ACTA ARITHMETICA
XXIV (1973)

Die Berechnung von Zetafunktionen mit Vorzeichencharakter an der Stelle 1

von

KARL-BERNHARD GUNDLACH (Münster)

Einleitung. K sei ein total-reeller algebraischer Zahlkörper mit der Diskriminante d_K. Zu jeder Idealklasse $\mathfrak{K}$ (im weiteren Sinne) von K definiert man die zugehörige Zetafunktion durch

$$\zeta_K(s;\mathfrak{K}) = \sum_{\mathfrak{n}\in\mathfrak{K},\,\mathfrak{n}\text{ ganz}} \mathcal{N}(\mathfrak{n})^{-s} \quad (\mathcal{N}(\mathfrak{n})\text{: Absolutnorm von }\mathfrak{n}).$$

Für $\nu\in K$ sei $\mathcal{N}(\nu) = \mathcal{N}_{K/\boldsymbol{Q}}(\nu)$. Ist $\mathcal{N}(\varepsilon) = 1$ für jede Einheit ε von K, so gibt es Charaktere χ der engeren Idealklassengruppe von K mit

$$\chi\big((\nu)\big) = \operatorname{sign}\mathcal{N}(\nu) \quad (\text{für Hauptideale } (\nu)).$$

In diesem Fall definiert man die Zetafunktion oder L-Funktion mit Vorzeichencharakter zu $\mathfrak{K}$ und χ durch

$$\zeta_K(s;\mathfrak{K},\chi) = L_K(s;\mathfrak{K},\chi) = \sum_{\mathfrak{n}\in\mathfrak{K},\,\mathfrak{n}\text{ ganz}} \chi(\mathfrak{n})\mathcal{N}(\mathfrak{n})^{-s}.$$

Die Funktionswerte an den ganzzahligen Stellen, insbesondere $\zeta_K(2;\mathfrak{K})$ und $\zeta_K(1;\mathfrak{K},\chi)$, sind wichtige Klasseninvarianten. Diese Größen haben aber auch funktionentheoretische Bedeutung. So ist

$$V_\Gamma = \frac{2}{\pi^n} d_K^{3/2}\zeta_K(2) = \frac{2}{\pi^n} d_K^{3/2}\sum_{\mathfrak{K}} \zeta_K(2;\mathfrak{K}) \quad (n = [K:\boldsymbol{Q}])$$

das Volumen des Fundamentalbereiches der Hilbertschen Modulgruppe Γ zu K ([11], Band I, S. 466). In der Formel von Shimizu für die Dimension des Vektorraumes der ganzen Modulformen festen Gewichtes zu Γ ([10], S. 70) findet man als Beiträge der Spitzen die Werte

$$(-1)^{n/2}\pi^{-n}\sqrt{d_K}\,\chi(\mathfrak{a}^2)L_K(1;\mathfrak{K}^2,\chi) \quad (\mathfrak{a}\in\mathfrak{K}^{-1}).$$

Zur Berechnung von Zeta-Werten kann man ausnutzen, daß der 0-te Fourierkoeffizient in der Fourierentwicklung gewisser wohlbekannter

Funktionen, der Eisensteinreihen zu Γ, der Wert einer Zetafunktion an einer ganzzahligen Stelle ist. Die Eisensteinreihen sind Funktionen von $n = [K:Q]$ komplexen Variablen $\tau^{(1)}, \ldots, \tau^{(n)}$ im Gebiet $\operatorname{Im}\tau^{(j)} > 0$. Setzt man speziell $\tau^{(1)} = \ldots = \tau^{(n)} = z$, so erhält man zu jedem Ideal $\mathfrak{a} \in \mathfrak{K}^{-1}$ und jedem $r \in N$ (außer für $K = Q$, $r = 2$) eine Funktion von z im Gebiet $\operatorname{Im} z > 0$ mit einer Entwicklung

$$(1) \qquad f(z; \mathfrak{a}, r) = a_0(\mathfrak{a}, r) + \sum_{m=1}^{\infty} a_m(\mathfrak{a}, r) e^{2\pi i m z}.$$

Bei passender Normierung der Eisensteinreihen ist für $r > 1$

$$a_0(\mathfrak{a}, r) = \zeta_K(r; \mathfrak{K}) \text{ für } 2 | r, \qquad a_0(\mathfrak{a}, r) = \chi(\mathfrak{a})\zeta_K(r; \mathfrak{K}, \chi) \text{ für } 2 \nmid r.$$

Die $a_m(\mathfrak{a}, r)$ sind elementare Ausdrücke. $f(z; \mathfrak{a}, r)$ erweist sich als ganze Modulform vom Gewicht nr zur rationalen Modulgruppe ${}_1\Gamma$. Diese Modulformen bilden einen Vektorraum ($\{{}_1\Gamma, -nr, 1\}$ in der üblichen Bezeichnungsweise) einer endlichen Dimension $l(nr)$ und sind, wenigstens im Prinzip, explizit bekannt. Ist

$$(2) \qquad f_j(z; nr) = a_{j,0}(nr) + \sum_{m=1}^{\infty} a_{j,m}(nr) e^{2\pi i m z}, \qquad 1 \leqslant j \leqslant l(nr),$$

eine Basis, so kann man, da $\{{}_1\Gamma, -nr, 1\}$ außer 0 keine konstanten Funktionen enthält, $k(nr)$ so wählen, daß die Matrix

$$(3) \qquad \left(a_{j,m}(nr)\right)_{1 \leqslant j \leqslant l(nr),\, 1 \leqslant m \leqslant k(nr)}$$

den Rang $l(nr)$ hat. Mit passenden Koeffizienten $c_m(nr)$ ist daher

$$(4) \qquad a_{j,0}(nr) = c_1(nr) a_{j,1}(nr) + \ldots + c_{k(nr)}(nr) a_{j,k(nr)}(nr), \quad 1 \leqslant j \leqslant l(nr).$$

Da die $f_j(z; nr)$ eine Basis bilden, folgt hieraus die Relation

$$(5) \qquad a_0 = c_1(nr) a_1 + \ldots + c_{k(nr)}(nr) a_{k(nr)}$$

für die Entwicklungskoeffizienten jeder Funktion aus $\{{}_1\Gamma, -nr, 1\}$, also

$$(6) \qquad a_0(\mathfrak{a}, r) = c_1(nr) a_1(\mathfrak{a}, r) + \ldots + c_{k(nr)}(nr) a_{k(nr)}(\mathfrak{a}, r).$$

Ich habe diese Methode vor einigen Jahren für kleine Werte von nr benutzt, wo man eine Basis von $\{{}_1\Gamma, -nr, 1\}$ leicht explizit hinschreiben kann ([7], S. 112, S. 134–136, vgl. auch w.u. (33)). Etwas später hat dann Siegel das Verfahren in seiner schönen Arbeit [12] aufgegriffen, wo er unter anderem zeigt, daß man immer $k(nr) = l(nr)$ wählen und dann die Koeffizienten $c_m(nr)$ sogar aus den Entwicklungskoeffizienten *einer* speziellen Funktion bestimmen kann.

Im Fall $r = 1$ erhält man auf die angegebene Weise nur ein Teilergebnis (vgl. [12], S. 97). Ist nämlich $\mathfrak{d}$ das Differentenideal von K, $\mathfrak{a}$ ein Ideal mit $\mathfrak{a}^{-1} \in \mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}^*$ die Idealklasse von $\mathfrak{a}\mathfrak{d}$, so ist

$$a_0(\mathfrak{a}, 1) = \chi(\mathfrak{a})\zeta_K(1; \mathfrak{K}, \chi) + \chi(\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{d}^{-1})\zeta_K(1; \mathfrak{K}^*, \chi).$$

Um auch noch $\zeta_K(1; \mathfrak{K}, \chi)$ zu bestimmen, kann man folgendermaßen vorgehen. Zu gegebenen Vorzeichen e_j ($e_j = 1$ oder -1, $1 \leqslant j \leqslant n$) betrachtet man die Eisensteinreihen als Funktionen der komplexen Variablen $\tau^{(j)} = x^{(j)} + iy^{(j)}$ im Gebiet $\operatorname{sign} y^{(j)} = e_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$ (s. [4]). Wählt man eine ganze Zahl $\xi \in K$, deren Konjugierte $\xi^{(j)}$ die Bedingung $\operatorname{sign} \xi^{(j)} = e_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$, erfüllen, und setzt man $q = |\mathcal{N}(\xi)|$ und

$$(7) \qquad \mathfrak{e} = (e_1, \ldots, e_n), \qquad \operatorname{sign}\mathfrak{e} = e_1 e_2 \ldots e_n, \qquad \tau^{(j)} = \xi^{(j)} z /_+ \sqrt{q},$$

so erhält man eine Funktion $f(z; \mathfrak{a}, r; \mathfrak{e})$, die eine zu (1) analoge Entwicklung mit $z/_+\sqrt{q}$ an Stelle von z hat. Für $r = 1$ ist

$$(8) \qquad a_0(\mathfrak{a}, 1; \mathfrak{e}) = \chi(\mathfrak{a})\zeta_K(1; \mathfrak{K}, \chi) + \operatorname{sign}\mathfrak{e}\,\chi(\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{d}^{-1})\zeta_K(1; \mathfrak{K}^*, \chi).$$

$f(z; \mathfrak{a}, r; \mathfrak{e})$ erweist sich als ganze Modulform vom Gewicht nr zu einer Gruppe, die bis auf die Normierung mit der Untergruppe ${}_1\Gamma_0(q)$ der rationalen Modulgruppe ${}_1\Gamma$ übereinstimmt. Kennt man eine Basis von $\{{}_1\Gamma_0(q), -nr, 1\}$, so kann man wie oben verfahren und eine Gleichung der Form (5) bzw. (6) für $a_0(\mathfrak{a}, r; \mathfrak{e})$ herleiten. Wählt man je eine ganze Zahl $\xi \in K$ mit $\mathcal{N}(\xi) > 0$ ($\operatorname{sign}\mathfrak{e} = 1$), etwa $\xi = 1$, und mit $\mathcal{N}(\xi) < 0$ ($\operatorname{sign}\mathfrak{e} = -1$), so erhält man $a_0(\mathfrak{a}, r; \mathfrak{e})$ für ein $\mathfrak{e}$ mit $\operatorname{sign}\mathfrak{e} = 1$ und für ein $\mathfrak{e}$ mit $\operatorname{sign}\mathfrak{e} = -1$, woraus man (im Falle $r = 1$) $\zeta_K(1; \mathfrak{K}, \chi)$ mit Hilfe von (8) ausrechnen kann. Voraussetzung ist natürlich, daß man eine Basis von $\{{}_1\Gamma_0(q), -n, 1\}$ kennt.

