frac{Q_2 Y \ln^2 N}{H_2\sqrt{a_2}} + \sqrt{\frac{F_1 Q_2}{a_1 H_2}}\ln^4 N + Y\ln^4 N + \\ + \sqrt{\frac{Q_2 N^2 \ln^2 N}{H_2 F_1 a_1}} + \left(\frac{Q_2}{H_2}\right)^{3/4} a_1^{\frac{3-k}{2^k-2}} X^{-\frac{k}{2^k-2}} \left(\frac{F_1}{N}\right)^{1-\frac{k-1}{2^k-2}} N^{1+\frac{1}{2^k-2}}\ln^3 N + \\ + \left(\frac{Q_2}{H_2}\right)^{3/4} a_3^{-\frac{1}{2^k-2}} \left(\frac{F_1}{N}\right)^{1-\frac{4}{2^k}+\frac{k-1}{2^k-2}} X^{\frac{k}{2^k-2}-\frac{4}{2^k}} N^{1-\frac{1}{2^k-2}}\ln^3 N,$$

*где суммирование по $x$, $y$ проводится по области $D$ типа $\Omega$, находящейся внутри прямоугольника $X \leqslant x \leqslant 2X$, $Y \leqslant y \leqslant 2Y$.*

Доказательство. В лемме 2 показано (см. [5]), что

$$\sum_D e^{2\pi i f(x,y)} \ll \ln N \Big( Y\sqrt{M_1} + Y\ln^2 N + \sqrt{M'} \sum_n \Big| \sum_y e^{2\pi i (f(x_n(y),y) - nx_n(y))} \Big| \Big).$$

Здесь суммирование по $y$ проводится по некоторому последовательному множеству $Y_1(n) \leqslant y \leqslant Y_2(n)$, $Y_2(n) - Y_1(n) = Y(n)$ такому, что

$$(M')^{-1} \leqslant f''_{x^2}(x_n(y), y) \leqslant (M_1')^{-1} \leqslant 2(M')^{-1} \cdot \sum_n 1 =$$
$$= f'_x(X_1, Y_1) - f'_x(X, Y) =$$
$$= (X_1 - X) \cdot f''_{x^2}(x_1, y_1) + (Y_1 - Y) \cdot f''_{xy}(x_2, y_2) \leqslant$$
$$\leqslant X \cdot \frac{1}{M} + Y \cdot \frac{X}{YM} = \frac{2X}{M};$$

$$\sum_n Y(n) = \sum_n \big(Y_2(n) - Y_1(n)\big) = \sum_n \sum_y 1 = \sum_y \sum_n 1 =$$
$$= \sum_y \big(f'_x(X_1, y) - f'_x(X, y)\big) =$$
$$= \sum_y (X_1 - X) \cdot f''_{x^2}(x_0, y) \leqslant \sum_y \frac{x}{M'} \leqslant \frac{XY}{M'} \leqslant \frac{N}{M'}.$$

В той же лемме 2, [5] показано, что

$$\frac{\partial x_n(y)}{\partial y} = -\frac{f''_{xy}(x_n, y)}{f''_{x^2}(x_n, y)},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\big(f(x_n(y), y) - nx_n(y)\big) = \frac{f''_{x^2}(x_n, y) \cdot f''_{y^2}(x_n, y) - \big(f''_{xy}(x_n, y)\big)^2}{f''_{x^2}(x_n, y)}.$$

Индукцией по $k \geqslant 2$ можно легко показать, что

$$\frac{\partial^k}{\partial y^k}\big(f(x_n(y), y) - nx_n(y)\big) = \frac{L'_k\big(f(x_n, y)\big)}{\big(f''_{x^2}(x_n, y)\big)^{2k-3}},$$

где $L'_k\big(f(x, y)\big)$ — сумма некоторых произведений производных от $f(x, y)$ порядка от второго до $k$-го таких, что множителей в произведении ровно $(2k-2)$, сумма порядков производных $(5k-6)$ а сумма порядков производных, взятых по $y$, равна $k$. Тогда (см. лемму 2)

$$L_k\big(f(x_n(y), y) - nx_n(y)\big) = \sum \prod_i \frac{L'_{l_i}\big(f(x_n, y)\big)}{\big(f''_{x^2}(x_n, y)\big)^{2l_i - 3}},$$



где суммирование проводится по некоторым $l_1, l_2, \ldots, l_{k-2}$ таким, что $\sum_{i=1}^{k-2} l_i = 3(k-2)$, $2 \leqslant l_i \leqslant k$. Значит,

$$L_k\big(f(x_n(y), y) - nx_n(y)\big) = \sum \frac{\prod_i L'_{l_i}\big(f(x_n, y)\big)}{\big(f''_{x^2}(x_n, y)\big)^{2\cdot 3(k-2) - 3(k-2)}} = \frac{L''_k\big(f(x_n, y)\big)}{\big(f''_{x^2}(x_n, y)\big)^{3(k-2)}},$$

где $L''_k\big(f(x, y)\big)$ — сумма произведений некоторых производных от $f(x, y)$ порядка не менее второго и не более $k$-го таких, что в каждом произведении $\sum_{i=1}^{k-2}(2l_i - 2) = 4(k-2)$ множителей, сумма порядков производных по $y$ равна

$$\sum_{i=1}^{k} l_i = 3(k-2),$$

а по $x$ равна

$$\sum_{i=1}^{k-2}(4l_i - 6) = 4 \cdot 3 \cdot (k-2) - 6(k-2) = 6(k-2).$$

Т.к.

$$\frac{X^2 H_2^2 \alpha_2}{Y^2 M^2 Q_2^2} \leqslant \big| f''_{x^2}(x, y) \cdot f''_{y^2}(x, y) - \big(f''_{xy}(x, y)\big)^2 \big| \ll X^2 (YM)^{-2},$$

то

$$\frac{X^2 H_2^2 M' \alpha_2}{Y^2 Q_2^2 M^2} \ll \left| \frac{\partial}{\partial y^2}\big(f(x_n, y) - nx_n\big) \right| \ll \frac{X^2 M'}{Y^2 M^2}.$$

Пусть

$$L_1 = \left(\frac{X^3 N^3}{F_1^4}\right)^{k-2}.$$

Применив для оценки $\big| \sum_y e^{2\pi i (f(x_n, y) - nx_n)} \big|$ лемму 2, получим требуемое неравенство.

Лемма 3. *Пусть $f_i(x_1, \ldots, x_k)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ — однородные многочлены, удовлетворяющие условиям $I_{k,k,m}$; $0 < \varepsilon_i \leqslant \varepsilon$. Тогда система неравенств*

(2) $$|f_i(x_1, \ldots, x_k)| \leqslant \varepsilon_i \tilde{f}_i(x_1, \ldots, x_k) \quad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

*не имеет ненулевых решений.*

Доказательство проведем по индукции по $k$. При $k = 1$ лемма очевидна. Пусть $k > 1$ и пусть

$$f_i(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{n_1, \ldots, n_k} C^i_{n_1, \ldots, n_k} x_1^{n_1} \ldots x_k^{n_k} \quad (i = 1, \ldots, k),$$

где $C^i_{n_1,\ldots,n_k} \neq 0$. Тогда все решения системы (2) находятся среди решений системы уравнений

$$\varphi_i(x_1, \ldots, x_k) \equiv \sum_{n_1,\ldots,n_k} (C^i_{n_1,\ldots,n_k} - \varepsilon_i \theta^i_{n_1,\ldots,n_k}) x_1^{n_1} \ldots x_k^{n_k} = 0, \qquad \theta^i_{n_1,\ldots,n_k} \leqslant 1$$
$$(i = 1, \ldots, k).$$

Для любого решения системы (2) имеем:

$$R_{1i}\big(\varphi_1(x_1, \ldots, x_k), \varphi_i(x_1, \ldots, x_k)\big) = 0 \quad (i = 2, \ldots, k).$$

Но, так как $f_i(x_1, \ldots, x_k)$ $(i = 1, \ldots, k)$ удовлетворяют условиям $I_{k,k,m}$, то из условия б) следует, что для любого решения системы (2)

$$0 = R_{1i}\big(\varphi_1(x_1, \ldots, x_k), \varphi_i(x_1, \ldots, x_k)\big) = R_{1i}\big(f_1(x_1, \ldots, x_k), f_i(x_1, \ldots, x_k)\big) + \\ + O(\varepsilon_1 + \varepsilon_i) \cdot \tilde{R}_{1i}\big(f_1(x_1, \ldots, x_k), f_i(x_1, \ldots, x_k)\big),$$

т.е.

$$R_{1i}(x_2, \ldots, x_k) \equiv R_{1i}\big(f_1(x_1, \ldots, x_k), f_i(x_1, \ldots, x_k)\big) \ll (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \tilde{R}_{1i} \quad (i = 2, \ldots, k),$$

где многочлены $R_{1i}(x_2, \ldots, x_k)$ $(i = 2, \ldots, k)$ удовлетворяют, согласно условию в), условиям $I_{k-1,k-1,m_1}$. Значит лемма справедлива при любом $k \geqslant 1$.

