ACTA ARITHMETICA
XXIV (1974)

# О периодах эллиптических функций

Н. И. Фельдман (Москва)

В 1932 г. К. Л. Зигель ввел эллиптическую функцию Вейерштрасса $\wp(z)$ в множество объектов, рассматриваемых в теории трансцендентных чисел. В работе [1] он доказал, что хотя бы один из основных периодов $\omega_1$, $\omega_2$ функции $\wp(z)$ при алгебраических инвариантах будет трансцендентным числом. Позднее, Т. Шнейдер [2]–[4] доказал, что при алгебраических инвариантах оба периода $\omega_1$ и $\omega_2$ трансцендентны и что отношение $\omega_1/\omega_2$ трансцендентно, или является квадратичной иррациональностью. Задача о приближении периодов алгебраическими числами рассматривалась в работах [5] и [6], а А. Бейкер [7] доказал, что при алгебраических $a_1$ и $a_2$ линейная форма $a_1\omega_1+a_2\omega_2$ или трансцендентное число, или нуль. В работе [8] А. Бейкер доказал, что если $a_0\neq 0$, $a_1$ и $a_2$ — алгебраические числа, то справедливо неравенство

$$|a_0+a_1\omega_1+a_2\omega_2| > C_0\exp(-\ln^{\varkappa}H),$$

где $H$ — максимум высот $a_0, a_1, a_2$; $\varkappa$ — эффективная абсолютная постоянная, а положительное эффективное $C_0$ зависит лишь от $\omega_1$, $\omega_2$ и степени поля $Q(a_0, a_1, a_2)$. Постоянную $\varkappa$ Бейкер не вычисляет, а отмечает лишь, что это „большое число" (см. [8], стр. 619). Периодам $\wp(z)$ посвящены и работы Д. Коатса [9] и [10].

Символом $L(\theta)=L(P)$ будем обозначать сумму модулей коэффициентов многочлена $P(z)$, определяющего алгебраическое число $\theta$.

В настоящей работе получена

Теорема 1. *Пусть инварианты $\wp(z)$ — алгебраические числа, $\beta$ — алгебраическое, $L=L(\beta)$, $\eta=\omega_1/\omega_2$, $\eta-\beta\neq 0$, $n$ — степень поля $K=Q(\beta, \wp(\omega_1/2), \wp(\omega_2/2), \wp''(\omega_1/2), \wp''(\omega_2/2))$. Тогда*

$$|\eta-\beta| > \exp\big(-\max(n\lambda^{11}M^3, \Lambda)\big), \tag{1}$$
$$M=[\ln L+n\ln n+n\ln\ln(L+1)+n\lambda],$$

*где эффективные постоянные $\lambda$ и $\Lambda$ зависят лишь от $\omega_1$ и $\omega_2$.*

Из теоремы 1 непосредственно следует

Теорема 2. *Пусть инварианты* $\wp(z)$ — *алгебраические числа,* $\alpha_1$ *и* $\alpha_2$ — *алгебраические,* $\alpha_1\omega_1+\alpha_2\omega_2 \neq 0$, $n$ — *степень поля* $K = \mathbf{Q}\big(\alpha_1, \alpha_2, \wp(\omega_1/2), \wp(\omega_2/2), \wp''(\omega_1/2), \wp''(\omega_2/2)\big)$. *Тогда*

$$(2) \qquad |\alpha_1\omega_1+\alpha_2\omega_2| > \exp\big(-\max(n\lambda^{11}M_0^3, \Lambda)-M_0\big),$$
$$M_0 = [\ln L_0 + n\ln n + n\ln\ln(L_0+1) + n\lambda],$$

*где эффективные постоянные* $\lambda$ *и* $\Lambda$ *зависят лишь от* $\omega_1$ *и* $\omega_2$, *а*

$$L_0 = \exp\left(n\ln 2 + \frac{n}{n_1}\ln L(\alpha_1) + \frac{n}{n_2}\ln L(\alpha_2)\right),$$

$n_1$ *и* $n_2$ — *степени* $\alpha_1$ *и* $\alpha_2$.

**§ 1.** Символами $\gamma, \gamma_0, \gamma_1, \ldots$ будем обозначать положительные эффективные постоянные, которые могут зависеть лишь от $\wp(z)$.

Лемма 1 (см. [5], лемма 2). *Если* $m$ *натуральное, то*

$$(3) \qquad \frac{d^s}{dz^s}\big(\wp^m(z)\big) = \sum_{2a+3b+4c=s+2m} \gamma^{s,m}_{a,b,c}\wp(z)^a\wp'(z)^b\wp''(z)^c,$$

*где* $a$, $b$, $c$, $\gamma^{s,m}_{a,b,c}$ — *целые неотрицательные, причем*

$$(4) \qquad \sum_{2a+3b+4c=s+2m} \gamma^{s,m}_{a,b,c} \leqslant s!\,2^m e^{\gamma s}.$$

Лемма 2 (см. [11], лемма 1). *Пусть* $X$ *натуральное,* $a_{ij}$ *вещественные,*

$$\sum_{j=1}^{t}|a_{ij}| \leqslant A, \quad i = 1, \ldots, r; \; r < t.$$

*Существует нетривиальный набор целых рациональных* $x_1, \ldots, x_t$, *для которых выполняются неравенства*

$$(5) \qquad \begin{cases} |a_{i1}x_1 + \ldots + a_{it}x_t| < 2AX\big((X+1)^{t/r}-2\big)^{-1}, & i = 1, \ldots, r, \\ |x_j| \leqslant X, \quad j = 1, \ldots, t. \end{cases}$$

Лемма 3 (см. [11], лемма 2). *Если* $\zeta_1, \ldots, \zeta_\nu$ — *алгебраические,* $n_k$ — *степень* $\zeta_k$, $L(\zeta_k) = L_k$, $n$ — *степень поля* $\mathbf{Q}(\zeta_1, \ldots, \zeta_\nu)$, $A_{k_1,\ldots,k_\nu}$ — *целые рациональные,* $\sum_{k_1=0}^{N_1}\ldots\sum_{k_\nu=0}^{N_\nu}|A_{k_1,\ldots,k_\nu}| \leqslant B$, *то или* $\zeta = 0$, *или*

$$(6) \qquad |\zeta| = \Big|\sum_{k_1=0}^{N_1}\ldots\sum_{k_\nu=0}^{N_\nu}A_{k_1,\ldots,k_\nu}\zeta_1^{k_1}\ldots\zeta_\nu^{k_\nu}\Big| \geqslant B^{1-n}\prod_{i=1}^{\nu}L_i^{-nN_i/n_i}.$$