Ich habe auf diese Möglichkeit der Berechnung von $\zeta_K(1; \mathfrak{K}, \chi)$ schon in [6] (S. 50) hingewiesen. Die Schwierigkeit der Methode liegt aber in der Bestimmung einer Basis von $\{{}_1\Gamma_0(q), -n, 1\}$, die in vielen Fällen für die in Frage kommenden Werte von q ($-q$ muß die Norm einer ganzen Zahl aus K sein) nicht bekannt ist. Man kann diese Schwierigkeit überwinden, indem man beide Probleme gleichzeitig behandelt. Zu jedem Körper K, für den man die $\zeta_K(1; \mathfrak{K}, \chi)$ ausrechnen kann, sind nämlich die Entwicklungen aller Eisensteinreihen explizit bekannt. Für jede ganze Zahl $\xi \in K$ mit $\mathcal{N}(\xi) < 0$ erhält man damit durch die $f(z; \mathfrak{a}, r; \mathfrak{e})$ zusätzliche Funktionen aus den $\{{}_1\Gamma_0(q), -nr, 1\}$ mit $q = |\mathcal{N}(\xi)|$. Diese Funktionen kann man benutzen, um in einer Reihe weiterer Fälle eine Basis von $\{{}_1\Gamma_0(q), -k, 1\}$ zu bestimmen. Damit vergrößert sich aber wieder die Menge der Körper, für die man die $\zeta_K(1; \mathfrak{K}, \chi)$ ausrechnen kann. Eine typische Endformel für $\zeta_K(1; \mathfrak{K}, \chi)$, die man so erhält, ist die folgende:

Es sei $n=2$, $\mathfrak{b}\in\mathfrak{K}$. Ist $\xi_0\in K$, $\xi_0\sqrt{d_K}$ ganz, $\mathcal{N}(\xi_0\sqrt{d_K})=-q$ und $q=2,\,3,\,5,\,7$ oder 13, so ist

$$(9)\qquad \zeta_K(1;\mathfrak{K},\chi)=\frac{\pi^2(q-1)}{12_+\sqrt{d_K}}\chi(\mathfrak{b})\sum_{\substack{\nu\,\text{ganz},\,\nu\xi_0\gg 0\\ \mathcal{S}\nu\xi_0=1}}\ \sum_{\mathfrak{b}|(\mu)|\mathfrak{b}(\nu)}\operatorname{sign}\mathcal{N}(\mu).$$

(9) erhält man aus Satz 10, § 3, wenn man $\tilde{a}_1(0;\mathfrak{a};\mathfrak{e})$ aus Satz 3 einsetzt.

Ich behandele das Verfahren in § 3 speziell für den Fall $n=2$, in dem sich einige Besonderheiten ergeben (so kann man ${}_1\Gamma_0(q)$ durch eine Erweiterung vom Grad 2, die von Fricke in [2] behandelte Klassengruppe, ersetzen). § 1 enthält Bezeichnungen und Angaben über die Hilbertschen Modulgruppen, § 2 vorbereitende Aussagen über die Gruppen ${}_1\Gamma_0(q)$ und ihre Modulformen. Als Abschluß folgen Tabellen für die $\zeta_K(1;\mathfrak{K},\chi)$ für $K=\boldsymbol{Q}(\sqrt{D})$, D quadratfrei, $D<100$.

§ 1. Hilbertsche Modulgruppen und Eisensteinreihen. Ich verwende die bei Hilbertschen Modulgruppen üblichen Bezeichnungen (vgl. [6], § 1 und [4]). Es sei

K ein total-reeller Zahlkörper, $[K:\boldsymbol{Q}]=n$,
d_K die Diskriminante von K, $\mathfrak{d}$ die Differente,
r eine natürliche Zahl mit $\mathcal{N}(\varepsilon)^r=1$ für jede Einheit ε von K,
$\mathfrak{a}$ ein ganzes Ideal, $\neq(0)$, von K,
$\mathfrak{K}$ die Idealklasse von $\mathfrak{a}^{-1}$, $\mathfrak{K}^*$ die Idealklasse von $\mathfrak{a}\mathfrak{d}$.

Ist r ungerade (dann ist n gerade, da nr wegen $\mathcal{N}(-1)=(-1)^n$ gerade ist, s.o.), so sei χ ein Charakter der engeren Idealklassengruppe von K mit

$$\chi\big((\nu)\big)=\operatorname{sign}\mathcal{N}(\nu)\qquad(\text{für Hauptideale }(\nu)).$$

Die Hilbertsche Modulgruppe zu K ist die Gruppe

$$\Gamma=\left\{L\,\middle|\,L=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix},\ a,b,c,d\in K,\ \text{ganz},\ \det L=1\right\}.$$

${}_1\Gamma$ sei die rationale Modulgruppe (die Hilbertsche Modulgruppe zu $\boldsymbol{Q}$).

Die n Einbettungen (Monomorphismen) von K in $\boldsymbol{R}$ liefern die zu K konjugierten Körper $K^{(1)},\dots,K^{(n)}$. Jedem $K^{(j)}$ ordnet man eine komplexe Variable $\tau^{(j)}$ zu, die man als j-te Konjugierte von $\tau=(\tau^{(1)},\dots,\tau^{(n)})$ bezeichnet. Zu einer rationalen Funktion von τ mit Koeffizienten in K, $R(\tau)\in K(\tau)$, erhält man durch die natürlichen Isomorphismen von $K(\tau)$ auf $K^{(j)}(\tau^{(j)})$ (mit $\tau\to\tau^{(j)}$) Konjugierte $R^{(j)}(\tau^{(j)})$. Rechnungen mit Elementen aus $K(\tau)$ sind stets als simultane Rechnungen mit den Konjugierten in den $K^{(j)}(\tau^{(j)})$ aufzufassen. Für $R(\tau)\in K(\tau)$ definiert man Spur und Norm durch

$$\mathcal{S}R(\tau)=\sum_{j=1}^{n}R^{(j)}(\tau^{(j)}),\qquad \mathcal{N}\big(R(\tau)\big)=\prod_{j=1}^{n}R^{(j)}(\tau^{(j)}).$$

Man setzt $\tau=x+iy$, also $\tau^{(j)}=x^{(j)}+iy^{(j)}$, $1\leqslant j\leqslant n$.

Jeder Matrix $L\in\Gamma$ ordnet man eine Transformation

$$(10)\qquad \tau\to L(\tau)=\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\qquad\left(\text{für } L=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\right)$$

zu, d.h. die simultane linear-gebrochene Transformation

$$\tau^{(j)}\to L^{(j)}(\tau^{(j)})=(a^{(j)}\tau^{(j)}+b^{(j)})(c^{(j)}\tau^{(j)}+d^{(j)})^{-1},\qquad 1\leqslant j\leqslant n.$$

Zu $\mathfrak{e}=(e_1,\dots,e_n)$, $e_j=1$ oder -1, definiert man $\operatorname{sign}\mathfrak{e}=e_1e_2\dots e_n$,

$$\mathfrak{H}_{\mathfrak{e}}=\{\tau\mid\tau=(\tau^{(1)},\dots,\tau^{(n)}),\ \operatorname{sign}y^{(j)}=e_j,\ 1\leqslant j\leqslant n\}$$

und setzt $\mathfrak{H}_1=\mathfrak{H}_{(1)}=\{z\mid z\in C,\ \operatorname{Im}z>0\}$. Γ operiert durch (10) als Gruppe analytischer Automorphismen auf $\mathfrak{H}_{\mathfrak{e}}$. f heißt ganze Modulform vom Gewicht r (von der Dimension $-r$) zu Γ auf $\mathfrak{H}_{\mathfrak{e}}$, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(11) f ist holomorph auf $\mathfrak{H}_{\mathfrak{e}}$.

(12) $f\big(L(\tau)\big)=\mathcal{N}(c\tau+d)^rf(\tau)$ für alle $L\in\Gamma$ ($L(\tau)$ aus (10)).

(13) In (14) (s.u.) treten nur $a(\nu;f)$ mit $\nu y\gg 0$ auf.

Ist $n>1$, so ist (13) von selbst erfüllt ([3], S. 323). Man benutzt diese Definition bei allen Gruppen vom Typ der Hilbertschen Modulgruppe. In diesem allgemeineren Fall ersetzt man (13) für $n=1$ durch

(13*) Für die (14) entsprechende Entwicklung von f zu *jeder* Spitze der Gruppe gilt (13).