Лемма 4. *Пусть* $f_i(x_1, \ldots, x_k)$ $(i = 1, \ldots, n)$ — *однородные многочлены, удовлетворяющие условиям* $I_{k,n,m}$; $0 < \varepsilon_i \leqslant \varepsilon$ $(i = 1, \ldots, n)$, $\varepsilon_i \leqslant \varepsilon_{i+1}$ $(i = 1, \ldots, m-1)$; $n \leqslant k$.

*Тогда область* $D$: $|f_i(x_1, \ldots, x_k)| \leqslant \varepsilon_i \tilde{f}_i(x_1, \ldots, x_k)$ $(i = 1, \ldots, n)$, $x_j \neq 0$, $X_j \leqslant x_j \leqslant X'_j$ $(j = 1, \ldots, k)$ *можно разбить на* $O(1)$ *областей, каждая из которых содержится в области вида* $x_{l_i} = x^0_{l_i}(x_1, \ldots, x_{l_1-1}, x_{l_1+1}, \ldots, x_{l_i-1}, x_{l_i+1}, \ldots, x_k) + O(\varepsilon_i x^0_{l_i})$ $(i = 1, \ldots, m)$, *где* $l_i > 0$ *все различны, причем, если обозначить* $\delta(l_i) = \sum_{\substack{j<i \\ l_j<l_i}} 1$, *то*

$$\sum_{i=1}^{m} \big(l_i - \delta(l_i)\big) \leqslant k - n + m - 1.$$

Доказательство. Докажем по индукции по $m$.

1. Пусть $m = 1$. Т. к. $f_i(x_1, \ldots, x_k)$ $(i = 1, \ldots, n)$ удовлетворяют условиям $I_{k,n,m}$, то из условий а) и в) и леммы 3 следует, что для любой точки $(x_1, \ldots, x_k)$ из $D$ найдется $1 \leqslant l \leqslant k - n$ такое, что

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_l} \big(f_1(x_1, \ldots, x_k)\big) \right| \equiv |f_{n+l}(x_1, \ldots, x_k)| \ll \tilde{f}_{n+l}(x_1, \ldots, x_k).$$

Пусть

$$f_1\big(x_1, \ldots, x_{l-1}, x^j_l(x_1, \ldots, x_{l-1}, x_{l+1}, \ldots, x_k), x_{l+1}, \ldots, x_k\big) \equiv 0$$
$$(l = 1, \ldots, k;\ j = 1, \ldots, j_l).$$



Разобьем область $D$ на подобласти $D_{lj_1}$ $(l = 1, \ldots, k;\ j_1 = 1, \ldots, j_l)$, в которых

$$|x_l - x^{j_1}_l(x_1, \ldots, x_{l-1}, x_{l+1}, \ldots, x_k)| = \min_j |x_l - x^j_l(x_1, \ldots, x_{l-1}, x_{l+1}, \ldots, x_k)|.$$

Точка $(x_1, \ldots, x_k)$ принадлежит одной из них. В ней, очевидно,

$$f_1(x_1, \ldots, x_k) \gg |x_l - x^{j_1}_l| \cdot \frac{\tilde{\partial}}{\partial x_l} \big(f(x_1, \ldots, x_k)\big).$$

Значит,

$$\varepsilon_1 \tilde{f}_1(x_1, \ldots, x_k) \gg |f_1(x_1, \ldots, x_k)| \gg |x_l - x^{j_1}_l| \cdot \frac{\tilde{\partial}}{\partial x_l} \big(f_1(x_1, \ldots, x_k)\big).$$

Очевидно, можно считать, что $f_1(x_1, \ldots, x_k) = (x_1 \ldots x_k) \cdot f_{11}(x_1, \ldots, x_k)$ и $f_1(x_1, \ldots, x_k) \neq (x_1 \ldots x_k)^a f_{12}(x_1, \ldots, x_k)$ при $a > 1$, т. к. в противном случае можно домножить на $(x_1 \ldots x_k)$ (или, соответственно, сократить), от этого область $D$ не изменится. Но тогда

$$\frac{\tilde{\partial}}{\partial x_l} \big(f_1(x_1, \ldots, x_k)\big) = \frac{1}{|x_l|} \tilde{f}_1(x_1, \ldots, x_k).$$

Отсюда, $\varepsilon_1 x_l \gg |x_l - x^{j_1}_l(x_1, \ldots, x_{l-1}, x_{l+1}, \ldots, x_k)|$, т.е. любая точка из $D$ принадлежит одной из $O(1)$ областей указанного вида. Здесь

$$\sum_{i=1}^{m} \big(l_i - \delta(l_i)\big) = l \leqslant k - n = k - n + m - 1.$$

2. Пусть лемма справедлива при $m < m_0$. Подобно предыдущему, для любой точки из $D$ существует $1 \leqslant l_1 \leqslant k - n$ такое, что

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_{l_1}} \big(f_1(x_1, \ldots, x_k)\big) \right| \gg \frac{\tilde{\partial}}{\partial x_{l_1}} \big(f_1(x_1, \ldots, x_k)\big)$$

(считаем,что $l_1$ наименьшее число с таким свойством), разобьем область на подобласти, в которых

$$|x_{l_1} - x^{j_1}_{l_1}(x_1, \ldots, x_{l_1-1}, x_{l_1+1}, \ldots, x_k)| = \\ = \min_j |x_{l_1} - x^j_{l_1}(x_1, \ldots, x_{l_1-1}, x_{l_1+1}, \ldots, x_k)|,$$

в $j_1$-той области, которой принадлежит точка $(x_1, \ldots, x_k)$

$$|f_1(x_1, \ldots, x_k)| \gg |x_{l_1} - x^{j_1}_{l_1}| \cdot \frac{\tilde{\partial}}{\partial x_{l_1}} \big(f_1(x_1, \ldots, x_k)\big) \quad \text{и} \quad |x_{l_1} - x^{j_1}_{l_1}| \ll \varepsilon_1 x_{l_1}.$$

Т. к. $l_1$ наименьшее, то

$$f_{n+l}(x_1, \ldots, x_k) \equiv \frac{\partial}{\partial x_l} \big(f_1(x_1, \ldots, x_k)\big) \ll \varepsilon_1 \tilde{f}_{n+l}(x_1, \ldots, x_k) \quad (l = 1, \ldots, l_1 - 1).$$

Но из условий леммы, подобно показанному в лемме 3, следует:

$$f_{l_1,i}(x_1, \ldots, x_{l_1-1}, x_{l_1+1}, \ldots, x_k) \ll \varepsilon_i \tilde{f}_{l_1,i}(x_1, \ldots, x_{l_1-1}, x_{l_1+1}, \ldots, x_k)$$
$$(i = 2, 3, \ldots, n+l_1-1).$$

Т. к. $f_{l_1,i}(x_1, \ldots, x_{l_1-1}, x_{l_1+1}, \ldots, x_k)$ $(i = 2, 3, \ldots, n+l_1-1)$ удовлетворяют условиям $I_{k-1,n+l_1-2,m-1}$, то из предположения индукции получаем, что точка $(x_1, \ldots, x_k)$ принадлежит одной из областей указанного вида где, очевидно,

$$\sum_{i=1}^{m} \big(l_i - \delta(l_i)\big) \leqslant k-n+m-1.$$

Лемма IV. *Пусть* $f_i(x_1, \ldots, x_k)$ $(i = 1, \ldots, n)$ *удовлетворяют условиям леммы* 4; $q_1, q_2, \ldots, q_{2k}$ *такие, что*

$$\frac{q_{2i-1}}{q_{2i}} = \frac{X}{Y} \quad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

$$(q_{2i-1}q_{2i})^2 = q_{2i+1}q_{2i+2} \quad (i = 1, 2, \ldots, k-1), \quad 0 < \varepsilon_i \leqslant \varepsilon;\ a > 0.$$

*Тогда целые точки из области* $D$: $1 < |h_i| < q_i$ $(i = 1, 2, \ldots, 2k)$; $H_2 \leqslant Q_2\beta$, $f_i(x_1, \ldots, x_k) \leqslant \varepsilon_i \tilde{f}_i(x_1, \ldots, x_k)$ $(i = 1, \ldots, n)$, $x_i = \dfrac{h_{2k-2i+1}}{h_{2k-2i+2}}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ *можно независимо от* $\beta$ *разбить на* $O(1)$ *подмножеств, в каждом из которых*

$$\frac{1}{Q}\sum_{h_i \in D} \frac{Q_2}{H_2} \ll \ln^k q \cdot \prod_{i=1}^{m} \left(\varepsilon_i + \sqrt{\frac{Y}{X} q^{-2^{k-l_i}}}\right),$$

$$\frac{1}{Q}\sum_{h_i \in D} \left(\frac{Q_2}{H_2}\right)^{1-a} \ll \min\{\beta^a \ln^{k-1} q; 1\} \prod_{i=1}^{m} \left(\varepsilon_i + \sqrt{\frac{Y}{X} q^{-2^{k-l_i}}}\right)$$

*где* $l_i > 0$ *такие, что*

$$\sum_{i=1}^{m} \big(l_i - \delta(l_i)\big) \leqslant k-n-1+m \leqslant k-1, \quad \beta \leqslant 1.$$

