References

[1] K. Barner, *Über die Werte der Ringklassen-L-Funktionen reell-quadratischer Zahlkörper an natürlichen Argumentstellen*, J. Number Theory 1 (1969), pp. 28–64.

[2] B. C. Berndt, *On Gaussian sums and other exponential sums with periodic coefficients* (to appear).

[3] J. Coates, *On K_2 and some classical conjectures in algebraic number theory*, Ann. Math. 95 (1972), pp. 99–116.

[4] E. Grosswald, *Die Werte der Riemannschen Zetafunktion an ungeraden Argumentstellen*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math. Phys. Kl II (1970), pp. 9–13.

[5] — *Remarks concerning the values of the Riemann Zeta function at integral, odd arguments*, J. Number Theory 4 (1972), pp. 225–235.

[6] — *Relations between the values at integral arguments of Dirichlet series that satisfy functional equations*, Proceedings of the Conference on Number Theory St. Louis (1972) Book series PSPM # 24.

[7] A. Guinand, *Rapidly convergent series for the Riemann Zeta function*, Quart. J. Math. (Oxford) (2) 6 (1955), pp. 156–160.

[8] E. Hecke, *Analytische Funktionen und Algebraische Zahlen II*, Abh. Math. Sem. Hamburg Univ. 3 (1924), pp. 213–236.

[9] H. Klingen, *Über die Werte der Dedekindschen Zetafunktion*, Math. Ann. 145 (1962), pp. 265–272.

[10] — *Über den Arithmetischen Charakter der Fourierkoeffizienten von Modulformen*, Math. Ann. 147 (1962), pp. 176–188.

[11] H. Lang, *Über eine Gattung elementar arithmetischer Klasseninvarianten in reell-quadratischen Zahlkörpern*, Inaugural Diss., Köln 1967.

[12] H. W. Leopoldt, *Eine Verallgemeinerung der Bernoullischen Zahlen*, Abh. Math. Sem. Hamburg Univ. 22 (1958), pp. 131–140.

[13] S. Lichtenbaum, *On the values of Zeta and L-functions* (to appear).

[14] C. Meyer, *Über die Bildung von Elementar-Arithmetischen Klasseninvarianten in reell-quadratischen Zahlkörpern*, Berichte Math. Forsch. – Instit. Oberwolfach – Mannheim 1966, pp. 165–215.

[15] M. Mikolás, *Über die Beziehung der Gammafunktion und den Trigonometrischen Funktionen*, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 4 (1953), pp. 143–151.

[16] — *Sur L'Expression Fermée des Series* $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-(2\nu+1)}$ *et le Rapport* $\zeta(s, w)/\zeta(s)$ Mat. Lapok 8 (1957), pp. 99–107.

[17] S. Ramanujan, *Facsimile Notebooks*, Bombay 1957, v.1, p. 259.

[18] H. F. Sandham, *Some Infinite Series*, Proc. American Math. Soc. 5 (1954), pp. 430–436.

[19] C. L. Siegel, *Bernoullische Polynome und quadratische Zahlkörper*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen II Math. Phys. Kl., 1968, pp. 7–38.

[20] — *Berechnung von Zetafunktionen an ganzzahligen Stellen*, ibidem 1969, pp. 87–102.

TEMPLE UNIVERSITY
Philadelphia, USA
ISRAEL INSTITUTE OF TECHNOLOGY
Haifa, Israel

Received on 17. 11. 1972 (355)

ACTA ARITHMETICA
XXIV (1973)

Sur la représentation de zéro par une somme de carrés dans un corps algébrique

par

TRYGVE NAGELL (Uppsala)

§ 1. Soient donnés le corps algébrique $\boldsymbol{K}$ de degré n et le nombre naturel $m \geqslant 3$. Dans plusieurs mémoires j'ai étudié la résolubilité des équations diophantiennes du type

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2 = 0 \tag{1}$$

en nombres $x_1, x_2, \ldots, x_m$ (le cas $x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 0$ étant exclu) appartenant au corps $\boldsymbol{K}$; voir Nagell [3], [4] et [5]. Il faut évidemment que le corps $\boldsymbol{K}$ soit *totalement imaginaire*, c'est-à-dire que tous les corps conjugués soient imaginaires, et que n soit pair $= 2\nu$. Dans la suite nous considérons seulement les corps algébriques totalement imaginaires.

Si $x_1, x_2, \ldots, x_m$ satisfont à (1) nous dirons que $[x_1, x_2, \ldots, x_m]$ est une solution de cette équation. Cette solution est appelée *réductible*, s'il y a dans (1) une somme partielle des carrés x_i^2 qui s'annule. Dans le cas contraire la solution sera appelée *irréductible*.

Sans restreindre à la généralité nous pouvons supposer que $x_1 \neq 0$. Soit $[x_1, x_2, \ldots, x_m]$ une solution de (1) dans $\boldsymbol{K}$. Désignons par $\boldsymbol{K}^*$ le corps engendré par les $m-1$ nombres $x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_m/x_1$. Ce corps est un sous-corps de $\boldsymbol{K}$. Si $\boldsymbol{K}^*$ est identique à $\boldsymbol{K}$ nous dirons que la solution est *effective* dans $\boldsymbol{K}$. Si $\boldsymbol{K}^*$ est un sous-corps véritable de $\boldsymbol{K}$ il doit être totalement imaginaire. La solution est alors effective dans $\boldsymbol{K}^*$.