Die ganzen Modulformen des Gewichtes r zu Γ auf $\mathfrak{H}_{\mathfrak{e}}$ bilden einen endlich-dimensionalen Vektorraum über C, der mit $\{\Gamma,-r,1\}$ (bzw. genauer mit $\{\Gamma,-r,1;\mathfrak{e}\}$) bezeichnet wird. Jedes $f\in\{\Gamma,-r,1;\mathfrak{e}\}$ ist in eine Fourierreihe

$$(14)\qquad f(\tau)=a(0;f)+\sum_{\mathfrak{b}^{-1}|\nu,\,\nu y\gg 0}a(\nu;f)e^{2\pi i\mathcal{S}\nu\tau}$$

entwickelbar ($\nu y\gg 0$ bedeutet $\nu^{(j)}y^{(j)}>0$ für $1\leqslant j\leqslant n$).

Spezielle Elemente von $\{\Gamma,-r,1;\mathfrak{e}\}$ erhält man durch die Eisensteinreihen. Für $\tau\in\mathfrak{H}_{\mathfrak{e}}$, $s\in C$ setzt man ([4], S. 348)

$$(15)\qquad G_r^*(\tau,s;\mathfrak{a};\mathfrak{e})=\sum_{\substack{\gamma\equiv\delta\equiv 0\bmod\mathfrak{a}\\(\gamma,\delta)_*}}\mathcal{N}(\gamma\tau+\delta)^{-r}|\mathcal{N}(\gamma\tau+\delta)|^{-s}.$$

$(\gamma,\delta)_*$ bedeutet, daß keine zwei Paare γ,δ und γ_1,δ_1 vorkommen, die sich nur um eine Einheit unterscheiden, das Paar $0,0$ ist auszulassen. Die Reihe konvergiert absolut für $r+\operatorname{Re}s>2$. Für $L\in\Gamma$ ist

$$(16)\qquad G_r^*\big(L(\tau),s;\mathfrak{a};\mathfrak{e}\big)=\mathcal{N}(c\tau+d)^r|\mathcal{N}(c\tau+d)|^sG_r^*(\tau,s;\mathfrak{a};\mathfrak{e}).$$

Eine Fourierentwicklung in $x = \operatorname{Re}\tau$, geschrieben in $\tau = x+iy$,

$$(17)\qquad G_r^*(\tau, s; \mathfrak{a}; \mathfrak{e}) = a_r^*(0, s, y; \mathfrak{a}; \mathfrak{e}) + \sum_{\mathfrak{d}^{-1}|\nu,\, \nu\neq 0} a_r^*(\nu, s, y; \mathfrak{a}; \mathfrak{e})\, e^{2\pi i \mathscr{S}\nu\tau}$$

dient zur analytischen Fortsetzung als Funktion von s bis $s = 0$. (16) geht für $s = 0$ in (12) über. Für $\nu \neq 0$ ist (s. [4])

$a_r^*(\nu, 0, y; \mathfrak{a}; \mathfrak{e})$ unabhängig von y, $= 0$ für νy non $\gg 0$,

$a_r^*(0, 0, y; \mathfrak{a}; \mathfrak{e})$ unabhängig von y, falls nicht $n = 1$, $r = 2$ ist.

Für $s = 0$ sind damit, außer im Fall $n = 1$, $r = 2$, auch (11) und (13) erfüllt. Ich wähle eine andere Normierung als in (15) oder in der Einleitung

$$(18)\qquad \begin{aligned} \tilde{G}_r(\tau; \mathfrak{a}; \mathfrak{e}) &= [(r-1)!]^n (2\pi)^{-nr} d_K^{r-\frac{1}{2}} \mathscr{N}(\mathfrak{a})^r G_r^*(\tau, 0; \mathfrak{a}; \mathfrak{e}) \\ &= \tilde{a}_r(0; \mathfrak{a}; \mathfrak{e}) + \sum_{\mathfrak{d}^{-1}|\nu,\, \nu y \gg 0} \tilde{a}_r(\nu; \mathfrak{a})\, e^{2\pi i \mathscr{S}\nu\tau}. \end{aligned}$$

Dann gilt (s. [4], § 4)

Satz 1. *Es sei nicht gleichzeitig* $n = 1$, $r = 2$. *Dann ist* $\tilde{G}_r(\tau; \mathfrak{a}; \mathfrak{e}) \in \{\Gamma, -r, 1; \mathfrak{e}\}$. *Für* $r \neq 1$ *ist*

$$\tilde{a}_r(0; \mathfrak{a}; \mathfrak{e}) = \frac{[(r-1)!]^n}{(2\pi)^{nr}} d_K^{r-\frac{1}{2}} \cdot \begin{cases} \zeta_K(r; \mathfrak{K}) & \text{für} \quad 2\,|\,r, \\ \chi(\mathfrak{a})\zeta_K(r; \mathfrak{K}, \chi) & \text{für} \quad 2 \nmid r. \end{cases}$$

Für $r = 1$ *ist*

$$\tilde{a}_1(0; \mathfrak{a}; \mathfrak{e}) = \frac{{}_+\sqrt{d_K}}{(2\pi)^n} \big(\chi(\mathfrak{a})\zeta_K(1; \mathfrak{K}, \chi) + \operatorname{sign}\mathfrak{e}\, \chi(\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{d}^{-1})\zeta_K(1; \mathfrak{K}^*, \chi)\big).$$

Für $\nu \neq 0$ *ist*

$$\tilde{a}_r(\nu; \mathfrak{a}) = (-1)^{nr/2} \mathscr{N}(\mathfrak{a})^{r-1} d_K^{r-1} \sum_{\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{d}^{-1}|(\mu)|\mathfrak{a}^{-1}(\nu)} \operatorname{sign}\mathscr{N}(\mu)^r |\mathscr{N}(\mu)|^{r-1}.$$

(Die Summation läuft über die Hauptideale (μ).*)*

Im Fall $n = 1$, $r = 2$ erhält man eine nicht-analytische Modulform zu ${}_1\Gamma$, es gilt ([8], S. 469 für $N = 1$)

Satz 2. *Ist* $n = 1$, $r = 2$, *so erfüllt die Funktion*

$$\tilde{G}_2(z) = -\frac{i}{4\pi}\frac{1}{z-\bar{z}} + \frac{1}{24} - \sum_{m=1}^{\infty}\Big(\sum_{d|m} d\Big) e^{2\pi i m z}$$

für ${}_1\Gamma$ *und* $z \in \mathfrak{H}_1$ *die Bedingung* (12) *und, wenn man von dem nicht-analytischen ersten Summanden absieht, auch* (11) *und* (13).

Für $n = 2$, $r = 1$ ergeben sich einige Vereinfachungen. In diesem Fall ist $\mathfrak{d} = (\sqrt{d_K})$, $\chi(\mathfrak{d}) = \operatorname{sign}\mathscr{N}(\sqrt{d_K}) = -1$. Man rechnet nach:

Hilfssatz 1. *Ist* $n = 2$, $\mathfrak{b}$ *ein Ideal*, $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = (\varrho) \neq (0)$ *Hauptideal, so ist*

$$\tilde{a}_1\Big(\frac{\nu}{\sqrt{d_K}}; \mathfrak{a}\Big) = \operatorname{sign}\mathscr{N}(\varrho) \sum_{\mathfrak{b}|(\mu)|\mathfrak{b}(\nu)} \operatorname{sign}\mathscr{N}(\mu) \quad \textit{für } \nu \neq 0,\ \nu \textit{ ganz}.$$

Nach [5] Satz 2 (mit $\mathfrak{x} = (1)$) ist außerdem $\tilde{a}_1(0; \mathfrak{a}; \mathfrak{e}) = 0$ für $\operatorname{sign}\mathfrak{e} = 1$. (Das folgt wegen $\{{}_1\Gamma, -2, 1\} = \{0\}$ auch aus Satz 7 für $q = 1$, s.u.) Damit erhält man

$$\chi(\mathfrak{a})\zeta_K(1; \mathfrak{K}, \chi) = -\chi(\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{d}^{-1})\zeta_K(1; \mathfrak{K}^*, \chi) = \chi(\mathfrak{a}^{-1})\zeta_K(1; \mathfrak{K}^*, \chi).$$

Ist $\mathfrak{a}^2 = (\varrho)$ ein Hauptideal mit $\operatorname{sign}\mathscr{N}(\varrho) = -1$, so ist $\chi(\mathfrak{a}^{-1}) = -\chi(\mathfrak{a})$ und $\mathfrak{K}^* = \mathfrak{K}$. Es folgt

Satz 3. *Es sei* $n = 2$. *Dann ist*

$$\tilde{a}_1(0; \mathfrak{a}; \mathfrak{e}) = \begin{cases} 0 & \text{für } \operatorname{sign}\mathfrak{e} = 1, \\ \dfrac{{}_+\sqrt{d_K}}{2\pi^2}\chi(\mathfrak{a})\zeta_K(1; \mathfrak{K}, \chi) & \text{für } \operatorname{sign}\mathfrak{e} = -1. \end{cases}$$

Ist $\mathfrak{a}^2 = (\varrho)$ *ein Hauptideal mit* $\operatorname{sign}\mathscr{N}(\varrho) = -1$, $\mathfrak{a}^{-1} \in K$, *so ist*

$$\tilde{a}_1(0; \mathfrak{a}; \mathfrak{e}) = 0, \qquad \zeta_K(1; \mathfrak{K}, \chi) = 0.$$

§ 2. Die Gruppen ${}_1\Gamma_0^*(q)$ und ${}_1\Gamma^*(q)$.