Доказательство. Разобьем согласно лемме 4 область $D$ на подобласти. Возьмем одну из них. Она содержится в области $D_1$:

$$h_{2k-2l_1+1} = h^0_{2k-2l_1+1}(h_1, \ldots, h_{2k-2l_1}, h_{2k-2l_1+2}, \ldots, h_{2k}) + O(\varepsilon_1 q_{2k-2l_1+1}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$h_{2k-2l_m+1} = h^0_{2k-2l_m+1}(h_1, \ldots, h_{2k-2l_1}, h_{2k-2l_1+2}, \ldots, h_{2k-2l_m}, h_{2k-2l_m+2}, \ldots, h_{2k}) + O(\varepsilon_m q_{2k-2l_m+1}).$$



Значит,

$$\frac{1}{Q}\sum_{D_1} \frac{Q_2}{H_2} \ll \frac{1}{Q} \sum_{|h_1|=1}^{q_1-1} \cdots \sum_{|h_{2k-2l_1}|=1}^{q_{2k-2l_1}-1} \sum_{|h_{2k-2l_1+2}|=1}^{q_{2k-2l_1+2}-1} \cdots \sum_{|h_{2k-2l_m}|=1}^{q_{2k-2l_m}-1} \sum_{|h_{2k-2l_m+2}|=1}^{q_{2k-2l_m+2}-1} \cdots$$
$$\cdots \sum_{|h_{2k}|=1}^{q_{2k}-1} \frac{Q_2}{H_2} \prod_{i=1}^{m} (\varepsilon_i q_{2k-2l_i+1} + 1) \ll \ln^k q \cdot \prod_{i=1}^{m} \left(\varepsilon_i + \sqrt{Y(Xq^{2^{k-l_i}})^{-1}}\right).$$

Аналогично доказывается второе неравенство леммы.

Лемма V. *Пусть* $f_i(x_1, \ldots, x_k)$ $(i = 1, \ldots, n)$ *удовлетворяют условиям* $I_{k,n,1}$; $k \geqslant 3$; $\varepsilon_i$, $a$, $\beta$ *и* $D$ *из леммы* IV. *Тогда*

$$\frac{1}{Q}\sum_{D} \left(\frac{Q_2}{H_2}\right)^{1-a} \ll \left(\varepsilon_1 + \varepsilon_1^{n/2} + \frac{1}{q^2}\sqrt{\frac{Y}{X}}\right) \min\{\beta^a \ln^{k-1} q; 1\}$$

*и*

$$\frac{1}{Q}\sum_{D} \frac{Q_2}{H_2} \ll \ln^k q \left(\varepsilon_1 + \varepsilon_1^{n/2} + \frac{1}{q^2}\sqrt{\frac{Y}{X}}\right).$$

Доказательство. Пусть вначале $n > 1$. Возьмем любую точку из $D$. Подобно лемме 4, существует $1 \leqslant l \leqslant k-n \leqslant k-2$ такое, что

$$\frac{\partial f_1(x_1, \ldots, x_k)}{\partial x_l} \ll \frac{\tilde{\partial} f_1(x_1, \ldots, x_k)}{\partial x_l},$$

и $D$ разбивается на $O(1)$ областей, в каждой из которых $|x_l - x_l^0| \ll \varepsilon_1 x_l^0$; подобно лемме IV,

$$\frac{1}{Q}\sum_{D} \left(\frac{Q_2}{H_2}\right)^{1-a} \ll \min\{\beta^a \ln^{k-1} q; 1\} \cdot \left(\varepsilon_1 + \sqrt{\frac{Y}{X} \cdot q^{-2^{k-l}}}\right) \ll$$
$$\ll \min\{\beta^a \ln^{k-1} q; 1\} \cdot \left(\varepsilon_1 + \frac{1}{q^2}\sqrt{\frac{Y}{X}}\right)$$

и

$$\frac{1}{Q}\sum_{D} \frac{Q_2}{H_2} \ll \ln^k q \cdot \left(\varepsilon_1 + \frac{1}{q^2}\sqrt{\frac{Y}{X}}\right).$$

Пусть $n = 1$. Возьмем любую точку $(x_1, \ldots, x_k)$ из $D$. Если существует $1 \leqslant l \leqslant k-2$ такое, что

$$\frac{\partial f_1(x_1, \ldots, x_k)}{\partial x_l} \gg \frac{\tilde{\partial} f_1(x_1, \ldots, x_k)}{\partial x_l},$$

то, подобно предыдущему, точка $(x_1, \ldots, x_k)$ лежит в одной из $O(1)$ областей, в которой $|x_l - x_l^0| \ll \varepsilon_1 x_l^0$ и выполняются требуемые неравенства. Если же

$$\frac{\partial f_1(x_1, \ldots, x_k)}{\partial x_i} \ll \frac{\tilde{\partial} f_1(x_1, \ldots, x_k)}{\partial x_i} \quad (i = 1, \ldots, k-1),$$

то найдем наименьшее $1 \leqslant l \leqslant k-1$ такое, что

$$\frac{\partial f_1(x_1, \ldots, x_k)}{\partial x_i} \ll \sqrt{\varepsilon_1}\, \frac{\tilde{\partial} f_1(x_1, \ldots, x_k)}{\partial x_i} \quad (i = 1, \ldots, l-1),$$

но

$$\frac{\partial f_1(x_1, \ldots, x_k)}{\partial x_l} \gg \sqrt{\varepsilon_1}\, \frac{\tilde{\partial} f_1(x_1, \ldots, x_k)}{\partial x_l}.$$

Если $l \leqslant k-2$, то подобно предыдущему $|x_l - x_l^0(x_2, \ldots, x_k)| \ll \sqrt{\varepsilon_1}\, x_l^0$. Если же $l = k-1$, то

$$\varphi_i(x_1, \ldots, x_{k-2}, x_k) \equiv R_{k-1, i+1}\left(f_1(x_1, \ldots, x_k), \frac{\partial f_1(x_1, \ldots, x_k)}{\partial x_i}\right) \ll$$
$$\ll \sqrt{\varepsilon_1}\, \tilde{\varphi}_i(x_1, \ldots, x_{k-2}, x_k) \quad (i = 1, \ldots, k-1)$$

и подобно лемме IV доказывается справедливость леммы V.

Лемма VI. *Пусть*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} A_i x^{\alpha_i} + \sum_{i=1}^{m} B_i x^{-\beta_i}, \quad \text{где} \quad \alpha_i > 0,\ \beta_i > 0,\ A_i > 0,\ B_i > 0.$$

*Тогда существует* $0 < x_0 \leqslant \max_{i,j}\{(B_j A_i^{-1})^{1/(\alpha_i+\beta_j)}\}$ *такой, что*

$$f(x_0) \leqslant 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} A_i^{\beta_j/(\alpha_i+\beta_j)} \cdot B_j^{\alpha_i/(\alpha_i+\beta_j)}.$$

Доказательство леммы очевидно.

Лемма VII.

$$\sum_{x, y \in D} e^{2\pi i f(x,y)} \ll \frac{N}{\sqrt{q}} + \sqrt{\frac{N}{q^2} \sum_{h=1}^{q-1} (q-h) \sum_{x, y \in D_h} e^{2\pi i \varphi(x,y)}},$$

*где*

$$\varphi(x, y) = \varphi_h(x, y) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\big(f(x+ht, y)\big)\, dt,$$

*а суммирование по $x, y$ проводится по области $D_h$ такой, что при $0 \leqslant t \leqslant 1$, $x_h = x + ht$ и $y$ лежат в области $D$; область $D = D_0$ — область типа $\Omega$, находящаяся в области $X \leqslant x \leqslant 2X$, $Y \leqslant y \leqslant 2Y$.*

Доказательство леммы подобно доказательству леммы 2 из [6].



Лемма VIII.

$$\sum_{x, y \in D_{0,0}} e^{2\pi i f(x,y)} \ll \frac{N}{\sqrt{q_1 q_2}} + \sqrt{\frac{N}{q_1 q_2}\left(\sum_{|h_1|=1}^{q_1-1} \sum_{|h_2|=1}^{q_2-1} |S_1| + \sum_{|h_1|=1}^{q_1-1} |S_2| + \sum_{|h_2|=1}^{q_2-1} |S_3|\right)},$$

*где*

$$S_1 = S_1(h_1, h_2) = \sum_{x, y \in D_{h_1, h_2}} e^{2\pi i \psi(x,y)}; \quad S_2 = S_1(h_1, 0); \quad S_3 = S_1(0, h_2);$$

$$\psi(x, y) = \psi_{h_1, h_2}(x, y) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\big(f(x+h_1 t, y+h_2 t)\big)\, dt,$$

*а суммирование по $x, y$ проводится по области $D_{h_1, h_2}$ такой, что при $0 \leqslant t \leqslant 1$, $x_{h_1} = x + h_1 t$ и $y_{h_2} = y + h_2 t$ лежат в области $D_{0,0}$. $D_{0,0} = D$ — область из леммы* VII.

Доказательство леммы подобно доказательству леммы 4 из [6].