Лемма 4 (см. [12], лемма 4). *Пусть* $\omega_1$ *и* $\omega_2$ — *основные периоды функции* $\wp(z)$, $Z$ — *основной параллелограм (с границами)* $\wp(z)$, $\varrho \in (0, 1)$, $Z_0(\varrho)$ — *множество всех точек из* $Z$, *не входящих в области* $|n_1\omega_1+n_2\omega_2-z| < 2\varrho$, $n_1, n_2 = 0, \frac{1}{2}, 1$, $Z_i(\varrho)$, $i = 1, \ldots, 8$ — *замкнутые множества, получающиеся из* $Z_0(\varrho)$ *после проведения диагоналей* $Z$ *и линий, соединяющих середины противоположных сторон* $Z$, $Y_i(\varrho)$ — *замкнутое множество, получающееся из* $Z_i(\varrho)$ *присоединением всех точек, отстоящих от его границ не более, чем на* $\varrho^2$. *Тогда существует такое* $\gamma_0 = \gamma_0(\omega_1, \omega_2)$, *что для любого* $\varrho \in (0, \gamma_0)$ *множества* $Z_i(\varrho)$ *не пустые и для любых* $z_1$ *и* $z_2$, *сравнимых с* $\zeta_1$ *и* $\zeta_2$, *принадлежащими одной и той же области* $Y_i(\varrho)$, *справедливо неравенство*

$$(7) \qquad |\wp(z_1)-\wp(z_2)| = |\wp(\zeta_1)-\wp(\zeta_2)| \geqslant c_0|\zeta_1-\zeta_2|,$$

*где* $c_0 = c_0(\omega_1, \omega_2)$. $z$ *и* $\zeta$ *называются сравнимыми, если* $z-\zeta$ — *период* $\wp(z)$.

Лемма 5 (см. [12], лемма 3). *Пусть* $F_1(z), \ldots, F_p(z)$ — *некоторые функции,* $\Omega_1, \ldots, \Omega_p$ — *периоды функций* $\varphi_1(z), \ldots, \varphi_q(z)$, $C_{k,l}$ — *не зависят от* $z$, $\Delta_{l,t}$ *и* $\Delta_{\varkappa,k}(t)$ — *алгебраические дополнения элементов* $\varphi_l(\alpha_t)$ *и* $F_k(\Omega_\varkappa+\alpha_t)$ *не равных нулю определителей* $\Delta = |\varphi_l(\alpha_t)|$, $l, t = 1, \ldots, q$, *и* $\Delta(t) = |F_k(\Omega_\varkappa+\alpha_t)|$, $\varkappa, k = 1, \ldots, p$, *где* $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ — *некоторые числа. Если*

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{q}C_{k,l}F_k(z)\varphi_l(z),$$

*то*

$$(7') \qquad C_{k,l} = \sum_{\varkappa=1}^{p}\sum_{t=1}^{q}\frac{\Delta_{l,t}}{\Delta}\,\frac{\Delta_{\varkappa,k}(t)}{\Delta(t)}\,\varphi(\Omega_\varkappa+\alpha_t).$$

Лемма 6. *Пусть* $\alpha_1$ *и* $\alpha_2$ — *алгебраические числа степеней* $n_1$ *и* $n_2$ *принадлежат полю* $K$ *степени* $n$, $\alpha = \alpha_1\alpha_2$. *Тогда*

$$L(\alpha) \leqslant 2^n L(\alpha_1)^{n/n_1}L(\alpha_2)^{n/n_2}.$$

Доказательство. Пусть $K^{(2)}, \ldots, K^{(n)}$ — сопряженные поля $K = K^{(1)}$, а $\alpha_1^{(i)}$ и $\alpha_2^{(i)}$ — сопряженные чисел $\alpha_1$ и $\alpha_2$ в поле $K^{(i)}$. Пусть $a$ и $b$ — старшие коэффициенты уравнений, определяющих $\alpha_1 = \alpha_{1,1}$ и $\alpha_2 = \alpha_{2,1}$, а $\alpha_{1,2}, \ldots, \alpha_{1,n_1}$ и $\alpha_{2,2}, \ldots, \alpha_{2,n_2}$ — остальные корни этих уравнений. Тогда

$$P(z) = a^{n/n_1}b^{n/n_2}\prod_{i=1}^{n}\big(z-\alpha_1^{(i)}\alpha_2^{(i)}\big),$$

— многочлен с целыми рациональными коэффициентами, так как каждое из чисел $\alpha_{j,1}, \ldots, \alpha_{j,n_j}$ встречается в разложении $P(z)$ $n/n_j$ раз, а произведения $a\alpha_{1,i_1}\ldots\alpha_{1,i_s}$ и $b\alpha_{2,j_1}\ldots\alpha_{2,j_t}$, $i_u \neq i_v$, $j_u \neq j_v$ — целые алгебраические. Очевидно, $P(a)=0$. Неприводимый делитель $P(z)$, определяющий $a$, имеет вид

$$Q(z)=A\prod_{i=1}^{n_0}(z-a_1^{(i_i)}a_2^{(i_i)}),\qquad 1\leqslant A\leqslant a^{n/n_1}b^{n/n_2},\qquad n_0\leqslant n.$$

Отсюда

$$L(a)\leqslant A\prod_{i=1}^{n_0}(1+|a_1^{(i_i)}a_2^{(i_i)}|)\leqslant 2^n a^{n/n_1}b^{n/n_2}\prod_{i=1}^{n}\{\max(1,|a_1^{(i)}|)\max(1,|a_2^{(i)}|)\}\leqslant$$

$$\leqslant\exp\left(n\ln 2+\frac{n}{n_1}\ln L(a_1)+\frac{n}{n_2}\ln L(a_2)\right),$$

так как по неравенству Малера (см. [13])

$$|b_0\theta^{(i_1)}\dots\theta^{(i_s)}|\leqslant L(\theta),$$

если $\theta^{(i_1)},\dots,\theta^{(i_s)}$ — различные сопряженные алгебраического $\theta$, а $b_0$ — старший коэффициент уравнения, определяющего $\theta$.