Definition 1. *Zu* $q \in \boldsymbol{N}$ *sei* ${}_+\sqrt{q}$ *die positive Wurzel aus* q *und*

$${}_1\Gamma_0^*(q) = \left\{ L \;\middle|\; L = \begin{pmatrix} a & b\,{}_+\sqrt{q} \\ c\,{}_+\sqrt{q} & d \end{pmatrix},\ a, b, c, d \in \boldsymbol{Z},\ \det L = 1 \right\}.$$

Ist $q > 1$, *so definiert man eine Erweiterung vom* Grad 2 *durch*

$${}_1\Gamma^*(q) = {}_1\Gamma_0^*(q)\{E + T\} \quad \textit{mit} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Gruppen aus Definition 1 operieren gemäß (10) als Gruppen linear-gebrochener Substitutionen auf der oberen Halbebene $\mathfrak{H}_1$. ${}_1\Gamma_0^*(q)$ erhält man durch die Transformation $z \to {}_+\sqrt{q}\,z$ aus der Untergruppe ${}_1\Gamma_0(q)$ der rationalen Modulgruppe ${}_1\Gamma$. Diese Gruppen sind bereits von Fricke ([1], S. 349 ff.) ausführlich diskutiert worden. Das Geschlecht von ${}_1\Gamma_0^*(q)$, d.h. das Geschlecht des durch Hinzunahme der Spitzen kompaktifizierten Quotientenraumes $\mathfrak{H}_1/{}_1\Gamma_0^*(q)$, ist ([1], S. 356)

$$p_0({}_1\Gamma_0^*(q)) = 1 + \tfrac{1}{12}\mu_0(q) - \tfrac{1}{3}\nu_1(q) - \tfrac{1}{4}\nu_2(q) - \tfrac{1}{2}\sigma_0(q).$$

Hierin ist $\sigma_0(q)$ die Spitzenzahl, $\nu_1(q)$ die Anzahl der Fixpunkte der Ordnung 3, $\nu_2(q)$ die Anzahl der Fixpunkte der Ordnung 2 und

$$\mu_0(q) = [{}_1\Gamma : {}_1\Gamma_0(q)] = q\prod_{p|q}\left(1+\frac{1}{p}\right), \qquad \sigma_0(q) = \sum_{t|q}\varphi\left(\left(t, \frac{q}{t}\right)\right),$$

$$\nu_1(q) = \begin{cases} 0 & \text{für } 2|q \text{ oder } 9|q, \\ \prod\limits_{\substack{p|q\\ p\neq 2}}\left(1+\left(\frac{-3}{p}\right)\right) & \text{sonst}, \end{cases} \qquad \nu_2(q) = \begin{cases} 0 & \text{für } 4|q, \\ \prod\limits_{\substack{p|q\\ p\neq 2}}\left(1+\left(\frac{-4}{p}\right)\right) & \text{sonst} \end{cases}$$

(p durchläuft dabei die Primzahlen). Man erhält (vgl. [1], S. 357)

$$\tag{19} \begin{gathered} p_0\big({}_1\Gamma_0^*(q)\big) = \begin{cases} 0 & \text{für } q \leqslant 10 \text{ und für } q = 12, 13, 16, 18, 25, \\ 1 & \text{sonst, falls } q \leqslant 21 \text{ ist;} \end{cases} \\ p_0\big({}_1\Gamma_0^*(q)\big) = \begin{cases} 1 & \text{für } q = 24, 27, 32, 36, 49, \\ 2 & \text{für } q = 22, 23, 26, 28, 29, 31, 37, 50. \end{cases} \end{gathered}$$

Das Geschlecht von ${}_1\Gamma^*(q)$ ist ([1], S. 366)

$$\tag{20} p_0\big({}_1\Gamma^*(q)\big) = \tfrac{1}{2}p_0\big({}_1\Gamma_0^*(q)\big) + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}\delta_q h(-4q).$$

Für $q \geqslant 5$ ist

$$\delta_q = \begin{cases} 2 & \text{für } q \equiv 7 \bmod (8), \\ \frac{4}{3} & \text{für } q \equiv 3 \bmod (8), \end{cases} \qquad \delta_q = 1 \text{ sonst.}$$

$h(-4q)$ ist die Anzahl der Klassen primitiver positiver quadratischer Formen der Diskriminante $-4q$, also die Klassenzahl des imaginär-quadratischen Zahlkörpers der Diskriminante $-4q$, falls $-4q$ Körperdiskriminante ist. Ist q Primzahl, $q \equiv 3 \bmod (4)$, so ist $-q$ Diskriminante,

$$h(-4q) = \left(2-\left(\frac{2}{q}\right)\right)h(-q).$$

Hilfssatz 2. *$p_0\big({}_1\Gamma_0^*(q)\big) = 0$ oder $1 \Rightarrow p_0\big({}_1\Gamma^*(q)\big) = 0$.*

Beweis. Der Körper $\mathfrak{F}$ der Modulfunktionen zu ${}_1\Gamma^*(q)$ ist Unterkörper des Funktionenkörpers $\mathfrak{F}_0$ von ${}_1\Gamma_0^*(q)$. Ist $p_0\big({}_1\Gamma_0^*(q)\big) = 0$, so ist $\mathfrak{F}_0$ rational, und damit auch $\mathfrak{F}$ rational. Ist $p_0\big({}_1\Gamma_0^*(q)\big) = 1$, so ist $\mathfrak{F}_0$ elliptisch, läßt sich also in der Weierstraßschen Form $\mathfrak{F}_0 = C\big(\wp(u;\omega_1,\omega_2), \wp'(u;\omega_1,\omega_2)\big)$ realisieren. Läßt man $u = 0$ dem Punkt $z = i$ entsprechen, so sind die Funktionen aus $\mathfrak{F}$ wegen der Invarianz gegen die Transformation T (s. Definition 1) der Ordnung 2 gerade Funktionen von u. Daher ist $\mathfrak{F} \subset C\big(\wp(u;\omega_1,\omega_2)\big)$, $\mathfrak{F}$ ist rational.

(19) und Hilfssatz 2 ergeben

$$\tag{21} p_0\big({}_1\Gamma^*(q)\big) = 0 \quad \text{für } q \leqslant 21 \text{ und für } q = 24, 25, 27, 32, 36, 49.$$

Ganze Modulformen zu den Gruppen ${}_1\Gamma_0^*(q)$ und ${}_1\Gamma^*(q)$ definiert man, wie in § 1 erläutert, durch (11), (12), (13*). Wegen $n = 1$ kommt in (12) nur gerades r, $r = 2k$, $k \in N$, in Frage. Für das durch

$$\tag{22} \begin{gathered} \tilde{v}(L_1L_2) = \tilde{v}(L_1)\tilde{v}(L_2) \quad \text{für} \quad L_1, L_2 \in {}_1\Gamma^*(q),\ q > 1, \\ \tilde{v}(L) = 1 \quad \text{für} \quad L \in {}_1\Gamma_0^*(q), \quad \tilde{v}(T) = -1 \end{gathered}$$

gegebene Multiplikatorsystem definiert man ganze Modulformen vom Gewicht $2k$ mit Multiplikatorsystem $\tilde{v}$ zu ${}_1\Gamma^*(q)$ im Fall $q > 1$, indem man (12) durch

$$\tag{23} f\big(L(z)\big) = \tilde{v}(L)(c_0z+d_0)^{2k}f(z) \quad \text{für} \quad L = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix} \in {}_1\Gamma^*(q)$$

ersetzt. Diese Funktionen bilden den Vektorraum $\{{}_1\Gamma^*(q), -2k, \tilde{v}\}$, der wieder endlich-dimensional ist. Die zu (14) analoge Entwicklung (zur Spitze ∞) hat für alle ganzen Modulformen zu diesen Gruppen die Form

$$\tag{24} f(z) = a(0;f) + \sum_{m=1}^{\infty} a(m;f)t^m \quad \text{mit} \quad t = e^{2\pi i \frac{z}{+\sqrt{q}}}.$$

Eine besondere Rolle spielen die Spitzenformen (d.h. die f, für die $a(0;f) = 0$ ist in der Entwicklung zu *jeder* Spitze der Gruppe).

Definition 2. *$\tilde{\Gamma}(q)$ sei eine der Gruppen ${}_1\Gamma_0^*(q)$, ${}_1\Gamma^*(q)$. Es sei $v(L) = 1$ für alle $L \in \tilde{\Gamma}(q)$ oder $v = \tilde{v}$* (s. (22)). *Zu $f \in \{\tilde{\Gamma}(q), -2k, v\}$ definiert man:*

$$f \in \{\tilde{\Gamma}(q), -2k, v\}^+ :\Leftrightarrow f \text{ ist Spitzenform}$$

und unter Verwendung der Peterssonschen Metrik ([9], § 2)

$$f \in \{\tilde{\Gamma}(q), -2k, v\}^\perp :\Leftrightarrow f \text{ orthogonal zu allen } g \in \{\tilde{\Gamma}(q), -2k, v\}^+.$$

Hilfssatz 3. *In der Bezeichnungsweise von Definition 2 gilt*

$$\tag{25} \{\tilde{\Gamma}(q), -2k, v\} \subset \{{}_1\Gamma_0^*(q), -2k, 1\}.$$

$f \in \{\tilde{\Gamma}(q), -2k, v\}$ ist genau dann Spitzenform bzw. orthogonal zu allen Spitzenformen, wenn diese Aussage für f als Element von $\{{}_1\Gamma_0^*(q), -2k, 1\}$ gilt. Man hat die folgenden Zerlegungen:

$$\tag{26} \{\tilde{\Gamma}(q), -2k, v\} = \{\tilde{\Gamma}(q), -2k, v\}^\perp \oplus \{\tilde{\Gamma}(q), -2k, v\}^+,$$

$$\tag{27} \{{}_1\Gamma_0^*(q), -2k, 1\} = \{{}_1\Gamma^*(q), -2k, 1\} \oplus \{{}_1\Gamma^*(q), -2k, \tilde{v}\}.$$