**§ 2.** В этом параграфе будет доказана теорема об оценке двойных тригонометрических сумм.

Обозначим через $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ соответственно $\left.\dfrac{L_s''(\varphi(x, y))}{(\varphi_{x^2}''(x, y))^2}\right|_{y=1}$ и $\left.\dfrac{L_s''(\varphi(y, x))}{(\varphi_{y^2}''(x, y))^2}\right|_{y=1}$ (см. лемму III) в которых вместо $\left.\dfrac{\partial^{l_1+l_2}\varphi(x, y)}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}}\right|_{y=1}$ подставлено $\sum_{k_1+k_2=k} c(k_1+l_1, k_2+l_2) x^{k_2} \sigma_{k_1}(x_1, \ldots, x_k)$;

$$\varphi_{a_1, a_2, 1}(x) = \sum_{k_1+k_2=k} c(k_1+a_1+2, k_2+a_2) x^{k_2} \sigma_{k_1}(x_1, \ldots, x_k);$$

$$\varphi_{a_1, a_2, 2}(x) = \sum_{k_1+k_2=k} c(k_1+a_1, k_2+a_2+2) x^{k_2} \sigma_{k_1}(x_1, \ldots, x_k);$$

$$\varphi_{a_1, a_2, 4}(x) = \sum_{k_1+k_2=k} c(k_1+a_1+1, k_2+a_2+1) x^{k_2} \sigma_{k_1}(x_1, \ldots, x_k);$$

$$\varphi_{a_1, a_2, 3}(x) = \varphi_{a_1, a_2, 1}(x) \cdot \varphi_{a_1, a_2, 2}(x) - \big(\varphi_{a_1, a_2, 4}(x)\big)^2;$$

$$f_1(x_1, \ldots, x_k) = R\big(\varphi_1(x), \varphi_2(x)\big); \quad f_{ij}(x_1, \ldots, x_k) = R\big(\varphi_j(x), \varphi_j^{(i)}(x)\big);$$

$$f_{lni}^{p}(x_1, \ldots, x_k) = R\big(\varphi_{l-n, n, i}(x), \varphi_{l-n, n, i}^{(p)}(x)\big);$$

$$f_{l, n, i}^{m_0, n_0, i_0}(x_1, \ldots, x_k) = R\big(\varphi_{l-n, n, i}(x), \varphi_{m_0, n_0, i_0}(x)\big),$$

*где* $|l - n - m_0| + |n - n_0| + |i - i_0| > 0$;

$$f_j^{m, n, i}(x_1, \ldots, x_k) = R\big(\varphi_j(x), \varphi_{m, n, i}(x)\big); \quad x_i = \frac{h_{2k-2i+1}}{h_{2k-2i+2}}.$$

Теорема. *Пусть* $f(x, y)$ *такая, что в области* $D$, $0 < F \leqslant f(x, y) \ll F$ *и*
$$\frac{\partial^{k_1+k_2} f(x, y)}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2}} = \frac{c(k_1, k_2)\cdot f(x, y)}{x^{k_1} y^{k_2}} + O\left(\frac{F\Delta}{x^{k_1} y^{k_2}}\right)$$ *при* $k_1 + k_2 \leqslant 3k$, *где* $\Delta \ll 1$; $c(k_1, k_2)$ *такие, что при любых* $l_0, m_0, n_0, i_0, n_1$ *и* $n_2$ *таких, что* $m_0 + n_0 \leqslant l_0$,
$$\frac{l_0(l_0+1)}{2} + n_1 + n_2 + \sum_{l \leqslant l_0} \sum_{n \leqslant l} \sum_{i} 1 \leqslant k - \min\{n_1 n_2; 1\},$$
*многочлены* $f_{l,n,i}^{m_0,n_0,i_0}(x_1, \ldots, x_k)$ *и* $f_{l,n,i}^{p}(x_1, \ldots, x_k)$ $(l = 0, 1, \ldots, l_0$; $n = 0, 1, \ldots, l$; $1 \leqslant i = i_{1ln}, i_{2ln}, i_{3ln} \leqslant 3$; $p = 1, 2, \ldots, p_{lni}$; $p \neq 1$ *при* $l = 0$, $i = 3$, $p_{0,0,i} \geqslant 1$ $(i = 1, 2))$ *вместе с* $f_j^{m_0,n_0,i_0}(x_1, \ldots, x_k)$ $(1 \leqslant j = j_1, j_2 \leqslant 2)$, $f_{ij}(x_1, \ldots, x_k)$ $(j = 1, 2; i = 1, 2, \ldots, n_j)$ *и* $f_1(x_1, \ldots, x_k)$ (*если* $n_1 > 0$, $n_2 > 0$) *удовлетворяют условиям лемм* IV *и* V; *при любых* $l_1, n_1, i_1, j_1, p_1, m_2, n_2, i_2, p_2$, $0 < \varepsilon_i \leqslant \varepsilon$ *и* $0 < \varepsilon_{l,n,i} \leqslant \varepsilon$
$$R\left(\varphi_{l_1-n_1,n_1,i_1}\left(x + \varepsilon_{l_1,n_1,i_1}\cdot(x_1 + \ldots + x_k)\right), \varphi_{m_2,n_2,i_2}(x)\right) = \\ = f_{l_1,n_1,i_1}^{m_2,n_2,i_2}(x_1, \ldots, x_k) + O\left(\varepsilon_{l_1,n_1,i_1}\cdot \tilde{f}_{l_1,n_1,i_1}^{m_2,n_2,i_2}(x_1, \ldots, x_k)\right);$$
$$R\left(\varphi_{j_1}\left(x + \varepsilon_{j_1}\cdot(x_1 + \ldots + x_k)\right), \varphi_{m_2,n_2,i_2}(x)\right) = \\ = f_{j_1}^{m_2,n_2,i_2}(x_1, \ldots, x_k) + O\left(\varepsilon_{j_1}\cdot \tilde{f}_{j_1}^{m_2,n_2,i_2}(x_1, \ldots, x_k)\right);$$
$$R\left(\varphi_{l_1-n_1,n_1,i_1}\left(x + \varepsilon_{l_1,n_1,i_1}\cdot(x_1 + \ldots + x_k)\right), \varphi_{l_1-n_1,n_1,i_1}^{(p_1)}(x)\right) = \\ = f_{l_1,n_1,i_1}^{p_1}(x_1, \ldots, x_k) + O\left(\varepsilon_{l_1,n_1,i_1} \tilde{f}_{l_1,n_1,i_1}^{p_1}(x_1, \ldots, x_k)\right);$$
$$R\left(\varphi_{j_1}\left(x + \varepsilon_{j_1}\cdot(x_1 + \ldots + x_k)\right), \varphi_{j_1}^{(p_1)}(x)\right) = f_{p_1,j_1}(x_1, \ldots, x_k) + O\left(\varepsilon_{j_1} \tilde{f}_{p_1,j_1}(x_1, \ldots, x_k)\right);$$
$$R\left(\varphi_1\left(x + \varepsilon_1\cdot(x_1 + \ldots + x_k)\right), \varphi_2(x)\right) = f_1(x_1, \ldots, x_k) + O(\varepsilon_1 \tilde{f}_1);$$
*область* $D$ — *область типа* $\Omega$, *расположенная внутри прямоугольника* $X \leqslant x \leqslant 2X$, $Y \leqslant y \leqslant 2Y$; $N^\beta = N^{k+2} F^{-2}$; $N^k \ll F^2 \ll N^{k+5/3}$; $l \geqslant 2$ — *некоторое число*; $m + 1 = \dfrac{l(l+1)}{2} \leqslant k$; $a = \left[\dfrac{k-1}{m}\right]$; $b = (a+1)m - k$; $\alpha = 1 - 2^{-b-2} - 2^{-m-1}$; $N \leqslant XY \ll N$; $\ln\Delta \ll \ln N$; $k \geqslant 1$.