Лемма 7. *Пусть $a$ — корень уравнения $a_nx^n+\dots+a_0=0$, $a_na_0\neq 0$. Тогда*

$$|a_0|(H+|a_0|)^{-1}<|a|<1+H|a_n|^{-1}.$$

Доказательство. Пусть $|a|>1$. Тогда

$$|a_na^n|\leqslant H(|a|^{n-1}+\dots+|a|+1)=H\frac{|a^n|-1}{|a|-1}<H\frac{|a^n|}{|a|-1}.$$

Если $|a|<1$, то $|1/a|>1$. $1/a$ корень уравнения $a_0y^n+\dots+a_n=0$, откуда

$$|1/a|<1+H/|a_0|.$$

**§ 2.** Докажем теорему 1. Известно, что при алгебраических инвариантах $\wp'(\omega_1/2)=\wp'(\omega_2/2)=0$, $\delta_1=\wp(\omega_1/2)$, $\delta_2=\wp(\omega_2/2)$, $\delta_3=\wp''(\omega_1/2)$, $\delta_4=\wp''(\omega_2/2)$ — алгебраические числа. Известно также, что $\eta$ или квадратическая иррациональность, или трансцендентное число. Мы остановимся на втором случае, так как при алгебраическом $\eta$ теорема сразу вытекает из (6).

Доказательство поведем от противного. Пусть

$$|\eta-\beta|\leqslant\exp(-n\lambda^{11}M^3),\tag{8}$$

$$M=[\ln L+n(\lambda+\ln n+\ln\ln(L+1))],\qquad L=L(\beta),$$

где $\lambda$ — эффективная постоянная, которую мы определим в дальнейшем — мы получим для $\lambda$ несколько оценок снизу, которые позволят зафиксировать целое число $\lambda$ в конце доказательства. Пусть

$$\gamma_1=\ln\max(|\omega_i|,|\omega_i^{-1}|,|\delta_j|,|\eta|+1,|\eta^{-1}|,H(\delta_j)),\tag{9}$$

$$i=1,2;\ j=1,2,3,4.$$



Пусть $\gamma_2$ — степень поля $K_0=\boldsymbol{Q}(\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4)$, а $n$ — степень поля $K=K_0(\beta)$. Тогда степень $n_0$ числа $\beta$ удовлетворяет условию

$$n_0\leqslant n\leqslant n_0\gamma_2.\tag{10}$$

Пусть базис $\beta_1,\dots,\beta_n$ поля $K$ выбран из чисел множества $\{\delta_1^{\mu_1}\delta_2^{\mu_2}\delta_3^{\mu_3}\delta_4^{\mu_4}\beta^{\mu},\ 0\leqslant\mu_j\leqslant\gamma_2-1,\ 0\leqslant\mu\leqslant n-1\}$. Тогда

$$|\beta_\nu|\leqslant\exp(n\gamma_3),\qquad \nu=1,\dots,n.\tag{11}$$

Положим

$$q_0=\lambda^3M,\qquad q=n\lambda^3M,\qquad x_0=\lambda M,\qquad s_0=n\lambda^5M^2,\tag{12}$$

$$C=[\exp(\lambda^5M^3)]+1,$$

$$f(z)=\sum_{k=0}^{q_0-1}\sum_{l=0}^{q-1}C_{k,l}\wp^k(\omega_1z)\wp^l(\omega_2z),\qquad C_{k,l}=\sum_{\nu=1}^{n}C_{k,l,\nu}\beta_\nu,\tag{13}$$

где целые числа $C_{k,l,\nu}$ будут выбраны позднее. По лемме 1

$$f^{(s)}(z)=\sum_{k,l}C_{k,l}\sum_{\sigma=0}^{s}C_s^\sigma\omega_1^\sigma\omega_2^{s-\sigma}\Phi_{\sigma,k}(\omega_1z)\cdot\Phi_{s-\sigma,l}(\omega_2z),\tag{14}$$

$$\Phi_{u,v}(\zeta)=\sum_{2a+3b+4c=u+2v}\gamma_{a,b,c}^{u,v}\wp(\zeta)^a\cdot\wp'(\zeta)^b\cdot\wp''(\zeta)^c,$$

$$f^{(s)}(x+\tfrac{1}{2})=\tag{15}$$

$$=\omega_2^s\sum_{k,l}C_{k,l}\sum_{\sigma=0}^{s}C_s^\sigma\eta^\sigma\sum_{a+2c=k+\sigma/2}\gamma_{a,0,c}^{\sigma,k}\delta_1^a\delta_3^c\sum_{a_1+2c_1=l+(s-\sigma)/2}\gamma_{a_1,0,c_1}^{s-\sigma,l}\delta_2^{a_1}\delta_4^{c_1},$$

$x$ — целое. Положим

$$f_s=\sum_{k,l}C_{k,l}\sum_{\sigma=0}^{s}C_s^\sigma\beta^\sigma\sum_{a+2c=k+\sigma/2}\gamma_{a,0,c}^{\sigma,k}\delta_1^a\delta_3^c\sum_{a_1+2c_1=l+(s-\sigma)/2}\gamma_{a_1,0,c_1}^{s-\sigma,l}\delta_2^{a_1}\delta_4^{c_1}=\tag{16}$$

$$=\sum_{k,l,\nu}D_{k,l,\nu}^sC_{k,l,\nu}.$$

Пусть

$$\lambda\geqslant\lambda_1=\max\left(\exp(\gamma/3+\gamma_1/2),\sqrt[6]{6+3\gamma_3},\sqrt[3]{6\gamma_1+\ln 64}\right),\tag{17}$$