Beweis. (25) ist trivial. f ist natürlich genau dann Spitzenform, wenn es in $\{{}_1\Gamma_0^*(q), -2k, 1\}$ Spitzenform ist. Nach [8], S. 461 ff. gibt es eine Linearkombination f_0 von Eisensteinreihen so, daß $f - f_0$ Spitzenform ist. Da das Transformationsverhalten von f_0 bezüglich $\tilde{\Gamma}(q)$ durch das

Transformationsverhalten für die Werte in den Spitzen eindeutig bestimmt ist (vgl. [8], S. 461 ff., insbesondere S. 467), ist mit f auch $f_0 \in \{\tilde{\Gamma}(q), -2k, v\}$. Da f_0 orthogonal zu allen Spitzenformen ist ([9], Satz 2a), folgt

$$f \in \{{}_1\Gamma_0^*(q), -2k, 1\}^{\perp} \Leftrightarrow f - f_0 = 0 \Leftrightarrow f \in \{\tilde{\Gamma}(q), -2k, v\}^{\perp}.$$

(26) gilt nach [8], Satz 2. (27) folgt aus der eindeutigen Zerlegbarkeit jedes $f \in \{{}_1\Gamma_0^*(q), -2k, 1\}$ in einen bezüglich der Involution T symmetrischen Anteil (der in $\{{}_1\Gamma^*(q), -2k, 1\}$ liegt) und einen schiefsymmetrischen Anteil (aus $\{{}_1\Gamma^*(q), -2k, \tilde{v}\}$).

Satz 4. *$\sigma_0(\tilde{\Gamma}(q))$ sei die Spitzenzahl von $\tilde{\Gamma}(q)$ (aus Definition 2). Für $k \in \boldsymbol{N}$, $k > 1$ gilt*

$$\dim_{\boldsymbol{C}}\{\tilde{\Gamma}(q), -2k, 1\}^{\perp} = \sigma_0(\tilde{\Gamma}(q),) \quad \dim_{\boldsymbol{C}}\{\tilde{\Gamma}(q), -2, 1\}^{\perp} = \sigma_0(\tilde{\Gamma}(q)) - 1.$$

Für jedes $k \in \boldsymbol{N}$ ist

$$\dim_{\boldsymbol{C}}\{{}_1\Gamma^*(q), -2k, \tilde{v}\}^{\perp} = \sigma_0({}_1\Gamma_0^*(q)) - \sigma_0({}_1\Gamma^*(q)).$$

$p_0(\tilde{\Gamma}(q))$ sei das Geschlecht von $\tilde{\Gamma}(q)$. Es gilt

$$\dim_{\boldsymbol{C}}\{\tilde{\Gamma}(q), -2, 1\}^{+} = p_0(\tilde{\Gamma}(q)),$$

$$\dim_{\boldsymbol{C}}\{{}_1\Gamma^*(q), -2, \tilde{v}\}^{+} = p_0({}_1\Gamma_0^*(q)) - p_0({}_1\Gamma^*(q)).$$

Beweis. $\dim_{\boldsymbol{C}}\{\tilde{\Gamma}(q), -2k, 1\}^{\perp}$ ist wohlbekannt (vgl. [8], S. 474). Die Elemente von $\{\tilde{\Gamma}(q), -2, 1\}^{+}$ sind die Differentiale 1. Gattung, die Dimension ist also $p_0(\tilde{\Gamma}(q))$. Die restlichen Angaben folgen aus den Zerlegungen (26), (27).

Man kann in jedem Fall mit Hilfe von Eisensteinreihen eine Basis von $\{\tilde{\Gamma}(q), -2k, v\}^{\perp}$ konstruieren (s.o.). Besonders einfach liegen die Verhältnisse, wenn q quadratfrei ist.

Satz 5. *q sei quadratfrei, $\tilde{G}_{2k}(z)$, $k \in \boldsymbol{N}$, sei die Eisensteinreihe (18) zu ${}_1\Gamma$ im Gebiet $\operatorname{Im} z > 0$. Die Funktionen*

$$F_{2k}(z;\, u, v) = {}_+\sqrt{q}^{\,k}\left(\sqrt{\frac{u}{v}}\right)^{k} G_{2k}\left(\sqrt{\frac{u}{v}}\,z\right), \qquad u, v \in \boldsymbol{N},\ uv = q,$$

bilden für $k > 1$ eine Basis von $\{{}_1\Gamma_0^*(q), -2k, 1\}^{\perp}$. Die Funktionen

$$E_{2k}(z;\, u, v) = F_{2k}(z;\, u, v) - F_{2k}(z;\, v, u), \qquad u, v \in \boldsymbol{N},\ u > v,\ uv = q,$$

bilden im Fall $q > 1$ für jedes $k \in \boldsymbol{N}$ eine Basis von $\{{}_1\Gamma^*(q), -2k, \tilde{v}\}^{\perp}$. Es ist $\sigma_0({}_1\Gamma^*(q)) = \frac{1}{2}\sigma_0({}_1\Gamma_0^*(q))$. Für $k = 1$ ergibt sich

$$E_2(z;\, u, v) = \frac{u-v}{24} + \sum_{m=1}^{\infty}\Bigl(\sum_{v|d,\, d|m} d - \sum_{u|d,\, d|m} d\Bigr) t^m, \qquad t = e^{2\pi i \frac{z}{+\sqrt{q}}}$$

Beweis. Aus (12) für $\tilde{G}_{2k}$ und ${}_1\Gamma$ erhält man wegen

$$\begin{pmatrix} a & b_+\sqrt{q} \\ c_+\sqrt{q} & d \end{pmatrix} \in {}_1\Gamma_0^*(q) \Rightarrow \begin{pmatrix} a & bu \\ cv & d \end{pmatrix} \in {}_1\Gamma$$

und

$$\sqrt{\frac{u}{v}}\,\frac{az + b_+\sqrt{q}}{c_+\sqrt{q}\,z + d} = \left(a\sqrt{\frac{u}{v}}\,z + bu\right)\left(cv\sqrt{\frac{u}{v}}\,z + d\right)^{-1}$$

(12) für F_{2k} und ${}_1\Gamma_0^*(q)$. Nach Satz 1 und Satz 2 ergibt sich

$$F_{2k}(z;\, u, v) = \varkappa_{2k}(z;\, u, v) + u^{1-k}(-1)^k \sum_{m=1}^{\infty}\Bigl(\sum_{u|d,\, d|m} d^{2k-1}\Bigr) e^{2\pi i m \frac{z}{+\sqrt{q}}}$$

mit

$$\varkappa_{2k}(z;\, u, v) = \begin{cases} u^k[(2k-1)!](2\pi)^{-2k}\zeta(2k) & \text{für } k > 1, \\ \frac{1}{24}u - \dfrac{i}{4\pi}\,{}_+\sqrt{q}\,(z-\bar{z})^{-1} & \text{für } k = 1. \end{cases}$$

Die $F_{2k}(z;\, u, v)$ sind für $k > 1$ und die $E_{2k}(z;\, u, v)$ sind für jedes $k \in \boldsymbol{N}$, $q > 1$, holomorph, (11) gilt, und $E_2(z;\, u, v)$ hat die angegebene Entwicklung. Da man die F_{2k} mit Hilfe von Eisensteinreihen der Stufe q darstellen kann (vgl. [8], S. 461 ff.), ist auch (13*) erfüllt, und die F_{2k} bzw. die E_{2k} sind orthogonal zu allen Spitzenformen. Der Entwicklungskoeffizient der Nummer w in der Entwicklung von $F_{2k}(z;\, u, v)$ ist für $w | q$

$$a(w;\, F_{2k}(*;\, u, v)) = u^{1-k}(-1)^k \sum_{u|d,\, d|w} d^{2k-1} \begin{cases} = 0 & \text{für } u \nmid w, \\ \neq 0 & \text{für } u | w. \end{cases}$$

Hieraus erschließt man die lineare Unabhängigkeit der $F_{2k}(z;\, u, v)$. Ihre Anzahl ist, da q quadratfrei ist,

$$\sum_{u|q} 1 = \sum_{u|q} \varphi\left(\left(u, \frac{q}{u}\right)\right) = \sigma_0(q) = \sigma_0({}_1\Gamma_0^*(q)),$$

also nach Satz 4 für $k > 1$ gerade $\dim_{\boldsymbol{C}}\{{}_1\Gamma_0^*(q), -2k, 1\}^{\perp}$. Nun ist

$$\left(\sqrt{\frac{u}{v}}\right)^{k} G_{2k}\left(\sqrt{\frac{u}{v}}\left(-\frac{1}{z}\right)\right) = \left(\sqrt{\frac{u}{v}}\right)^{k} G_{2k}\left(-1\Big/\sqrt{\frac{v}{u}}\,z\right)$$

$$= z^{2k}\left(\sqrt{\frac{v}{u}}\right)^{k} G_{2k}\left(\sqrt{\frac{v}{u}}\,z\right).$$

Daher sind für $k > 1$, $u, v \in \boldsymbol{N}$, $u > v$, $uv = q$ die

$$F_{2k}(z;\, u, v) + F_{2k}(z;\, v, u) \in \{{}_1\Gamma^*(q), -2k, 1\}^{\perp},$$

$$E_{2k}(z;\, u, v) \in \{{}_1\Gamma^*(q), -2k, \tilde{v}\}^{\perp}$$

und bilden wegen der Zerlegungen aus Hilfssatz 3 jeweils eine Basis. Vergleicht man die Dimensionen und benutzt Satz 4, so erhält man $\sigma_0({}_1\Gamma^*(q)) = \frac{1}{2}\sigma_0({}_1\Gamma_0^*(q))$. Damit ist die Anzahl der $E_{2k}(z; u, v)$ für $u, v \in \boldsymbol{N}$, $u > v$, $uv = q$ aber auch für $k = 1$ gleich der Dimension von $\{{}_1\Gamma^*(q), -2k, \tilde{v}\}^\perp$, die $E_{2k}(z; u, v)$ bilden auch in diesem Fall eine Basis.