*Тогда*
$$S = \sum_{x, y \in D} e^{2\pi i f(x, y)} \ll$$
$$\ll N\cdot\left(\frac{\ln^{2k+1} N}{N^{1/3}} + (\Delta^2 N^{-\beta})^{\frac{2^k-1}{3\cdot 2^k-1}} \ln^{2k-2} N + \frac{\prod_{i=1}^{3}(k-i)}{N^{1/6}} \ln^{2k} N + \right. \\ + (\Delta^{1/6} N^{-\beta})^{\frac{2^k-1}{2^{k+1}-1}} \ln^{k+2} N + N^{\frac{2^{k-1}(3+26\beta)}{56\cdot 2^k-21}} \ln^{2k-2} N + \\ + N^{-\frac{\beta(847\cdot 2^{k+3}-2671)+168\cdot 2^k-78}{(241\cdot 2^k-121)(56\cdot 2^k-21)}\cdot 2^{k-1}} \ln^{k+2} N +$$



$$+ N^{-\frac{5\cdot 2^{k-1}(11k+\beta)}{82k\cdot 2^k+15\cdot 2^k-10}} \ln^{2k+2} N + \frac{\prod_{i=1}^{5}(k-i)}{N^{\frac{1}{3}\cdot 2^{-l}}}\cdot N^{-\frac{\alpha\cdot 2^k-\alpha(\beta+\frac{2}{3}\cdot 2^{-l})}{2^k+2\alpha\cdot 2^k-\alpha-5}} \ln^{2k+2} N + \\ \left. + (k-1)\cdot(k-2)\cdot N^{-\frac{\beta\cdot 2^{k-1}}{2^{k+1}-5}} \ln^k N + \Delta \ln^{2k} N\right)^{1/2^k}.$$

Доказательство. Считаем, что $X \geqslant Y$ и пусть вначале
$$X \leqslant \left(\frac{N^{28\cdot 2^k+13k+17}}{F^{26}}\right)^{\frac{1}{56\cdot 2^k-21}}.$$
Взяв $q_1, \ldots, q_{2k}$ из леммы IV и $k$ раз применив лемму VIII, получим:
$$S \ll \frac{N}{\sqrt{q_1\cdot q_2}} + N\cdot\sqrt[2^k]{\frac{1}{NQ}\left(\sum_h \left|\sum_{x,y} e^{2\pi i\psi(x,y)}\right| + \sum_h{}' \left|\sum_{x,y} e^{2\pi i\psi(x,y)}\right|\right)},$$
где $\sum\limits_h = \sum\limits_{|h_1|=1}^{q_1-1} \sum\limits_{|h_2|=1}^{q_2-1} \ldots \sum\limits_{|h_{2k}|=1}^{q_{2k}-1}$; $\sum\limits_h{}'$ — сумма по $h$, не вошедшим в $\sum\limits_h$ (из дальнейшего будет ясно, что подобно оценке $\sum\limits_h \left|\sum\limits_{x,y} e^{2\pi i\psi(x,y)}\right|$ можно оценить и $\sum\limits_h{}' \left|\sum\limits_{x,y} e^{2\pi i\psi(x,y)}\right|$, причем оценка будет меньше);
$$\psi(x, y) = \psi_h(x, y) = \\ = \int_0^1 \ldots \int_0^1 \frac{\partial^k}{\partial t_1 \ldots \partial t_k} \left(f(x + h_1 t_1 + h_3 t_2 + \ldots + h_{2k-1} t_k, y + h_2 t_1 + \right. \\ \left. + h_4 t_2 + \ldots + h_{2k} t_k)\right) dt_1 \ldots dt_k;$$
суммирование по $x$, $y$ проводится по области $D_h$ такой, что при $0 \leqslant t_i \leqslant 1$
$$x_h = x + \sum_{i=1}^{k} h_{2i-1} t_i \quad \text{и} \quad y_h = y + \sum_{i=1}^{k} h_{2i} t_i$$
принадлежат области $D$; $F^2 q^{2^{-1}} < N^{k+2}$. Заметим, что подобласть $D_h$, в которой $\beta_1 \leqslant x/y - \alpha \leqslant \beta_2$, имеет вид $\Omega$, а также при $n \geqslant 2$, $\zeta = \sum\limits_{i=1}^{k} h_{2i-1} t_i^0$, $\eta = \sum\limits_{i=1}^{k} h_{2i} t_i^0$ и $\theta = (x+\zeta)\cdot(y+\eta)^{-1}$ имеем:

(3) $$\frac{d^n \psi(x, y)}{dx^n} = \\ = \frac{d^n}{dx^n}\left(\int_0^1 \ldots \int_0^1 \frac{\partial^k}{\partial t_1 \ldots \partial t_k} \left(f(x + h_1 t_1 + \ldots + h_{2k-1} t_k, y + h_2 t_1 + \ldots + h_{2k} t_k)\right) \times \right. \\ \left. \times dt_1 \ldots dt_k\right) = h_1 h_3 \ldots h_{2k-1} \frac{\partial^{k+n} f(x+\zeta, y+\eta)}{\partial x^{k+n}} +$$

$$+(h_2h_3h_5\ldots h_{2k-1}+\ldots+h_1h_3\ldots h_{2k-3}h_{2k})\frac{\partial^{k+n}f(x+\zeta,y+\eta)}{\partial x^{k+n-1}\partial y}+$$

$$+\ldots+h_2h_4\ldots h_{2k}\frac{\partial^{k+n}f(x+\zeta,y+\eta)}{\partial x^n\partial y^k}=$$

$$=\frac{H_2f(x+\zeta,y+\eta)}{(x+\zeta)^{k+n}}\varphi_{n-2,0,1}(\theta)+O(FQ_1\Delta X^{-k-n}).$$

Аналогично,

$$\frac{\partial^n\psi(x,y)}{\partial x^l\partial y^{n-l}}=\frac{H_2f(x+\zeta,y+\eta)}{(x+\zeta)^{l+k}(y+\eta)^{n-l}}\varphi_{l-1,n-l-1,4}(\theta)+$$

$$+O(FQ_1\Delta Y^{l-n}X^{-k-l}),\qquad 1\leqslant l\leqslant n-1; \tag{4}$$

$$\frac{\partial^n\psi(x,y)}{\partial y^n}=\frac{H_2f(x+\zeta,y+\eta)}{(x+\zeta)^k(y+\eta)^n}\varphi_{0,n-2,2}(\theta)+O\left(\frac{FQ_1\Delta}{X^kY^n}\right),\qquad n\geqslant 2,$$

а из показанного в лемме III и (3)–(4) следует, что

$$L_5\big(\psi(x,y)\big)\cdot\big(\psi''_{x^2}(x,y)\big)^{-2}=\big(H_2f(x+\zeta,y+\eta)\cdot(x+\zeta)^{-k}\big)^{10}\varphi_1(\theta)\times$$

$$\times(x+\zeta)^{-14}(y+\eta)^{-9}+O\left(\left(\frac{FQ_1}{X^k}\right)^{10}\Delta X^{-14}Y^{-9}\right);$$

аналогично,

$$\frac{L_5''\big(\psi(y,x)\big)}{\big(\varphi''_{y^2}(x,y)\big)^2}=\left(\frac{H_2f(x+\zeta,y+\eta)}{(x+\zeta)^k}\right)^{10}\varphi_2(\theta)(x+\zeta)^{-9}+(y+\eta)^{-14}+$$

$$+O\left(\left(\frac{FQ_1}{X^k}\right)^{10}\Delta X^{-9}Y^{-14}\right). \tag{5}$$

Пусть $\varphi_i(\theta_i^j)=0$ $(j=1,2,\ldots)$ и $\varphi_{a_1,a_2,i}(\theta^j_{a_1,a_2,i})=0$ $(j=1,2,\ldots)$.

Разобьем $D_h$ на $O(1)$ подобластей таких, что

$$\left|\frac{x}{y}-\theta^j_{0,0,i}\right|\leqslant\left|\frac{x}{y}-\theta^{j+1}_{0,0,i}\right|\leqslant\frac{\varepsilon X}{Y}\qquad(i=1,2,3;\ j=1,2,\ldots,j_i-1),$$

$$\left|\frac{x}{y}-\theta^j_i\right|\leqslant\left|\frac{x}{y}-\theta^{j+1}_i\right|\leqslant\frac{\varepsilon X}{Y}\qquad(i=1,2;\ j=1,2,\ldots,p_i-1),$$

но

$$\left|\frac{x}{y}-\theta^j_{0,0,i}\right|\geqslant\frac{\varepsilon X}{Y}\qquad(i=1,2,3;\ j>j_i)$$

и

$$\left|\frac{x}{y}-\theta^j_i\right|\geqslant\frac{\varepsilon X}{Y}\qquad(i=1,2;\ j>p_i).$$



Каждую из полученных после разбиения областей можно разбить на $O(1)$ подобластей типа $\Omega$.

Возьмем одну из подобластей указанного выше вида, $D_h^1$, и рассмотрим три случая.

Заметим, что при $k=1$ возможен лишь случай 1.

I. $j_1+j_2+j_3+p_1+p_2\leqslant 1$.

1) Пусть вначале $j_1=j_3=p_1=0$. Из (3)–(5) имеем: если $(H_2/Q_2)^{12}\geqslant\Delta$, то

$$\left(\frac{FQ_1}{X^k}\right)^{12}(NX)^{-9}\geqslant L_5\big(\psi(x_n(y),y)-nx_n(y)\big)\geqslant\left(\frac{FH_2}{Y^k}\right)^{12}(NX)^{-9};$$

если $(H_2/Q_2)^2\geqslant\Delta$, то

$$\left(\frac{FQ_1}{X^k}\right)^2\frac{1}{N^2}\geqslant\left|\frac{\partial^2\psi(x,y)}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2\psi(x,y)}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2\psi(x,y)}{\partial x\partial y}\right)^{12}\right|\geqslant\left(\frac{FH_2}{Y^k}\right)^2\frac{1}{N^2};$$

если $H_2/Q_2\geqslant\Delta$, то

$$\frac{FQ_1}{X^{k+2}}\ll\left|\frac{\partial^2\psi(x,y)}{\partial x^2}\right|\ll\frac{FH_2}{Y^kX^2}.$$

Разобьем область $D_h^1$ на подобласти типа $\Omega$, в которых $\partial^2\psi(x,y)/\partial x^2$ не меняет знак.