тогда вследствие (4), (9), (11), (12), (13) и (16)

$$\sum_{k,l,\nu}|D_{k,l,\nu}^s|\leqslant nqq_0e^{n\gamma_3+\gamma s+\gamma_1(1,5s+q+q_0)}2^{q+q_0}(s+1)!\leqslant e^{3n\lambda^5M^2\ln(n\lambda^5M^2)},\tag{18}$$

$$s=0,2,\dots,2s_0-2.$$

Применим лемму 2 к системе из $r=2s_0$ линейных форм $\mathrm{Re}f_s$, $\mathrm{Im}f_s$, $s=0,2,\dots,2s_0-2$, от $t=nqq_0$ величин $C_{k,l,\nu}$. Пусть $X=C$, а в качестве $A$ можно взять правую часть (18). Таким образом, существует нетривиальный набор целых рациональных $C_{k,l,\nu}$, удовлетворяющих вследствие (5), (12), (17) и (18) неравенствам

$$(19)\qquad \begin{cases} |f_s| \leqslant 4\exp\big(4n\lambda^5M^2\ln(n\lambda^5M^2)-(\lambda n-1)\lambda^5M^3\big) \leqslant \exp(-0.1n\lambda^6M^3),\\ |C_{k,l,\nu}| \leqslant C,\ s=0,1,\ldots,2s_0-1;\ k=0,1,\ldots,q_0-1;\\ \qquad\qquad l=0,1,\ldots,q-1;\ \nu=1,\ldots,n, \end{cases}$$

если только

$$(20)\qquad \lambda \geqslant \lambda_2 = \max(\lambda_1, 15)$$

(нечетные значения $s$ добавляются автоматически, так как при нечетном $s$ одно из чисел $\sigma+2k$ и $s-\sigma+2l$ в формуле (16) нечетное).

Величины $f_s$ являются многочленами с целыми рациональными коэффициентами от алгебраических чисел $\beta, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$. Воспользуемся леммой 3. Очевидно,

$$(21)\qquad B = B(f_s) \leqslant nqq_0C(s+1)!\,e^{\gamma s}2^{q+q_0}.$$

Вследствие (12), (20) и (21) получаем неравенство

$$(22)\qquad B(f_s) \leqslant \exp(22\lambda^8M^3), \qquad s=0,1,\ldots,2s_0-1.$$

Степень $f_s$ по $\beta$ не превосходит $n_0+s$, а по $\delta_l$ не больше, чем $q+\gamma_2+ +s/2$. Таким образом, вследствие (6), (9), (10), (12) и (22) или $f_s=0$, или

$$(23)\qquad \begin{aligned} |f_s| \geqslant \exp\{&-22(n-1)\lambda^5M^3-\gamma_2(s+n_0)\ln L-4n(q+\gamma_2+s/2)\times\\ &\times(\gamma_1+\ln\gamma_2)\} \geqslant\\ \geqslant \exp\{&-22(n-1)\lambda^5M^3-\gamma_2(n+2n\lambda^5M^2)\ln L-8n(\gamma_1+\ln\gamma_2)\times\\ &\times(n\lambda^5M^2+\gamma_2)\},\\ &s=0,1,\ldots,2s_0-1. \end{aligned}$$

Если

$$(24)\qquad \lambda \geqslant \lambda_3 = \max(\lambda_2, 230+30\gamma_2),$$

то неравенства (19) и (23) несовместны, следовательно

$$(25)\qquad f_s = 0, \qquad s=0,1,\ldots,2s_0-1.$$

Вследствие (4), (8), (9), (11), (12), (15), (16), (24), (25) имеем

$$(26)\qquad \begin{aligned} |f^{(s)}(x+\tfrac12)| \leqslant |\omega_2^sf_s| + |\omega_2^s(\eta-\beta)|\,nqq_0C(s+2)!\times\\ \times\exp\big((q+q_0)(\gamma_1+\ln2)+s(\gamma+2,5\gamma_1)+\gamma_3n\big), \end{aligned}$$

$$(27)\qquad \begin{aligned} |f_s| \leqslant |\omega_2^{-s}f^{(s)}(x+\tfrac12)| + |\eta-\beta|\,nqq_0C(s+2)!\times\\ \times\exp\big((q+q_0)(\gamma_1+\ln2)+s(\gamma+2,5\gamma_1)+\gamma_3n\big), \end{aligned}$$



$$(28)\qquad \begin{aligned} |f^{(s)}(x+\tfrac12)| \leqslant \exp\big(&-n\lambda^{11}M^3+\lambda^5M^3+2n\lambda^5M^2\ln(2n\lambda^5M^2)+\\ &+(2\gamma+7\gamma_1)n\lambda^5M^3+\ln(n^2\lambda^6M^2)+(2\gamma_1+\ln4)n\lambda^3M+n\gamma_3\big) \leqslant\\ &\leqslant \exp(-0.5n\lambda^{11}M^3), \quad s=0,1,\ldots,2s_0-1,\ x \text{ — целое}. \end{aligned}$$

Пусть $m$ — целое неотрицательное. Положим

$$(29)\qquad \begin{gathered} x_m = x_0\cdot2^m, \quad s_m = s_0\cdot2^m, \quad T_m = \gamma_4x_m,\\ \gamma_4 = 1+\max(|4\eta\operatorname{cosec}\arg\eta|, |4\eta^{-1}\operatorname{cosec}\arg\eta|), \qquad m \leqslant [\log_2(5\lambda^2)]+1. \end{gathered}$$

Основная лемма. *Если для целых $x$ и $s=0,1,\ldots,2s_{m-1}-1$,*

$$(30)\qquad |f^{(s)}(x+\tfrac12)| < \exp(-0.5n\lambda^{11}M^3),$$

*то это неравенство верно и для $s=0,1,\ldots,2s_m-1$.*

Доказательство. Для натуральных $T$ введем функции

$$(31)\qquad \begin{gathered} F_T(z) = \prod_{u=-T}^{T}\sin^{2q_0}\pi(z+u\eta^{-1})\cdot\prod_{v=-T}^{T}\sin^{2q}\pi(z+v\eta),\\ f_T(z) = f(z)F_T(z). \end{gathered}$$

Очевидно

$$(32)\qquad |F_T(z)| \leqslant \exp\big(\gamma_5qT(|z|+T)\big).$$

Пользуясь формулой Коши для производных отсюда получим

$$(33)\qquad |F^{(s)}(z)| \leqslant s!\exp\big(\gamma_6qT(|z|+T)\big).$$

Теперь из (12), (28), (29), (31), (33) получаем неравенство

$$(34)\qquad \begin{aligned} |f_{T_m}^{(s)}(x+\tfrac12)| &= \Big|\sum_{\sigma=0}^{s}C_s^\sigma f^{(\sigma)}(x+\tfrac12)F_{T_m}^{(s-\sigma)}(x+\tfrac12)\Big| \leqslant\\ &\leqslant (s+1)!\exp\big(\gamma_6T_m(T_m+x+\tfrac12)q-\tfrac12n\lambda^{11}M^3\big) <\\ &< \exp(-\tfrac13n\lambda^{11}M^3), \quad s=0,1,\ldots,2s_{m-1}-1,\ x \text{ — целое}, \end{aligned}$$