Für $q = 1$, ${}_1\Gamma_0^*(1) = {}_1\Gamma$, sind die ganzen Modulformen wohlbekannt (vgl. [12], § 1). Für $k \leqslant 5$ ist insbesondere $\dim_C\{{}_1\Gamma, -2k, 1\}^+ = 0$,

$$(28)\qquad \dim_C\{{}_1\Gamma, -2k, 1\} = \dim_C\{{}_1\Gamma, -2k, 1\}^\perp = \begin{cases} 0 & \text{für } k = 1, \\ 1 & \text{für } 2 \leqslant k \leqslant 5. \end{cases}$$

$\{{}_1\Gamma, -2k, 1\}$ wird für $2 \leqslant k \leqslant 5$ von der Eisensteinreihe $\tilde{G}_{2k}$ erzeugt.

Auch für $q > 1$ kann man $\{{}_1\Gamma_0^*(q), -2k, 1\}^\perp$ immer mit Hilfe von Eisensteinreihen erzeugen (s. den Beweis von Hilfssatz 3; für quadratfreies q und $k > 1$ vgl. Satz 4). Wegen (26) ist damit $\{{}_1\Gamma_0^*(q), -2k, 1\}$ bekannt, wenn $\dim_C\{{}_1\Gamma_0^*(q), -2k, 1\}^+ = 0$ ist. Das ist der Fall für $k = 1$, $p_0({}_1\Gamma_0^*(q)) = 0$ (vgl. die Werte in (19)) sowie für $k = 2$, $q = 2, 3$, denn es ist

$$(29)\qquad \{{}_1\Gamma_0^*(q), -4, 1\} = \{{}_1\Gamma_0^*(q), -4, 1\}^\perp \quad \text{für} \quad q = 2, 3,$$

weil hier für $f \neq 0$ aus $\{{}_1\Gamma_0^*(q), -4, 1\}$ die Ordnung des Divisors (s. [9], (66)) kleiner als 2 ausfällt, f also nicht in beiden Spitzen von ${}_1\Gamma_0^*(q)$ verschwinden kann. In allen anderen Fällen muß man wegen $\dim_C\{{}_1\Gamma_0^*(q), -2k, 1\}^+ > 0$ zur Aufstellung einer Basis von $\{{}_1\Gamma_0^*(q), -2k, 1\}$ zusätzlich zu den Eisensteinreihen weitere Funktionen konstruieren. Eichler hat gezeigt ([1], Satz 1), daß die Funktionen aus $\{{}_1\Gamma_0^*(q), -2, 1\}$ Linearkombinationen von Thetareihen sind, falls q eine Primzahl ist (das gilt auch für $\{{}_1\Gamma_0^*(q), -2k, 1\}$ für jedes k, falls q auch noch hinreichend groß ist, s. [1], Satz 3). Für gewisse Nichtprimzahlen q ist das nicht mehr richtig ([1], Satz 2). Zur Aufstellung der Thetareihen muß man natürlich passende quadratische Formen konstruieren. Eine weitere Möglichkeit zur Gewinnung zusätzlicher Funktionen aus $\{{}_1\Gamma_0^*(q), -2k, 1\}$ ergibt sich mit Hilfe der Spurbildung aus Modulformen zu Hilbertschen Modulgruppen (s. § 3).

Entsprechend liegen die Verhältnisse bei $\{{}_1\Gamma^*(q), -2k, \tilde{v}\}$. Es gilt

Satz 6. *Es sei* $q \in \boldsymbol{N}, > 1$, *quadratfrei*, $t = e^{2\pi i \frac{z}{+\sqrt{q}}}$. *Die Funktion*

$$E_2(z; q, 1) = \frac{q-1}{24} + t + \begin{cases} \ldots & \text{für } q < 5, \\ 3t^2 + 4t^3 + 7t^4 + \ldots & \text{für } q \geqslant 5, \end{cases}$$

ist eine Basis von $\{{}_1\Gamma^*(q), -2, \tilde{v}\}^\perp$, *falls* q *Primzahl ist. Ist dagegen* $q = p_1 p_2$, p_1, p_2 *Primzahlen*, $p_1 > p_2$, *so kommt noch die Funktion*

$$E_2(z; p_1, p_2) = \tfrac{1}{24}(p_1 - p_2) + 0 \cdot t + \ldots + 0 \cdot t^{p_2 - 1} + p_2 t^{p_2} + \ldots$$

hinzu. Hat q *mehr als zwei Primteiler, so kommen zu* $E_2(z; q, 1)$ *entsprechend weitere Funktionen* $E_2(z; u, v)$ *hinzu (s. Satz 5). Es gilt*

$$\{{}_1\Gamma^*(q), -2, \tilde{v}\} = \{{}_1\Gamma^*(q), -2, \tilde{v}\}^\perp \Leftrightarrow p_0({}_1\Gamma_0^*(q)) = 0.$$

Die Anzahl der Funktionen, die man für die Ergänzung einer Basis von $\{{}_1\Gamma^*(q), -2, \tilde{v}\}^\perp$ *zu einer Basis von* $\{{}_1\Gamma^*(q), -2, \tilde{v}\}$ *benötigt, ist*

$$(30)\qquad p_0({}_1\Gamma_0^*(q)) - p_0({}_1\Gamma^*(q)) = \tfrac{1}{2}p_0({}_1\Gamma_0^*(q)) - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}\delta_q h(-4q).$$

Es ist

$$p_0({}_1\Gamma_0^*(q)) - p_0({}_1\Gamma^*(q)) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad q \leqslant 10 \text{ und für } q = 13, \\ 1 & \text{für} \quad q = 11, 14, 15, 17, 19, 21, 22, 37, \\ 2 & \text{für} \quad q = 23, 26, 29, 31, 43. \end{cases}$$

Beweis. Die Basis von $\{{}_1\Gamma^*(q), -2, \tilde{v}\}^\perp$ entnimmt man aus Satz 5. Die linke Seite von (30) ist nach Satz 4 gleich $\dim_C\{{}_1\Gamma^*(q), -2, \tilde{v}\}^+$, die rechte Seite ergibt sich durch Einsetzen von $p_0({}_1\Gamma^*(q))$ aus (20). Ist $p_0({}_1\Gamma_0^*(q)) = 0$, so ist die linke Seite von (30) nicht positiv, ist dagegen $p_0({}_1\Gamma_0^*(q)) > 0$, so ist die rechte Seite positiv. Für $q \leqslant 21$ ist $p_0({}_1\Gamma_0^*(q)) = 0$ oder 1 (vgl. (19)) und $p_0({}_1\Gamma^*(q)) = 0$ (Hilfssatz 2). Für $q \geqslant 22$ muß man die rechte Seite von (30) ausrechnen.

Aus Satz 6 ergibt sich noch

$$(31)\qquad \dim_C\{{}_1\Gamma^*(q), -2, \tilde{v}\} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad q = 2, 3, 5, 7, 13, \\ 2 & \text{für} \quad q = 6, 10, 11, 17, 19, 37, \\ 3 & \text{für} \quad q = 14, 15, 21, 22, 23, 29, 31, 43. \end{cases}$$

Für $q = 2, 3, 5, 7, 13$ besteht $\{{}_1\Gamma^*(q), -2, \tilde{v}\}$ aus den Vielfachen von $E_2(z; q, 1)$. Daraus folgt

Hilfssatz 4. *Für* $q = 2, 3, 5, 7, 13$ *ist in der Entwicklung* (24)

$$a(0; f) = \tfrac{1}{24}(q-1)a(1; f) \quad \text{für alle } f \in \{{}_1\Gamma^*(q), -2, \tilde{v}\}.$$

§ 3. Die Spurbildung und ihre Anwendungen. Wie in [6], § 5 vereinbart man (mit $\tau = \frac{\xi}{+\sqrt{q}} z$, $z \in \mathfrak{H}_1$ als Abkürzung für $\tau^{(j)} = \frac{\xi^{(j)}}{+\sqrt{q}} z$, $z \in \mathfrak{H}_1$, $1 \leqslant j \leqslant n$)

Definition 3. *Es sei* $\xi \in K$, *ganz*, $\neq 0$, $\operatorname{sign} \xi^{(j)} = e_j$, *also*

$$\mathcal{N}(\xi) = q \operatorname{sign} \mathfrak{e} \quad \text{mit} \quad q \in \boldsymbol{N},\ \mathfrak{e} = (e_1, e_2, \ldots, e_n).$$

${}_+\sqrt{q}$ *sei die positive Wurzel aus* q *in* $\boldsymbol{R}$. *Man definiert (vgl. [6])*

$$\mathfrak{A}_\xi = \left\{\tau \;\middle|\; \tau = \frac{\xi}{+\sqrt{q}} z,\ z \in \mathfrak{H}_1\right\}, \qquad \xi^* = \frac{1}{\xi} q \operatorname{sign} \mathfrak{e}$$

und für jede in $\mathfrak{H}_e$ definierte Funktion f die Spur bezüglich $\mathfrak{A}_\xi$ durch

$$\mathscr{S}_\xi f(z) = f\left(\frac{\xi}{{}_+\sqrt{q}}\,z\right) \quad \text{für} \quad z \in \mathfrak{H}_1.$$