Применив лемму II, получим: при $(H_2/Q_2)^2\geqslant\Delta\geqslant(H_2/Q_2)^{12}$

$$S_1=\sum_{x,y\in D_h^1}e^{2\pi i\psi(x,y)}\ll\ln^2N\left(F\sqrt{\frac{Q}{N^k}}+\frac{YQ_2}{H_2}+N\sqrt{\frac{Y^k}{H_2F}}+Y\ln^2N\right),$$

а при $H_2/Q_2\geqslant\Delta\geqslant(H_2/Q_2)^2$

$$\sum_{x,y\in D_h^1}e^{2\pi i\psi(x,y)}\ll\ln N\left(N\sqrt{\frac{FQ_1}{X^{k+2}}}+Y\sqrt{\frac{X^2Y^k}{H_2F}}+Y\ln^2N\right).$$

Если же $(H_2/Q_2)^{12}\geqslant\Delta$, то, применив лемму III с $l=5$, $F_1=F\sqrt{Q\cdot N^{-k}}$, $a_1=a_2=a_3=\varepsilon$, получим:

$$\sum_{x,y\in D_h^1}e^{2\pi i\psi(x,y)}\gg\frac{Q_2}{H_2}Y\ln^2N+\ln^5N\sqrt{\frac{FQ_2}{H_2}\sqrt{\frac{Q}{N^k}}}+Y\ln^2N+$$

$$+\sqrt{\frac{Q_2N^2\ln^2N}{H_2F\sqrt{Q/N^k}}}+\left(\frac{Q_2}{H_2}\right)^{3/4}X^{-1/6}\left(\frac{F}{N}\sqrt{\frac{Q}{N^k}}\right)^{13/15}N^{31/30}\ln^3N+$$

$$+\left(\frac{Q_2}{H_2}\right)^{3/4}\left(\frac{F}{N}\sqrt{\frac{Q}{N^k}}\right)^{121/120}X^{1/24}N^{29/30}\ln^3N.$$

Итак,

$$S_1=\frac{1}{Q}\Bigl(\sum_{\frac{H_2}{Q_2}\ll\Delta}+\sum_{\Delta\ll\left|\frac{H_2}{Q_2}\right|\ll\sqrt{\Delta}}+\sum_{\sqrt{\Delta}\ll\left|\frac{H_2}{Q_2}\right|\ll\Delta^{1/12}}+\sum_{\left|\frac{H_2}{Q_2}\right|\gg\Delta^{1/12}}\Bigr)\sum_{x,y\in D_h^1}e^{2\pi i\psi(x,y)}\ll$$

$$\ll N\Delta\ln^{k-1}N+\Delta^{1/12}F\sqrt{\frac{Q}{N^k}}\ln^{k+2}N+X\ln^{k+2}N+N\ln^k N\cdot\sqrt[4]{\frac{F^2Q\Delta^2}{Y^4N^k}}+$$

$$+\sqrt[4]{\frac{F^2Q}{N^k}}\ln^5 N+\sqrt[4]{\frac{N^{4+k}\ln^4 N}{F^2Q}}+Y^{-1/6}\Bigl(\frac{F^2Q}{N^{k+2}}\Bigr)^{13/30}N^{31/30}\ln^3 N+$$

$$+X^{1/24}N^{29/30}\Bigl(\frac{F^2Q}{N^{k+2}}\Bigr)^{121/240}\ln^3 N=R_1.$$

2) Если $j_2=j_3=p_2=0$, то подобно предыдущему имеем:

$$S_1=\frac{1}{Q}\sum_h\sum_{y,x\in D_h^1}e^{2\pi i\psi(x,y)}\ll R_1.$$

3) Если же $j_3=1$, то для всех точек из $D_h^1$ таких, что $|x/y-\theta_{0,0,3}^1|<1/Y$ имеем:

$$S_1\ll\frac{1}{Q}\sum_h\sum_y 1\ll Y.$$

Все остальные точки разбиваем на $O(\ln N)$ подобластей вида

$$\varepsilon_1\frac{X}{Y}<\left|\frac{x}{y}-\theta_{0,0,3}^1\right|\leqslant 2\varepsilon_1\frac{X}{Y}.$$

Применив подобно предыдущему леммы II и III, получим:

$$S_1\ll\Bigl(R_1+\frac{1}{Q}\sum_h\ln^2 N\cdot\min_{\varepsilon_1}\Bigl\{\frac{Q_2Y}{H_2\sqrt{\varepsilon_1}};\,N\varepsilon_1\sqrt[4]{\frac{F^2Q}{N^{k+2}}}\Bigr\}\Bigr)\ln N\ll$$

$$\ll R_1\ln N+\sqrt[12]{\frac{F^2Q}{N^{k-6}}}\ln^3 N.$$

II. $j_1+j_2+j_3\leqslant 1$, $j_1+j_2+j_3+p_1+p_2\geqslant 2$.

Разобьем $D_h^1$ на подобласти, имеющие вид

$$(6)\quad \begin{aligned}&\varepsilon_{ij}\frac{X}{Y}<\left|\frac{x}{y}-\theta_{0,0,i}^j\right|\leqslant 2\varepsilon_{ij}\frac{X}{Y}\quad(i=1,2,3;\ j=1,2,\ldots,j_i),\\ &\varepsilon\frac{X}{Y}<\left|\frac{x}{y}-\theta_i^j\right|\leqslant 2\varepsilon_i^j\frac{X}{Y}\quad(i=1,2;\ j=1,2,\ldots,p_i;\\ &\qquad\qquad j\neq j_{i,1};\ j\neq j_{i,2};\ \ldots;\ j\neq j_{i,14}).\end{aligned}$$



Пусть например $p_i\geqslant 1$ $(i=1,2)$, $j_3=1$, $\varepsilon_1^1\ll\varepsilon_2^1$. Из условий теоремы следует, что

$$(7)\quad R\bigl(\varphi_i(x),\varphi_i^{(j)}(x)\bigr)=f_{ij}(x_1,\ldots,x_k)\ll\varepsilon_{ij}\tilde f_{ij}(x_1,\ldots,x_k)$$

$$(i=1,2;\ j=1,2,\ldots,p_i;\ j\neq j_{i,1};\ldots;\ j\neq j_{i,14});$$

$$f_1(x_1,\ldots,x_k)\ll(\varepsilon_1^1+\varepsilon_2^1)\tilde f_1(x_1,\ldots,x_k);$$

$$f_{3,1}(x_1,\ldots,x_k)\ll(\varepsilon_1^1+\varepsilon_{0,3})\tilde f_{3,1}(x_1,\ldots,x_k)$$

и что областей указанного вида не более чем $O(\ln^k N)$. Обозначим через $n$ число неравенств в системе (7). Применив лемму IV, разобьем область, определяемую неравенствами (7), на подобласти. Возьмем одну из них. В ней

$$\frac{1}{Q}\sum_h\Bigl(\frac{Q_2}{H_2}\Bigr)^{\alpha}\ll(\ln q)^k\Bigl(\prod_{i,j}\varepsilon_i^j+\frac{1}{q^2}\sqrt{\frac{Y}{X}}\Bigr)\beta^{1-\alpha}.$$

Если $\prod_{i,j}\varepsilon_i^j\ll\frac{1}{q^2}\sqrt{\frac{Y}{X}}$, то, применив лемму II, подобно I. 3) получим

$$S_1\ll R_1\ln^k N+\sqrt[12]{\frac{F^2Q}{N^{k-6}}}\ln^{k+2}N+\frac{\ln^{k+2}N}{q^2}\sqrt{\frac{F^2Q}{N^k}}=R_0.$$

Если же $\prod_{i,j}\varepsilon_i^j\geqslant\frac{1}{q^2}\sqrt{\frac{Y}{X}}$, то, подобно I.1) применив леммы II и III, получим: $S_1\ll R_0$.

Если $j_3=0$, то подобно предыдущему составим систему неравенств, подобную системе (6). Если $n>2$, то, применив лемму IV покажем подобно предыдущему, что $S_1\ll R_0$.

Если же $n=2$, то при $k\geqslant 3$ применим лемму V, а при $k=2$ применим лемму IV и получим аналогичную оценку.