если только

$$(35)\qquad \lambda \geqslant \lambda_4 = \max\big(\lambda_3, 9\gamma_4\gamma_6(\gamma_4+1)\big).$$

Воспользуемся интерполяционной формулой Эрмита

$$(36)\qquad \begin{aligned} \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=R}\prod_{x=0}^{X-1}\left(\frac{z-x-0.5}{\zeta-x-0.5}\right)^S\frac{\Phi(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta+\\ +\sum_{y=0}^{X-1}\sum_{s=0}^{S-1}\frac{\Phi^{(s)}(y+0.5)}{2\pi is!}\oint_{|\zeta-y+0.5|=0.5}\left(\frac{z-x-0.5}{\zeta-x-0.5}\right)^S\frac{(\zeta-y-0.5)^s}{z-\zeta}\,d\zeta. \end{aligned}$$

Это равенство справедливо для функции $\Phi(z)$, регулярной в круге $|z| \leqslant R$, $R > X - 0.5$. Вследствие (29) функция $f_{T_m}(z)$ регулярна в круге $|z| \leqslant 4x_m$, причем выполняется неравенство

$$\max_{|\zeta| \leqslant 4x_m - 0.5} |f_{T_m}(\zeta)| \leqslant nqq_0 C \exp\bigl(\gamma_3 n + \gamma_7 q + \gamma_5 T_m(T_m + 4x_m) q\bigr), \tag{37}$$

так как вместо окружности $|z| = 4x_m - 0.5$ оценку можно произвести на некотором контуре, охватывающем эту окружность, содержащемся в круге $|z| \leqslant 4x_m$, и таком, что на нем функции $\wp(\omega_1 z)$ и $\wp(\omega_2 z)$ ограничены.

В формуле (36) положим $\Phi(z) = f_{T_m}(z)$, $R = 4x_m - 1/2$, $X = x_{m-1}$, $S = 2s_{m-1}$. Тогда вследствие (12), (29), (31), (34), (37)

$$\begin{aligned}
\max_{|z| \leqslant x_m} |f_{T_m}(z)| &\leqslant \frac{4x_m - 0.5}{3x_m - 0.5} \left(\frac{x_m + x_{m-1}}{4x_m - x_{m-1}}\right)^{2x_{m-1}s_{m-1}} \times \\
&\times C \cdot \exp\bigl(\gamma_3 n + \gamma_7 q + \gamma_5 T_m(T_m + 4x_m) q + \ln(nqq_0)\bigr) + 2x_{m-1}s_{m-1} e^{-\frac{1}{3}n\lambda^{11}M^3} \times \\
&\times \left(\frac{x_m(x_m+1)\ldots(x_m + x_{m-1} - 1)}{x_{m-1}!} \max_{0 \leqslant y \leqslant x_{m-1}-1} \frac{x_{m-1}!\, x_{m-1}^2}{y!\,(x_{m-1} - y - 1)!}\right)^{2s_{m-1}} \leqslant \\
&\leqslant 2\exp\{2^{2m-1} n\lambda^6 M^3 \ln(3/7) + \lambda^5 M^3 + n\gamma_3 + \gamma_7 n\lambda^3 M + \gamma_4\gamma_5(\gamma_4 + 4) 4^m n\lambda^5 M^3 + \\
&\quad + \ln(n^2\lambda^6 M^2)\} + \exp\bigl\{-\tfrac{1}{3} n\lambda^{11} M^3 + \ln(4^m n\lambda^6 M^3) + 2^m n\lambda^5 M^2 \bigl(2^{m+1}\lambda M \ln 2 + \\
&\quad + 3\ln(2^{m-1}\lambda M)\bigr)\bigr\} < \\
&< 2\exp\left(-\frac{n}{2} 4^m \lambda^6 M^3\right) + \exp(-\tfrac{1}{4} n\lambda^{11} M^3) < 3\exp\left(-\frac{n}{2} 4^m \lambda^6 M^3\right)
\end{aligned} \tag{38}$$

если только

$$\lambda \geqslant \lambda_5 = \max\bigl(\lambda_4, \sqrt[5]{11\gamma_7}, 10\gamma_4\gamma_5(4 + \gamma_4)\bigr). \tag{39}$$

Неравенство (38) позволяет оценить $f(z)$. Так как нули всех множителей $F_T(z)$ удалены от точек $x + 1/2$ на расстояние, не меньшее некоторого положительного числа, зависящего от $\eta$, то существуют такие $\gamma_8 < 1$ и $\gamma_9$, что для любого целого $x$

$$\min_{|z - x - 0.5| = \gamma_8} |F_T(z)| \geqslant \exp(-\gamma_9 q T),$$

поэтому из (12), (29), (31), (38) получаем неравенство

$$\max_{|z - x - 0.5| = \gamma_8} |f(z)| \leqslant 3\exp(-\tfrac{1}{2} n 4^m \lambda^6 M^3 + \gamma_9 q T_m) < 3\exp(-\tfrac{1}{3} n 4^m \lambda^6 M^3),$$
$$x \text{ — целое},$$

если только

$$\lambda \geqslant \lambda_6 = \max(\lambda_5, \sqrt[3]{2\gamma_4\gamma_9}). \tag{40}$$



Таким образом

$$\begin{aligned}
|f^{(s)}(x + \tfrac{1}{2})| &= \left| \frac{s!}{2\pi i} \oint_{|\zeta - x - 0.5| = \gamma_8} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - x - 0.5)^{s+1}} d\zeta \right| \leqslant \\
&\leqslant 3\exp\bigl(2s_m \ln(\gamma_8^{-1} 2s_m) - \tfrac{1}{3} 4^m \lambda^6 M^3\bigr), \\
&\qquad s = 0, 1, \ldots, 2s_m - 1,\ x \text{ — целое}.
\end{aligned}$$