Satz 7. *Für ξ aus Definition 3, ${}_1\Gamma_0^*(q)$ aus § 2, ${}_1\Gamma_0^*(1) = {}_1\Gamma$ gilt*

$$f \in \{\Gamma, -r, 1; \mathfrak{e}\} \Rightarrow \mathscr{S}_\xi f \in \{{}_1\Gamma_0^*(q), -nr, 1\}.$$

Die Fourierentwicklung (24) *von $\mathscr{S}_\xi f$ ist*

$$\mathscr{S}_\xi f(z) = a(0; f, \xi) + \sum_{m=1}^{\infty} a(m; f, \xi) t^m \quad \text{mit} \quad t = e^{2\pi i \frac{z}{{}_+\sqrt{q}}};$$

darin ist, mit den Koeffizienten $a(\nu; f)$ aus (14), *für $m \in \boldsymbol{N}$*

$$a(0; f, \xi) = a(0; f), \quad a(m; f, \xi) = \sum_{\mathfrak{d}^{-1}|\nu,\, \nu\xi \gg 0,\, \mathscr{S}\nu\xi = m} a(\nu; f).$$

Beweis. Es ist $\xi\xi^* = q\,\mathrm{sign}\,\mathfrak{e} = \mathscr{N}(\xi)$ (vgl. [6]). (12) geht wegen

$$L_0 = \begin{pmatrix} a & b_+\sqrt{q} \\ c_+\sqrt{q} & d \end{pmatrix} \in {}_1\Gamma_0^*(q) \Rightarrow L = \begin{pmatrix} a & b\xi \\ c\delta\xi^* & d \end{pmatrix} \in \Gamma \quad (\delta = \mathrm{sign}\,\mathfrak{e})$$

auf $\mathfrak{A}_\xi$ in (12) für $\mathscr{S}_\xi f$, nr und ${}_1\Gamma_0^*(q)$ über, denn es ist

$$\frac{\xi}{{}_+\sqrt{q}} L_0(z) = L\left(\frac{\xi}{{}_+\sqrt{q}}\,z\right), \qquad \mathscr{N}(c_+\sqrt{q}z + d)^r = (c_+\sqrt{q}z + d)^{nr}.$$

(11) bleibt trivialerweise erhalten, (13*) für $\mathscr{S}_\xi f$, ${}_1\Gamma_0^*(q)$ folgt aus (13), die angegebene Entwicklung von $\mathscr{S}_\xi f$ erhält man aus (14) durch Einsetzen von $\tau = \frac{\xi}{{}_+\sqrt{q}}\,z$, da $\mathscr{S}\nu\frac{\xi}{{}_+\sqrt{q}}\,z = (\mathscr{S}\nu\xi)\frac{z}{{}_+\sqrt{q}}$ ist.

Satz 8. *Es sei $n = 2$. Zu $\tau = (\tau^{(1)}, \tau^{(2)})$ setzt man $\tau^* = (\tau^{(2)}, \tau^{(1)})$, $L_*(\tau) = \mathrm{sign}\,\mathfrak{e}\tau^* = (\mathrm{sign}\,\mathfrak{e}\tau^{(2)}, \mathrm{sign}\,\mathfrak{e}\tau^{(1)})$. Ist $f \in \{\Gamma, -r, 1\}$ und*

$$f(\mathrm{sign}\,\mathfrak{e}\tau^*) = v(L_*)f(\tau) \quad \text{mit} \quad v(L_*) = 1 \text{ bzw. } -1$$

(f symmetrisch bzw. schiefsymmetrisch), so gilt für ξ aus Definition 3

$$\left.\begin{aligned} v(L_*) &= (\mathrm{sign}\,\mathfrak{e})^r \Rightarrow \mathscr{S}_\xi f \in \{{}_1\Gamma^*(q), -2r, 1\}, \\ v(L_*) &= -(\mathrm{sign}\,\mathfrak{e})^r \Rightarrow \mathscr{S}_\xi f \in \{{}_1\Gamma^*(q), -2r, \tilde{v}\}. \end{aligned}\right\} \quad (\text{für } q > 1).$$

Beweis. (Vgl. [6], Satz 9.) Nach Satz 7 ist $\mathscr{S}_\xi f \in \{{}_1\Gamma_0^*(q), -2r, 1\}$; es ist

$$f\left(\frac{\xi}{{}_+\sqrt{q}}\left(-\frac{1}{z}\right)\right) = f\left(-1\Big/\frac{\xi^*}{{}_+\sqrt{q}}\,\mathrm{sign}\,\mathfrak{e}z\right) = \mathscr{N}(\xi^*)^r\left(\frac{\mathrm{sign}\,\mathfrak{e}}{{}_+\sqrt{q}}\,z\right)^{2r} f\left(\frac{\xi^*}{{}_+\sqrt{q}}\,\mathrm{sign}\,\mathfrak{e}z\right)$$
$$= (\mathrm{sign}\,\mathfrak{e})^r v(L_*) z^{2r} \mathscr{S}_\xi f(z).$$

Satz 9. *Es sei $n = 2$, ξ aus Definition 3, $q > 1$. Dann ist*

$$\mathscr{S}_\xi \tilde{G}_1(*; \mathfrak{a}; \mathfrak{e}) \in \{{}_1\Gamma^*(q), -2, \tilde{v}\}.$$

Beweis. $\mathfrak{a}^*$ sei das zu $\mathfrak{a}$ konjugierte Ideal. Trivialerweise ist

$$\tilde{G}_1(\mathrm{sign}\,\mathfrak{e}\tau^*; \mathfrak{a}; \mathfrak{e}) = \tilde{G}_1(\tau; \mathfrak{a}^*; \mathfrak{e}).$$

Da $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^*$ und $\mathfrak{d}$ Hauptideale sind, gehört $\mathfrak{a}^*$ zur Idealklasse von $\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{d}^{-1}$. Nach [4], Satz 5 unterscheiden sich $\tilde{G}_1(\tau; \mathfrak{a}^*; \mathfrak{e})$ und $\tilde{G}_1(\tau; \mathfrak{a}; \mathfrak{e})$ nur um einen konstanten Faktor, nämlich (s.d. mit $\mathfrak{x} = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{y} = \mathfrak{a}^*$) um

$$\chi(\mathfrak{a}^*)^{-1}\chi(\mathfrak{a})\,\mathrm{sign}\,\mathfrak{e}\,\chi(\mathfrak{d}^{-1}\mathfrak{a}^{-2}) = \chi(\mathfrak{a}^*\mathfrak{a})^{-1}\chi(\mathfrak{d})^{-1}\mathrm{sign}\,\mathfrak{e}.$$

Wegen $\chi(\mathfrak{a}^*\mathfrak{a}) = 1$, $\chi(\mathfrak{d}) = \chi((\sqrt{d_K})) = -1$ erhält man damit

$$\tilde{G}_1(\mathrm{sign}\,\mathfrak{e}\tau^*; \mathfrak{a}; \mathfrak{e}) = -\mathrm{sign}\,\mathfrak{e}\tilde{G}_1(\tau; \mathfrak{a}; \mathfrak{e}), \qquad v(L_*) = -\mathrm{sign}\,\mathfrak{e}.$$

Zur Bestimmung von $\zeta_K(r; \mathfrak{K})$ bzw. $\zeta_K(r; \mathfrak{K}, \chi)$ für $2 | r$ bzw. $2 \nmid r$ wählt man zunächst $\xi = 1$, $\mathfrak{e} = \mathfrak{e}_0 = (1, \ldots, 1)$ und eine Basis (2) von $\{{}_1\Gamma, -nr, 1\}$. Nach Satz 7 ist $\mathscr{S}_1\tilde{G}_r(*; \mathfrak{a}; \mathfrak{e}_0) \in \{{}_1\Gamma, -nr, 1\}$, die Entwicklungskoeffizienten sind $a_0 = \tilde{a}_r(0; \mathfrak{a}; \mathfrak{e}_0)$ und für $m \geqslant 1$

$$\text{(32)} \qquad a_m = a(m; \tilde{G}_r(*; \mathfrak{a}; \mathfrak{e}_0), 1) = \sum_{\mathfrak{d}^{-1}|\nu,\, \nu \gg 0,\, \mathscr{S}\nu = m} \tilde{a}_r(\nu; \mathfrak{a}).$$

Trägt man die Werte von $\tilde{a}_r(\nu; \mathfrak{a})$ aus Satz 1 ein, so erhält man $\tilde{a}_r(0; \mathfrak{a}; \mathfrak{e}_0) = a_0$ aus (5). Setzt man den Wert von $\tilde{a}_r(0; \mathfrak{a}; \mathfrak{e}_0)$ aus Satz 1 ein, so geht (5), wenn man in (3) $k(nr) = l(nr)$ gewählt hat, bis auf einen Normierungsfaktor in (22) aus [12] über. Ist insbesondere $4 \leqslant nr \leqslant 10$, so besteht die Basis (2) nur aus einer Eisensteinreihe (vgl. (28)). Das ergibt für $4 \leqslant nr \leqslant 10$

$$\text{(33)} \qquad \tilde{a}_r(0; \mathfrak{a}; \mathfrak{e}_0) = (-1)^{nr/2}\frac{(nr-1)!}{(2\pi)^{nr}}\zeta(nr) \sum_{\mathfrak{d}^{-1}|\nu,\, \nu \gg 0,\, \mathscr{S}\nu = 1} \tilde{a}_r(\nu; \mathfrak{a}).$$

Ist $r > 1$, so erhält man aus dem Wert von $\tilde{a}_r(0; \mathfrak{a}; \mathfrak{e}_0) = a_0$ aus (5) (mit a_m aus (32)) bzw. im Sonderfall $4 \leqslant nr \leqslant 10$ aus (33) nach Satz 1 unmittelbar $\zeta_K(r; \mathfrak{K})$ bzw. $\zeta_K(r; \mathfrak{K}, \chi)$.