Pour reconnaitre si l'équation (1) est résoluble ou non dans le corps totalement imaginaire $\boldsymbol{K}$ nous avons le critère suivant (voir Nagell [4]):

Pour que l'équation (1) soit résoluble dans $\boldsymbol{K}$ il faut et il suffit que la congruence

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2 \equiv 0 \pmod 8 \tag{2}$$

soit résoluble dans $\boldsymbol{K}$, de façon que $(x_1, x_2, \ldots, x_m, 2) = 1$.

Cependant, il faut noter que la démonstration de ce critère n'est pas constructive et qu'il s'agit seulement d'un théorème d'existence.

Il faut aussi observer qu'il n'assure non plus l'existence d'une solution $[x_1, x_2, \ldots, x_m]$ *effective* dans K. La solution peut appartenir à un sous-corps K^*.

Dans la suite *t.im.* signifiera *totalement imaginaire(s)*.

§ 2. La congruence (2) peut être satisfaite pour $m = 5$ dans tous les corps algébriques de la manière suivante

$$2^2+1^2+1^2+1^2+1^2 \equiv 0 \pmod 8.$$

Il en résulte que l'équation (1) est résoluble pour $m = 5$ dans tous les corps algébriques t.im. Pourtant il n'est pas certain qu'il existe pour $m \leqslant 5$ une solution *effective* dans un corps donné quelconque.

Pour $n = 2$ nous avons établi les résultats suivants (voir mes travaux cités plus haut):

I. Si $n = 2$ et $m = 3$ l'équation (1) est effectivement résoluble dans tous les corps quadratiques imaginaires engendrés par le nombre $\sqrt{-\Delta}$, sauf dans le cas où $\Delta \equiv -1 \pmod 8$.

II. Si $n = 2$ et $m = 4$ l'équation (1) n'est pas résoluble dans les corps quadratiques imaginaires engendrés par le nombre $\sqrt{-\Delta}$ lorsque $\Delta \equiv -1 \pmod 8$.

III. Si $n = 2$ et $m = 5$ l'équation (1) est effectivement résoluble dans tous les corps quadratiques imaginaires.

Δ signifie un nombre naturel qui n'est divisible par aucun carré > 1.

Pour $n = 4$ nous avons montré par des méthodes constructives que l'équation (1) est effectivement résoluble dans la plupart des classes de corps biquadratiques du premier rang; dans les classes 6, 13 et 14 il suffit de prendre $m = 3$; dans les classes 5b, 7, 8, 9, 10, 11 et 12 on doit prendre $m = 6$; voir Nagell [4]. Il reste encore à examiner les classes 1, 2, 3, 4 et 5a, que nous allons traiter plus bas.

En vertu des raisonnements sur la congruence (2) il est évident qu'on peut, pour une certaine catégorie de corps, prendre $m = 5$. En effet on aura le résultat suivant:

THÉORÈME 1. *Soit K un corps t.im. qui ne possède aucun sous-corps t.im. Alors l'équation* (1) *est effectivement résoluble dans K pour $m = 5$.*

Ici il manque de méthode constructive dans le cas général. Le résultat s'applique, entre autres, aux classes 1 et 5a des corps biquadratiques du premier rang.

§ 3. Soit Δ un nombre naturel qui n'est divisible par aucun carré > 1. D'après le théorème de Bachet on a $\Delta = a^2+b^2+c^2+d^2$, où a, b, c et d sont des nombres entiers rationnels (voir p.ex. Nagell [1], p. 192). Supposons que le corps algébrique t.im. K contienne la racine carrée $\sqrt{-\Delta}$.

Dans la suite nous avons besoin de l'identité suivante de Lebesgue (voir p.ex. Nagell [1], p. 195):

$$(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)^2 = (x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2)^2+(2x_1x_3+2x_2x_4)^2+(2x_1x_4-2x_2x_3)^2.$$

En multipliant cette relation par Δ nous aurons

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)^2 = A^2+B^2+C^2+D^2,$$

où

$$\begin{aligned}
A &= a(x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2)+b(2x_1x_3+2x_2x_4)+c(2x_1x_4-2x_2x_3),\\
B &= a(2x_1x_3+2x_2x_4)-b(x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2)+d(2x_1x_4-2x_2x_3),\\
C &= a(2x_1x_4-2x_2x_3)-c(x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2)-d(2x_1x_3+2x_2x_4),\\
D &= b(2x_1x_4-2x_2x_3)-c(2x_1x_3+2x_2x_4)+d(x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2).
\end{aligned}$$

Il en résulte

$$A^2+B^2+C^2+D^2+E^2 = 0, \tag{3}$$

où

$$E = \sqrt{-\Delta}(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2).$$

Supposons maintenant que x_1, x_2, x_3 et x_4 soient des nombres dans K, tels que E soit un nombre generateur de K. Alors nous avons obtenu le résultat suivant:

THÉORÈME 2. *Si K est un corps t.im. qui contient la racine carrée $\sqrt{-\Delta}$, l'équation* (1) *est effectivement résoluble dans K pour $m = 5$.*

La méthode est constructive vu qu'une infinité de solutions effectives est donnée par l'équation (3).