III. $j_1+j_2+j_3\geqslant 2$. Разобьем $D_h^1$ на подобласти, имеющие вид

$$\varepsilon_{l,n,i}^j\frac{X}{Y}<\left|\frac{x}{y}-\theta_{l-n,n,i}^j\right|\leqslant 2\varepsilon_{l,n,i}^j\frac{X}{Y}$$

$$(l=1,2,\ldots,l_0-1;\ n=0,1,\ldots,l;\ i=1,2,3;$$

$$j=1,2,\ldots,j_{nli};\ \sum_{i=1}^{3}j_{lni}\geqslant 2),$$

$$(8)\quad \varepsilon_{0,0,i}^j\frac{X}{Y}<\left|\frac{x}{y}-\theta_{0,0,i}^j\right|\leqslant 2\varepsilon_{0,0,i}^j\frac{X}{Y}$$

$$(i=1,2;\ j=1,2,\ldots,j_i),$$

$$\varepsilon_{0,0,3}^{j}\frac{X}{Y}<\left|\frac{x}{y}-\theta_{0,0,3}^{j}\right|\leqslant 2\varepsilon_{0,0,3}^{j}\frac{X}{Y}$$

$$(j=1,2,\ldots,j_3;\ j\neq j_0 \text{ при } j_1+j_2+j_3\geqslant 3),$$

но

$$\left|\frac{x}{y}-\theta_{l-n,n,i}^{j}\right|\geqslant\varepsilon\frac{X}{Y}$$

$$(l=0,1,\ldots,l_0-1;\ n=0,1,\ldots,l;\ i=1,2,3;\ j=j_{lni}+1,\ldots,2k),$$

и

$$\left|\frac{x}{y}-\theta_{l_0-n_0,n_0,i}^{j}\right|\geqslant\varepsilon\frac{X}{Y}$$

$$(0\leqslant n_0\leqslant l_0;\ i=1,2,3;\ j=j_{i1},j_{i1}+1,\ldots,2k,\ j_{i1}+j_{i2}+j_{i3}\leqslant 4).$$

Пусть

$$\varepsilon_{l,n,i}^{j}\leqslant\varepsilon_{l,n,i}^{j+1}\quad(l=0,1,\ldots,l_0-1;\ n=0,1,\ldots,l;\ i=1,2,3;$$
$$j=1,2,\ldots,j_{lni}-1).$$

Разобьем согласно лемме IV подобласть области $D_h^1$ определяемую неравенствами (8), на подобласти, в каждой из которых

$$\frac{1}{Q}\sum_{h}\left(\frac{Q_2}{H_2}\right)^{a}\ll\min\{\beta^{1-a}\ln^k q;\ \ln^{k[a]}q\}\prod_{l,n,i,j}\left(\varepsilon_{l,n,i}^{j}+\sqrt{\frac{Y}{X}}\,q^{-2^{k-k_{lnij}}}\right).$$

Рассмотрим одну из них. Пусть при $l\leqslant l_0$ (причем $l$ — наименьшее) существует $n$ такое, что, если $|l-l'|+|n-n'|>0$, то

$$\varepsilon_{l,n,i}^{j}\geqslant\sqrt{\frac{Y}{X}\,q^{-2^{k-k_{lnij}}}}\qquad(i=1,2,3;\ j=1,2,\ldots,j_{lni}-1;\ j\neq j_{lni}^{0}),$$

или, если $l'>0$, $l=l'$ и $n=n'$, то

$$\varepsilon_{l',n',i}^{j}\geqslant\sqrt{\frac{Y}{X}\,q^{-2^{k-k_{l',n',i,j}}}}\qquad(i=1,2,3;\ i\neq i';\ j=1,2,\ldots,j_{l',n',i}-1)$$

и

$$\varepsilon_{l',n',i'}^{j}\geqslant\sqrt{\frac{Y}{X}\,q^{-2^{k-k_{l',n',i',j}}}}\qquad(j=2,3,\ldots,j_{l',n',i'}-1).$$

Возможны следующие случаи: 1) $l\geqslant 2$; 2) $l\leqslant 1$.

1) Применив $l$ раз лемму VII, получим:

$$S_1\ll\frac{N}{\sqrt{q_0}}+N\sqrt{\frac{1}{Nq^{2^{l-1}}}\sum_{|h_1^1|=1}^{q_0-1}\ \sum_{|h_2^1|=1}^{q_0^2-1}\cdots\sum_{|h_l^1|=1}^{q_0^{2^{l-1}}-1}\left|\sum_{x,y}e^{2\pi i\varphi(x,y)}\right|}\tag{9}$$



где

$$\varphi(x,y)=\varphi_{h_1^1,\ldots,h_l^1}(x,y)=\int_0^1\cdots\int_0^1\frac{\partial^l}{\partial u_1\ldots\partial u_l}\big(\psi(x+u_1h_1+$$
$$+\ldots+u_{l-n}h_{l-1}^1,\ y+u_{l-n+1}h_{l-n+1}^1+\ldots+u_lh_l^1)\big)\,du_1\ldots du_l=$$
$$=h_1^1\ldots h_l^1\frac{\partial^l}{\partial x^{l-n}\partial y^n}\big(\psi(x+\zeta_1,\ y+\eta_1)\big);$$

$$\zeta_1=\sum_{i=1}^{l-n}u_i^0h_i^1;\qquad \eta_1=\sum_{i=l-n+1}^{l}u_i^0h_i^1.$$

Подобно предыдущему,

$$S_1\ll R_0+N\Big(\prod_{l,n,i,j}q^{-2^{k-k_{l,n,i,j}-1}}\Big)\Big(N^{-\frac{1}{3}\cdot 2^{-l}}+(F^2Q_1N^{-k-l-2})^{\frac{1}{6\cdot 2^l-4}}\Big)\ln^{k+1}N\ll$$

$$\ll R_0+N\cdot q^{-a\cdot 2^{k-a}}\Big(N^{-\frac{1}{3}\cdot 2^{-l}}+(F^2Q_1N^{-k-l-2})^{\frac{1}{6\cdot 2^l-4}}\Big)\ln^{k+1}N,$$

т.к.

$$\sum_{l,n,i,j}2^{k-k_{l,n,i,j}}\geqslant a\cdot 2^{k-a}.$$

2) Если $l\leqslant 1$, то подобно предыдущему можно показать, что

$$S_1\ll N\ln^{k+2}N\cdot\left(\sqrt[8]{\frac{F^2Q}{N^{k+3}}}+N^{-1/6}\right)\left(\frac{1}{q^2}+\frac{k-1}{q^{2^{k-2}}}+\frac{\prod_{i=1}^{4}(k-i)}{q}\right)+R_0\ln^kN.$$

Итак, при $N^{1/2}\leqslant X\leqslant(N^{13k+17+28\cdot 2^k}F^{-26})^{1/(56\cdot 2^k-21)}$, применив лемму VI, получим:

$$\left(\frac{S}{N}\right)^{2^k}\ll\left(\Delta+\frac{\ln N}{N^{1/3}}+\left(\frac{1}{N^5Y}\right)^{\frac{5}{82}}\ln^2N+\frac{\prod_{i=1}^{3}(k-i)}{N^{1/6}}+\frac{\prod_{i=1}^{5}(k-i)}{N^{\frac{1}{3}\cdot 2^{-l}}}\times\right.\tag{10}$$
$$\times\left(\frac{F^2}{N^{k+2-\frac{2}{3}\cdot 2^{-l}}}\right)^{\frac{a\cdot 2^{k-a}}{2^k+2a\cdot 2^{k-a}-5}}\cdot\ln^{2k}N+\left(\frac{F^{12}\Delta}{N^{6k+12}}\right)^{\frac{2^{k-1}}{12\cdot 2^k-6}}\ln^{k+2}N+$$
$$+\left(\frac{F^2\Delta^2}{N^{k+2}}\right)^{\frac{2^{k-1}}{3\cdot 2^k-1}}\ln^{2k-2}N+\left(\frac{F^{52}}{N^{26k+55}}\right)^{\frac{2^{k-1}}{56\cdot 2^k-21}}\ln^{2k-2}N+$$
$$+\left(\frac{F^{947\cdot 2^{k+4}-5342}}{N^{847\cdot 2^{k+3}-2671k+3430\cdot 2^{k+2}-5420}}\right)^{\frac{2^{k-1}}{(241\cdot 2^k-121)(56\cdot 2^k-21)}}\times$$
$$\times\ln^{k+2}N+(k-1)(k-2)\cdot\left(\frac{F^2}{N^{k+2}}\right)^{\frac{2^{k-1}}{2^{k+1}-5}}\ln^kN.$$

Если

$$(N^{13k+17+28\cdot 2^k}F^{-26})^{\frac{1}{26\cdot 2^k-21}} \leqslant X \leqslant (F^{82\cdot 2^k}N^{8\cdot 2^k-60})^{\frac{1}{82k\cdot 2^k+15\cdot 2^k-10}},$$

то, применив лемму VII, затем (10) с

$$k_1 = k-1,\ l_1 \geqslant 2,\ m_1+1 = \frac{l_1(l_1+5)-2}{2} \leqslant k_1,\ a_1 = \left[\frac{k-2}{m_1}\right],$$
$$b_1 = (a_1+1)m_1-k+1,\ a_1 = 1-2^{-b_1-2}-2^{-m_1-1},$$

а затем лемму VI, получим аналогичную оценку.

Если

$$(F^{82\cdot 2^k}N^{8\cdot 2^k-60})^{\frac{1}{82k\cdot 2^k+15\cdot 2^k-10}} \leqslant X \leqslant F^{\frac{2^{k+1}-1}{2k\cdot 2^k-2^k+4-k-2^{1-k}}},$$

то применим $k$ раз лемму VII с $q_i = q^{2^{i-1}}$ $(i = 1, \ldots, k)$ и затем лемму II. Если же $X > F^{\frac{2^{k+1}-1}{2k\cdot 2^k-2^k+4-k-2^{1-k}}}$, то, применив лемму I, покажем справедливость теоремы.