Отсюда и из (27) вследствие (8), (9), (12), (29), (39) получаем

$$\begin{aligned}
|f_s| &\leqslant 3\exp\{s_m(2\ln(2\gamma_8^{-1} s_m) + \gamma_1) - \tfrac{1}{3} n 4^m \lambda^6 M^3\} + \\
&\quad + C\exp\{\gamma_3 n + \ln(nqq_0) - n\lambda^{11} M^3 + \\
&\qquad + q(\gamma_1 + \ln 4) + 2s_m(\gamma + \ln(2s_m) + 2.5\gamma_1)\} \leqslant \\
&\leqslant 3\exp(-\tfrac{1}{4} n 4^m \lambda^6 M^3) + \exp(-\tfrac{1}{2} n\lambda^{11} M^3 - 2\gamma_1 s_m) < \\
&< 4\exp(-n 4^{m-1} \lambda^6 M^3), \quad s = 0, 1, \ldots, 2s_m - 1,
\end{aligned} \tag{41}$$

если только

$$\lambda \geqslant \lambda_7 = \max(\lambda_6, 7\sqrt{\gamma_1 - \ln\gamma_8}). \tag{42}$$

Так как $f_s$ — многочлен с целыми рациональными коэффициентами от алгебраических чисел $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ и $\beta$, то для его оценки снизу можно использовать лемму 3. Из (12), (21), (29), (42) получаем

$$\begin{aligned}
B(f_s) &\leqslant \exp\{2s_m(\gamma + \ln(2s_m)) + n\ln 4 \cdot \lambda^3 M + \lambda^5 M^3 + \ln(n^2\lambda^6 M^2)\} \leqslant \\
&\leqslant \exp\{\lambda^5 M^3 + 2^{m+1} n\lambda^5 M^2 \ln(2^{m+2} n\lambda^5 M^2)\}, \\
&\qquad s = 0, 1, \ldots, 2s_m - 1.
\end{aligned} \tag{43}$$

Для тех же $s$ степень $f_s$ по $\beta$ не больше $n + 2^{m+1} n\lambda^5 M^2$, а по $\delta_k$ — не больше $2^m n\lambda^5 M^2 + n\lambda^3 M + \gamma_2$. Итак, вследствие (6), (9), (10) и (43) или $f_s = 0$, или

$$\begin{aligned}
|f_s| &\geqslant \exp\bigl\{(1 - n)\bigl(\lambda^5 M^3 + 2^{m+1} n\lambda^5 M^2 \ln(2^{m+2} n\lambda^5 M^2)\bigr) - \\
&\quad - 2^{m+2}\gamma_3 n\lambda^5 M^2 \ln L - 2^{m+3} n^2 \lambda^5 M^2(\gamma_1 + \ln\gamma_2)\bigr\}, \\
&\qquad s = 0, 1, \ldots, 2s_m - 1.
\end{aligned} \tag{44}$$

Вследствие (42) неравенства (41) и (44) несовместны, поэтому

$$f_s = 0, \quad s = 0, 1, \ldots, 2s_m - 1. \tag{45}$$

Для завершения доказательства леммы воспользуемся неравенством (26). Заметим, что второй член правой части (26) лишь множителем $\omega_2^s$ отличается от второго члена правой части (27), который мы уже оценили при выводе неравенства (41). Таким образом

$$|f^{(s)}(x + \tfrac{1}{2})| \leqslant |\omega_2^s| \exp(-\tfrac{1}{2} n\lambda^{11} M^3 - 2\gamma_1 s_m) \leqslant \exp(-\tfrac{1}{2} n\lambda^{11} M^3), \tag{46}$$
$$s = 0, 1, \ldots, 2s_m - 1,\ x \text{ — целое},$$

и основная лемма доказана.

При $m=0$ условия этой леммы, как видно из (28), выполнены. Применяя последовательно лемму мы доведем $m$ до $g=[\log_2(5\lambda^2)]+1$. Тогда из (12), (29), (38) получим неравенство

(47) $$\max_{|z|\leqslant 5\lambda^3 M}|f_{T_g}(z)|\leqslant 3\exp(-12n\lambda^{10}M^3),\qquad T_g\leqslant 10\gamma_4\lambda^3 M.$$

Так как $\eta$ — трансцендентное число, то при любых целых $P$, $M$ и $N$, $P^2+M^2+N^2>0$,

$$P\omega_1^2\omega_2^{-1}+M\omega_1+N\omega_2=\omega_2(P\eta^2+M\eta+N)\neq 0,$$

следовательно для фиксированного целого $\nu_0$ расстояние от $\nu_0\omega_1^2\omega_2^{-1}$ до узлов решетки полупериодов ограничено снизу, так что

(48) $$\min|\nu\omega_1^2\omega_2^{-1}-\tfrac{1}{2}M\omega_1-\tfrac{1}{2}N\omega_2|=\gamma_{10}>0,$$

где минимум берется по всем целым $M$ и $N$ и всем $\nu=1,2,\ldots,8$.

Пусть $\gamma_0$ — число из леммы 4. Зафиксируем $\varrho_0$, для которого

(49) $$0<\varrho_0<\min(\gamma_0,\gamma_{10}/4);$$

и все точки круга $|z-\omega_1/4|<\varrho_0^2$ удалены от полупериодов $\wp(z)$ больше чем на $2\varrho_0$. Пусть

(50) $$W_x=(x+\tfrac{1}{4})\eta,\qquad x=0,\pm 1,\ldots,\pm 5q_0,$$
$$\omega_1 W_x=(x+\tfrac{1}{4})\omega_1^2\omega_2^{-1}=M_x\omega_1+N_x\omega_2+\zeta_x,$$

где $M_x\omega_1+N_x\omega_2$ — ближайший к $\omega_1 W_x$ полупериод $\wp(z)$. Пусть $\nu=1,2,\ldots,8$. Тогда вследствие (48)

(51) $$|\zeta_{x+\nu}|+|\zeta_x|\geqslant|\zeta_{x+\nu}-\zeta_x|=$$
$$=|\nu\omega_1^2\omega_2^{-1}-(M_{x+\nu}-M_x)\omega_1-(N_{x+\nu}-N_x)\omega_2|\geqslant\gamma_{10}.$$

Если теперь $|\zeta_x|<2\varrho_0$, то вследствие (48)

$$|\zeta_{x+\nu}|>\gamma_{10}-2\varrho_0\geqslant 2\varrho_0,\qquad \nu=1,\ldots,8,$$