Le résultat s'applique, entre autres, aux classes 2, 3 et 4 des corps biquadratiques du premier rang.

Dans la section suivante nous allons voir qu'il y a des cas où il suffit de prendre $m = 3$.

§ 4. Soit $\Delta = 1$ ou $=$ un nombre naturel de la forme a^2+b^2, qui n'est divisible par aucun carré > 1, a et b étant des nombres naturels. Supposons que le corps algébrique t.im. K contienne la racine carrée $\sqrt{-\Delta}$.

On vérifie aisément l'identité suivante:

$$(au^2+2buv-av^2)^2+(bu^2-2auv-bu^2)^2 = \Delta(u^2+v^2)^2.$$

Supposons maintenant que u et v soient des nombres dans K, tels que $\sqrt{-\Delta}(u^2+v^2)$ soit un nombre générateur de K. Cela étant, nous aurons évidemment le

THÉORÈME 3. *Soit Δ le nombre naturel défini tout à l'heure. Alors, si $\boldsymbol{K}$ est un corps t.im. qui contient la racine carrée $\sqrt{-\Delta}$, l'équation* (1) *est effectivement résoluble dans $\boldsymbol{K}$ pour $m = 3$. Des solutions de l'équation*

$$A^2+B^2+C^2 = 0$$

sont données par les formules

$$A = au^2+2buv-av^2, \quad B = bu^2-2auv-bu^2, \quad C = \sqrt{-\Delta}(u^2+v^2).$$

Pour les corps dans le Théorème 3 il suffit de prendre $m = 3$. Ces corps font partie de l'ensemble des corps dans le Théorème 2 où $m = 5$. On se demande s'il y a encore d'autres corps dans cet ensemble pour lesquels le nombre m peut être réduit à 3 ou à 4. De l'exemple

$$(\sqrt{-22})^2+(\sqrt{-3})^2+5^2 = 0$$

on voit que la possibilité $m = 3$ existe dans le corps biquadratique $\boldsymbol{K}(\sqrt{-22}, \sqrt{-3})$; et ce corps n'appartient pas aux corps dans le Théorème 3.

§ 5. Nous finissons par la démonstration de la proposition suivante:

THÉORÈME 4. *Si $\boldsymbol{K}$ est un corps algébrique totalement imaginaire, l'équation*

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2 = 0$$

est effectivement résoluble dans $\boldsymbol{K}$.

Démonstration. On vérifie sans peine que la congruence

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_4^2 \equiv 0 \pmod{N}$$

est résoluble dans le corps rationnel pour toutes les valeurs entières rationnelles de N, de façon que $(x_1, x_2, x_3, x_4, N) = 1$. Alors, en vertu d'un théorème bien connu de Hasse, l'équation

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_4^2 = 0 \tag{4}$$

est résoluble dans tous les corps totalement imaginaires; comparez Nagell [4] et [5]. Cependant, il n'est pas certain qu'il y ait des solutions effectives dans $\boldsymbol{K}$.

La solution complète dans $\boldsymbol{K}$ de l'équation

$$x^2+y^2 = 2 \tag{5}$$

est donnée par les formules

$$\pm x = \frac{u^2+2uv-v^2}{u^2+v^2}, \quad \pm y = \frac{u^2-2uv-v^2}{u^2+v^2},$$

où u et v sont des nombres dans $\boldsymbol{K}$. Il est évident que u et v peuvent être choisis de manière que la solution de (5) soit effective dans $\boldsymbol{K}$.

Alors, en posant dans (4) $x_4 = 1$, nous aurons

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x^2+y^2 = 0,$$

ce qui démontre le Théorème 4. Cependant, la démonstration n'est pas constructive.

Il reste encore à traiter un grand nombre de problèmes dans ce domaine. Par exemple, déterminer tous les corps dans lesquels quatre (ou trois) carrés suffisent pour représenter zéro. Nous allons y revenir prochainement.

Travaux cités

[1] T. Nagell, *Introduction to Number Theory*, New York 1951.

[2] — *On the number of representations of an A-number in algebraic fields*, Arkiv för matem. 7, nr. 37, Stockholm 1962.

[3] — *Sur une catégorie d'équations diophantiennes insolubles dans un corps réel*, K. Norske Vidensk. Selsk. Skr. 4, Trondheim 1971.

[4] — *Sur la représentabilité de zéro par certaines formes quadratiques*, K. Norske Vidensk. Selsk. Skr. 6, Trondheim 1972.

[5] — *Sur la résolubilité de l'équation $x^2+y^2+z^2 = 0$ dans un corps quadratique*, Acta Arith. 21 (1972), pp. 35–43.

Reçu le 28. 11. 1972 (357)