**§ 3. Следствия.**

Следствие 1.

$$\Delta(R) \ll R^{\frac{346}{1067}}\ln^{\frac{211}{100}}R.$$

Доказательство. Известно (см., например, [2], стр. 316), что

$$\Delta(R) \ll \frac{R}{V}+\frac{R}{V^{3/2}}\left|\sum_{xy\leqslant V^2/R} e^{2\pi i\sqrt{Rxy}}\right| \leqslant \frac{R}{V}+\frac{R\ln^2 R}{V^{3/2}}\left|\sum_{x,y}{}' e^{2\pi i\sqrt{Rxy}}\right|,$$

где суммирование по $x, y$ проводится по $X \leqslant x \leqslant X_1 \leqslant 2X$, $Y \leqslant y \leqslant Y_1 \leqslant 2Y$, $xy \leqslant V^2/R$, а $\left|\sum_{x,y}{}' e^{2\pi i\sqrt{Rxy}}\right|$ — наибольшая. Пусть $V = R^{\frac{721}{1067}}\ln^{-\frac{211}{100}}R$. Т. к. $f(x, y) = \sqrt{Rxy}$ удовлетворяет условиям теоремы с $k = 3$, $X\cdot Y = N \ll V^2/R = R^{\frac{375}{1067}}\ln^{-\frac{211}{50}}R$, $F = \sqrt{RN}$, $\Delta = 0$, $N^\beta = N^4R^{-1}$, то $\Delta(R) \ll R/V = R^{\frac{346}{1067}}\ln^{\frac{211}{100}}R$.

Следствие 2.

$$\zeta(\tfrac{1}{2}+it) \ll t^{\frac{173}{1067}}\ln^{\frac{331}{200}}t.$$

Доказательство. Известно, что

$$\zeta(\tfrac{1}{2}+it) \ll \left|\sum_{x\leqslant\sqrt{t}} x^{-\frac{1}{2}-it}\right|+1 \ll \ln t\cdot\left|\sum_{X\leqslant x\leqslant X_1\leqslant 2X} x^{-\frac{1}{2}-it}\right|+1,$$



где $X \ll \sqrt{t}$ (см., например, [2], стр. 82). Применим преобразование Абеля:

$$\zeta(\tfrac{1}{2}+it) \ll \frac{\ln t}{\sqrt{X}}\left|\sum_{X\leqslant x\leqslant X_1} x^{-it}\right|+1.$$

Оценим $S = \sum_{X\leqslant x\leqslant X_1} x^{-it}$. Если $X < t^{2/5}$, то из леммы I с $k = 4$, $r = t/X^4$ получим, что

$$\frac{S\ln t}{\sqrt{X}} \ll \ln t\left(\sqrt{X}\sqrt[14]{\frac{t}{X^4}}+X^{1/4}\sqrt[14]{\frac{X^4}{t}}\right) \ll t^{\frac{173}{1067}}.$$

Пусть $X > t^{2/5}$. Применив лемму VII с $q = [X\cdot t^{-\frac{346}{1067}}\ln^{-\frac{131}{100}}t]$ и преобразование Абеля, получим:

$$S^2 \ll \frac{X^2}{q}+\frac{X}{q^2}\sum_{h=1}^{q-1}(q-h)\sum_{X\leqslant x,\, x+h\leqslant X_1} e^{-it\ln\frac{x+h}{x}} \ll$$
$$\ll \frac{X^2}{q}+\frac{X\ln X}{q}\left|\sum_{x,y} e^{-it\ln\frac{x+y}{x}}\right|,$$

где суммирование проводится по области $Y \leqslant y \leqslant Y_1 \leqslant 2Y < q$, $X \leqslant x \leqslant X_1-y$. Если $Y < Xt^{-4/11}$, то, применив лемму I с $k = 3$, $r = tY/X^4$, получим:

$$S^2 \ll \frac{X^2}{q}+\frac{X\ln X}{q}Y\left|\sum_{x} e^{-it\ln\frac{x+y_0}{x}}\right| \ll \frac{X^2}{q}.$$

Если же $Y \geqslant Xt^{-4/11}$, то, применив лемму 1, получим (подобно [2], ст. 117–118):

$$S^2 \ll \frac{X^2}{q}+\frac{X\ln t}{q}\left(\sum_{n,y}\sqrt{\frac{x_n^2(x_n+y)^2}{ty(y+2x_n)}}\,e^{2\pi i f(n,y)}+Y\sqrt{\frac{X^3}{tY}}+Y\ln^2 t\right) \ll$$
$$\ll \frac{X^2}{q}+\sqrt{\frac{X^5}{qt}}\ln t+X\ln^5 t+\sqrt{\frac{X^5}{tYq^2}}\ln t\left|\sum_{n,y} e^{2\pi i f(n,y)}\right|.$$

Здесь

$$f(n, y) = -\frac{t}{2\pi}\ln\frac{x_n+y}{x_n}-nx_n, \quad \text{где } \frac{ty}{2\pi x_n(x_n+y)} = n,$$

а суммирование по $y, n$ проводится по области

$$Y \leqslant y \leqslant Y_1, \quad \frac{ty}{2\pi X_1(X_1+y)} \leqslant n \leqslant \frac{ty}{2\pi X(X+y)}.$$

Легко убедиться, что при $Y \geqslant Xt^{-4/11}$ $f(n, y)$ удовлетворяет условиям теоремы с

$$F = \frac{tY}{X}, \quad \Delta = \frac{Y}{X}, \quad k = 3, \quad N = \frac{tY^2}{X^2}, \quad N^\beta = \frac{N^4}{t} = \frac{t^3Y^8}{X^8},$$

поэтому

$$S^2 \ll X^2/q = Xt^{\frac{346}{1067}}\ln^{\frac{331}{100}} t.$$

Значит,

$$\zeta(\tfrac{1}{2}+it) \ll t^{\frac{173}{1067}}\ln^{\frac{331}{200}} t.$$

#### Литература


[1] Хуа Ло-ген, *Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел*, Москва 1964.

[2] Е. К. Титчмарш, *Теория дзета-функции Римана*, Москва 1953.

[3] W. Haneke, *Verschärfung der Abschätzung von* $\zeta(\frac{1}{2}+it)$, Acta Arith. 8 (1963), стр. 357–430.

[4] Чень Цзин-жунь, *On the order of* $\zeta(\frac{1}{2}+it)$, Acta Math. Sinica, 15 (2) (1965), стр. 159–173.

[5] Г. А. Колесник, *Улучшение остаточного члена в проблеме делителей*, Математические заметки 6 (5) (1969), стр. 549–558.

[6] S. H. Min, *On the order of* $\zeta(\frac{1}{2}+it)$, Trans. Amer. Math. Soc. 65 (3) (1949), стр. 448–472.

[7] Г. А. Колесник, *О распределении простых чисел в последовательностях вида* $[n^c]$, Математические заметки 2 (2) (1967), стр. 117–128.


*Получено 5. 8. 1971* (203)

ACTA ARITHMETICA
XXV (1973)

# On characters and polynomials

by

J. B. Friedlander (University Park, Penn.)

**1. Introduction.** In two recent papers ([4], [5]) results of Burgess [1] were generalized to obtain estimates for character sums in algebraic number fields. It is the purpose of this paper to discuss some further applications of these results.

Particular attention is paid to problems concerning quadratic non-residues and primitive roots occurring in the values of polynomials. One such problem is the following.

Let $m$ be a rational integer (positive or negative) which is not a perfect square. Let $\varepsilon > 0$ be fixed. Let $p$ denote an odd prime and let $\pi$ denote the set of primes $p$ such that $x^2 - m \equiv 0 \pmod p$ is irreducible. Let $g_2(m, p)$ be the smallest positive $x$ such that $x^2 - m$ is a quadratic non-residue $(\mathrm{mod}\ p)$.

Burgess [3] obtained the following estimates.

A. $g_2(m, p) \ll p^{2/3\sqrt{e}+\varepsilon}$.

B. For $p \in \pi$, $g_2(m, p) \ll p^{1/2\sqrt{e}+\varepsilon}$

(The implied constants depend on $m$ and $\varepsilon$.)

One of the results of this paper is the removal of the restriction $p \in \pi$ in B. This is accomplished by considering character sums of composite modulus in quadratic fields.

In [2], Burgess obtains estimates for various characters of composite modulus and uses these to derive estimates for $L$-series. Such a program seems quite feasible for algebraic number fields but, for our purposes, it suffices to consider a particularly simple case.

**2.** Lemma 1. *Let $K$ be an algebraic number field of degree $n$. Let $\alpha \in \mathfrak{O}$, the ring of integers of $K$. Let $p$ be a prime of the $n$-th degree in $K$ and $d$ a positive rational integer dividing $p-1$. Then,*

$$\alpha^{(p^n-1)/d} \equiv 1 \pmod p \Leftrightarrow (N\alpha)^{(p-1)/d} \equiv 1 \pmod p$$

*where $N\alpha$ is the norm of $\alpha$ in $K$. In particular, if $\alpha$ is a primitive root* (mod $p$) *in $\mathfrak{O}$, then $N\alpha$ is a primitive root* (mod $p$) *in $Z$ (the rational integers). Also, $\alpha$*