следовательно при любом целом $x$ из каждых девяти точек $\omega_1 W_{x+\mu}$, $\mu=0,1,\ldots,8$, хотя бы восемь сравнимы с точками множества $Z_0(\varrho_0)$, введенного в лемме 4. Таким образом, среди точек $\omega_1 W_x$, $x=0,\pm1,\ldots,\pm 5q_0$, найдется $8q_0$ точек, сравнимых с точками из $Z_0(\varrho_0)$, и $q_0$ точек (пусть они соответствуют $x_1,\ldots,x_{q_0}$), сравнимых с точками из одного и того же множества $Z_j(\varrho_0)$, $j$ — одно из чисел $1,\ldots,8$. Положим

(52) $$z_{\varkappa,t}=(x_\varkappa+\tfrac{1}{4})\eta+\varrho_0^2 tq^{-1}e^{-\gamma_1},\qquad \varkappa=1,\ldots,q_0;\ t=0,1,\ldots,q-1,$$

тогда все точки $\omega_1 z_{\varkappa,t}$ вследствие (9) будут сравнимы с точками из $Y_j(\varrho_0)$ (см. лемму 4). Так как в точках $z_{\varkappa,t}$ модули всех синусов,



входящих в $F_T(z)$, ограничены снизу числом $\exp(-\gamma_{12})$, то вследствие (31) и (47)

(53) $$|f(z_{\varkappa,t})|\leqslant 3\exp\{-12n\lambda^{10}M^3+4\gamma_{12}q(2T_g+1)\}\leqslant$$
$$\leqslant\exp(-12n\lambda^{10}M^3+120\gamma_4\gamma_{12}n\lambda^6M^2),$$
$$t=1,\ldots,q;\ \varkappa=0,1,\ldots,q_0-1.$$

Воспользуемся леммой 5. Пусть $\varphi(z)=f(z)$, $\varphi_l(z)=\wp^l(\omega_2 z)$, $F_k(z)=\wp^k(\omega_1 z)$, $\Omega_\varkappa=\eta x_\varkappa$, $\varkappa=1,\ldots,q_0$; $a_t=tq^{-1}\varrho_0^2 e^{-\gamma_1}+\eta/4$, $t=0,\ldots,q-1$. Так как $\Omega_\varkappa+a_t=z_{\varkappa,t}$, а все точки $\omega_1 z_{\varkappa,t}$ сравнимы с точками из одного и того же $Y_j$, то вследствие (7) числа $\wp(\omega_1(\eta x_\varkappa+a_t))$, $\varkappa=1,\ldots,q_0$ различные, следовательно определитель $\Delta(t)\neq 0$. Так как все $a_t\omega_2$ принадлежат тому же $Y_i$, что и точка $\omega_1/4$, то различными будут и все числа $\wp(a_t\omega_2)$, $t=0,1,\ldots,q-1$, так что $\Delta\neq 0$. Далее,

(54) $$\frac{\Delta_{\varkappa,k}(t)}{\Delta(t)}=\frac{\sum\prod\wp(\omega_1\eta x_u+\omega_1 a_t)}{\prod\limits_{\substack{v=1\\ v\neq\varkappa}}^{q_0}\big(\wp(z_{\varkappa,t}\omega_1)-\wp(z_{v,t}\omega_1)\big)},$$

где суммирование распространено на всевозможные произведения по $q_0-1-k$ различных множителей. Вследствие (7), (9), (50), (51), (52)

(55) $$|\wp(\omega_1 z_{\varkappa,t})-\wp(\omega_1 z_{v,t})|\geqslant c_0|\zeta_{x_\varkappa}-\zeta_{x_v}|=$$
$$=c_0|\omega_2||A\eta^2+B\eta+C|=c_0|\omega_2||\varphi(\eta)|,$$
$$A=x_\varkappa-x_v,\qquad B=M_{x_\varkappa}-M_{x_v},\qquad C=N_{x_\varkappa}-N_{x_v},$$

а $c_0$ — число из леммы 4. Пусть $\varphi(\beta)\neq 0$, тогда

$$|\varphi(\eta)|=|\varphi(\beta)-(\varphi(\beta)-\varphi(\eta))|\geqslant|\varphi(\beta)|-|\beta-\eta||A(\beta+\eta)+B|.$$

Из (50) вытекает неравенство

(56) $$L(\varphi)\leqslant\gamma_{13}q_0,$$

поэтому вследствие (6), (8), (9), (10) получаем

(57) $$|\varphi(\eta)|\geqslant(\gamma_{13}q_0)^{1-n}L^{-2\gamma_0}-2\gamma_{13}q_0e^{\gamma_1-n\lambda^{11}M^3}\geqslant\tfrac{1}{2}(\gamma_{13}q_0)^{1-n}L^{-2\gamma_0},$$

если только

(58) $$\lambda\geqslant\lambda_8=\max(\lambda_7,\sqrt[4]{2\gamma_1+\ln 16+2\ln\gamma_{13}}).$$

Пусть для всех множеств $Y_i$

$$|\wp(z)|\leqslant\exp\gamma_{14}.$$

Теперь из (54), (55), (57)

(59) $$\left|\frac{\Delta_{\varkappa,k}(t)}{\Delta(t)}\right|\leqslant 2^{q_0}e^{\gamma_{14}q_0}(2c_0^{-1}e^{\gamma_1}\gamma_{13}^n q_0^n L^{2\gamma_0})^{q_0}.$$

Перейдем к оценке $\Delta_{l,t}\Delta^{-1}$.

$$\frac{\Delta_{l,t}}{\Delta} = \frac{\sum\prod\wp(\omega_2 a_v)}{\prod\limits_{\substack{\tau=0\\ \tau\neq t}}^{q-1}\{\wp(\omega_2 a_t)-\wp(\omega_2 a_\tau)\}},$$

где суммирование распространено на всевозможные произведения по $q-1-l$ различных множителей. Вследствие (7), (9) имеем

$$|\wp(\omega_2 a_t)-\wp(\omega_2 a_\tau)| = \left|\wp\left(\frac{\omega_1}{4}+tq^{-1}\varrho_0^2 e^{-\gamma_1}\omega_2\right)-\wp\left(\frac{\omega_1}{4}+\tau q^{-1}\varrho_0^2 e^{-\gamma_1}\omega_2\right)\right| \geqslant$$
$$\geqslant c_0|\omega_2|\varrho_0^2 e^{-\gamma_1}q^{-1}|t-\tau| > c_0\varrho_0^2 q^{-1}.$$

Таким образом,

$$\left|\frac{\Delta_{l,t}}{\Delta}\right| \leqslant 2^q e^{\gamma_{14}q}(c_0^{-1}\varrho_0^{-2}q)^q. \tag{60}$$

Теперь из (7′), (12), (53), (59), (60) получаем, что

$$|C_{k,l}| \leqslant \exp\{-12n\lambda^{10}M^3+120\gamma_4\gamma_{12}n\lambda^6M^2+(q+q_0)(\gamma_{14}+\ln(2c_0^{-1}))+ \tag{61}$$
$$+q_0\ln(2e^{\gamma_1}\gamma_{13}^n q_0^n L^{2\gamma_0})+q\ln(q\varrho_0^{-2})\}.$$

Оценим снизу те $C_{k,l}$, которые отличны от нуля. Из (6), (9), (10), (13), (19) получаем

$$|C_{k,l}| \geqslant (nC)^{1-n}L^{-n}(\gamma_2 e^{\gamma_1})^{-4\gamma_2 n}. \tag{62}$$

Если теперь

$$\lambda \geqslant \lambda_9 = \max\big(\lambda_8, \tag{63}$$
$$\sqrt[5]{1-4\ln(c_0\varrho_0)+8\gamma_1\gamma_2+8\gamma_2\ln\gamma_2+240\gamma_2\gamma_4+4\gamma_{14}+2\gamma_1+2\gamma_0+2\ln\gamma_{13}}\big),$$

то неравенства (61) и (62) несовместны, следовательно все $C_{k,l}$, а значит и $C_{k,l,\nu}$ равны нулю. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы в случае, когда $\varphi(\beta)\neq 0$.

Пусть теперь $\varphi(\beta)=0$. Так как $\eta$ комплексное, то рациональные числа отличаются от него не меньше, чем на $|\mathrm{Im}\,\eta|$, следовательно мы можем считать $\beta$ иррациональным, именно квадратичной иррациональностью, так как $\varphi(z)$ второй степени. Вследствие (10), (12), (56), (63) и определения величины $M$, имеем

$$L(\beta) = L \leqslant L(\varphi) \leqslant \gamma_{13}q_0 =$$
$$= \gamma_{13}\lambda^3 M \leqslant \gamma_{13}\lambda^3\big(\ln L+2\gamma_2(\lambda_9+\ln\{2\gamma_2\ln(L+1)\})\big).$$

Это неравенство возможно лишь при

$$L(\beta) \leqslant E_0 = E_0(\lambda_9, \gamma_2, \gamma_{13}),$$



где $E_0$ — эффективная постоянная. Но квадратичных иррациональностей, для которых $L(\beta)\leqslant E_0$, конечное число. Пусть

$$\min_{L(\beta)\leqslant E_0}|\eta-\beta| = \exp(-\Lambda).$$

Теперь остается лишь в неравенстве (1) взять $\lambda = [\lambda_9]+1$.

**§ 3.** Докажем теперь теорему 2. Можно считать, что $\alpha_1\alpha_2\neq 0$, так как в противном случае более сильное утверждение содержится в [5]. Имеем

$$|\alpha_1\omega_1+\alpha_2\omega_2| = |\alpha_1||\omega_2||\eta+\alpha_2\alpha_1^{-1}|.$$

Так как $L(\alpha^{-1}) = L(\alpha)$, то из леммы 6 получаем

$$L(\beta) = L(\alpha_2\alpha_1^{-1}) \leqslant 2^n L(\alpha_1)^{n/n_1}L(\alpha_2)^{n/n_2}, \tag{64}$$

а из (9), (17), (20), леммы 7 и определений $L_0$ и $M_0$ получаем, что

$$|\alpha_1||\omega_2| \geqslant L(\alpha_1)^{-1}e^{-\gamma_1} > \exp(-\ln L_0-\lambda_9) \geqslant \exp(-M_0). \tag{65}$$

Теперь неравенство (2) вытекает из (64), (65) и теоремы 1.

**Литература**


[1] C. L. Siegel, *Über die Perioden elliptischer Funktionen*, Journ. Reine Angew. Math. 167 (1932), стр. 62–69. Ges. Werke, 1, стр. 267–274.

[2] Th. Schneider, *Transzendenzuntersuchungen periodischer Funktionen*, 2, Journ. Reine Angew. Math. 172 (1934), стр. 70–74.

[3] — *Einführung in die transzendente Zahlen*, Berlin 1957.

[4] — *Arithmetische Untersuchungen elliptischer Integrale*, Math. Ann. 113 (1937), стр. 1–13.

[5] Н. И. Фельдман, *Аппроксимация некоторых трансцендентных чисел*, 2, Изв. АН СССР, серия математическая, 15(1951), стр. 153–176.

[6] — *О совместных приближениях периодов эллиптической функции алгебраическими числами*, Изв. АН СССР, серия математическая, 22(1958), стр. 563–576.

[7] A. Baker, *On the periods of Weierstrass $\wp$-function*, Symposia Mathematica 4 (1970), стр. 155–174.

[8] — *An estimate for $\wp$-function at an algebraic point*, Amer. Journ. Math. 12 (1970), стр. 619–622.

[9] J. Coates, *The transcendence of linear forms in $\omega_1, \omega_2, \eta_1, \eta_2, 2\pi i$*, Amer. Journ. Math. 13 (1971), стр. 385–397.

[10] — *Linear forms in the periods of the exponential and elliptic functions*, Inventiones Math. 12 (1971), стр. 209–299.

[11] Н. И. Фельдман, *Оценка линейной формы от логарифмов алгебраических чисел*, Матем. Сб. 76(1968), стр. 304–319.

[12] — *Эллиптический аналог одного неравенства А. О. Гельфонда*, Труды Моск. матем. о-ва, 18(1968), стр. 65–76.

[13] K. Mahler, *An application of Jensen's formula to polynomials*, Mathematika 7 (1960), стр. 98–100.


*Получено 8. 1. 1973* (364)