Will man den Fall $r = 1$ mit erfassen, so wählt man ein ξ mit $\mathscr{N}(\xi) < 0$. Dann ist (Definition 3) $\mathrm{sign}\,\mathfrak{e} = -1$. Kann man ξ so wählen, daß eine Basis von $\{{}_1\Gamma_0^*(q), -nr, 1\}$ bekannt ist (wie z.B. für $nr = 4$, $q = 2, 3$ wegen (29)), so erhält man für die Entwicklungskoeffizienten jeder Funktion aus $\{{}_1\Gamma_0^*(q), -nr, 1\}$ eine zu (5) analoge Relation

$$\text{(34)} \qquad a_0 = c_1(nr, q)a_1 + \ldots + c_{k(nr,q)}(nr, q)a_{k(nr,q)}.$$

Setzt man $a_m = a(m; \tilde{G}_r(*; \mathfrak{a}; \mathfrak{e}), \xi)$ aus Satz 7 in (34) ein, so erhält man $\tilde{a}_r(0; \mathfrak{a}; \mathfrak{e}) = a_0$. Ist $r > 1$, so liefert $\tilde{a}_r(0; \mathfrak{a}; \mathfrak{e})$ eine zusätzliche Bestimmungsmöglichkeit für $\zeta_K(r;\mathfrak{K})$ bzw. $\zeta_K(r;\mathfrak{K},\chi)$. Ist $r=1$, so kann man $\zeta_K(1;\mathfrak{K},\chi)$ nach Satz 1 aus $\tilde{a}_1(0;\mathfrak{a};\mathfrak{e}_0)$ mit $\operatorname{sign}\mathfrak{e}_0=1$ und $\tilde{a}_1(0;\mathfrak{a};\mathfrak{e})$ mit $\operatorname{sign}\mathfrak{e}=-1$ bestimmen.

Ist $n=2$, $r=1$, so braucht man $\tilde{a}_1(0;\mathfrak{a};\mathfrak{e})$ wegen Satz 3 nur für $\operatorname{sign}\mathfrak{e}=-1$ zu berechnen. Nach Satz 9 genügt es, eine Basis von $\{{}_1\Gamma^*(q),-2,\tilde{v}\}$ zu bestimmen. Besonders einfach liegen die Verhältnisse, falls $\dim_C\{{}_1\Gamma^*(q),-2,\tilde{v}\}=1$ ist (s. (31)). Setzt man für diese Werte von q in Hilfssatz 4 die Koeffizienten von $\mathscr{S}_\xi\tilde{G}_1(*;\mathfrak{a};\mathfrak{e})$ aus Satz 7 und $\tilde{a}_1\left(\frac{\nu}{\sqrt{d_K}};\mathfrak{a}\right)$ aus Hilfssatz 1 ein, so folgt

Satz 10. *Es sei $n=2$. $\mathfrak{b}$ sei ein Ideal, für das $\mathfrak{a}\mathfrak{b}=(\varrho)\neq(0)$ Hauptideal ist. Gibt es eine ganze Zahl $\xi\in K$ mit $\mathscr{N}(\xi)=-q$ und $q=2,3,5,7$ oder 13, so ist für $\operatorname{sign}\mathfrak{e}=-1$ mit $\xi_0=\frac{\xi}{\sqrt{d_K}}$*

$$\tilde{a}_1(0;\mathfrak{a},\mathfrak{e})=\frac{q-1}{24}\operatorname{sign}\mathscr{N}(\varrho)\sum_{\substack{\nu\text{ ganz},\ \nu\xi_0\gg0\\ \mathscr{S}\nu\xi_0=1}}\ \sum_{\mathfrak{b}|(\mu)|\mathfrak{b}(\nu)}\operatorname{sign}\mathscr{N}(\nu).$$

Eine Auswahl von Möglichkeiten, eine ganze Zahl $\xi\in K$ mit $\mathscr{N}(\xi)=-q$ und passendem q zu wählen, gibt

Satz 11. *Es sei $n=2$. K habe die Klassenzahl 1. Dann ist $d_K=8$ oder*

$$d_K=4p \text{ oder } 8p \text{ oder } p_1p_2,\quad p,p_1,p_2 \text{ Primzahlen}\equiv 3\bmod(4).$$

Ist $d_K=8$ oder sind p bzw. $p_1,p_2\equiv 3\bmod(8)$, so gibt es eine ganze Zahl $\xi\in K$ mit $\mathscr{N}(\xi)=-2$.

Eine ganze Zahl $\xi\in K$ mit $\mathscr{N}(\xi)=-q$ kann man für folgende q wählen:

$d_K=4p,\ p\equiv$	$0,1\bmod(3)$	$0,1,2,4\bmod(7)$	$0,1,3,4,5,9\bmod(11)$
q	3	7	11

$d_K=8p,\ p\equiv$	$2,3\bmod(5)$	$0,1,2,4\bmod(7)$	$2,5,6,7,8,11\bmod(13)$
q	5	7	13

$d_K=p_1p_2;\ p_1,p_2\equiv$	$0,1\bmod(3)$	$2,3\bmod(5)$	$0,1,2,4\bmod(7)$
q	3	5	7

(Im letzten Fall braucht p_1 natürlich nicht kongruent p_2 zu sein.)

Beweis. Hat K die Klassenzahl 1, so ist d_K bekanntlich Stammdiskriminante oder Produkt zweier negativer Stammdiskriminanten, hat also einen der angegebenen Werte. Damit es zu einer Primzahl q eine ganze Zahl $\xi\in K$ mit $|\mathscr{N}(\xi)|=q$ geben kann, muß q verzweigt oder zerlegt sein, d.h. $q|d_K$ oder $\left(\frac{d_K}{q}\right)=1$ ($d_K\equiv 1\bmod(8)$ für $q=2$). Ist $\left(\frac{q}{p}\right)$ bzw. $\left(\frac{q}{p_1}\right)$ oder $\left(\frac{q}{p_2}\right)$ gleich -1, so kann nicht $\mathscr{N}(\xi)=q$ sein. Da K die Klassenzahl 1 hat, muß es ein ξ, ξ ganz, mit $\mathscr{N}(\xi)=-q$ geben. Satz 11 gibt zu gegebenem q für p bzw. p_1,p_2 die passenden Restklassen $\bmod(q)$ an (für $3,7,11$ die Quadrate, für 5, 13 die Nichtquadrate).

Hat d_K die in Satz 11 angegebene Form, ohne daß K die Klassenzahl 1 hat, so gibt Satz 11 einen Hinweis, welche Werte von q man versuchen sollte. Es kann jetzt aber vorkommen, daß es keine ganze Zahl ξ mit $\mathscr{N}(\xi)=-q$ gibt, nämlich dann, wenn die Primideale der Norm q keine Hauptideale sind.

Bei den Körpern $K=\boldsymbol{Q}(\sqrt{D})$, D quadratfrei, $D<100$ mit Klassenzahl 1 und total-positiver Grundeinheit (für $r=1$ muß $\mathscr{N}(\varepsilon)=1$ für jede Einheit ε sein) kann man für q immer einen der Werte $2,3,5,7,13$ wählen, mit Ausnahme von $D=47$, wo man $q=11$ nehmen muß (s. Tabelle 1).

Muß man auf ein quadratfreies q mit $p_0({}_1\Gamma_0^*(q))>0$ zurückgreifen (wie für $\boldsymbol{Q}(\sqrt{47})$), so muß man zunächst die über die $E_2(z;u,v)$ hinaus nach Satz 6 erforderliche Anzahl weiterer Basiselemente von $\{{}_1\Gamma^*(q),-2,\tilde{v}\}$ bestimmen. Dazu kann man folgendermaßen vorgehen. Aus der Liste derjenigen Körper, die man mit Satz 10 erfaßt, wählt man einen Körper K aus, in dem es eine ganze Zahl ξ mit $\mathscr{N}(\xi)=-q$ gibt. Für jedes ganze Ideal $\mathfrak{a}\neq(0)$ von K kann man dann $\tilde{a}_1(0;\mathfrak{a};\mathfrak{e})$ für $\operatorname{sign}\mathfrak{e}=-1$ nach Satz 10 ausrechnen. Damit ist $\mathscr{S}_\xi\tilde{G}_1(*;\mathfrak{a};\mathfrak{e})$, $e_j=\operatorname{sign}\xi^{(j)}$, eine explizit bekannte Funktion aus $\{{}_1\Gamma^*(q),-2,v\}$. Dieses Verfahren (d.h. die Auswahl passender K, ξ und $\mathfrak{a}$) setzt man fort, bis man eine Basis von $\{{}_1\Gamma^*(q),-2,\tilde{v}\}$ aufgestellt hat. Dazu muß man die nach Satz 6 nötige Anzahl von Funktionen bestimmen und die lineare Unabhängigkeit des Gesamtsystems (einschließlich der $E_2(z;u,v)$) mit Hilfe des Anfanges der Entwicklung (24) überprüfen (die Koeffizienten der $E_2(z;u,v)$ entnimmt man aus Satz 5 oder Satz 6, die Koeffizienten der $\mathscr{S}_\xi\tilde{G}_1(*;\mathfrak{a};\mathfrak{e})$ aus Satz 7). Für die Werte q aus Satz 6 erhält man so

Satz 12. *Zu q (wie unten) kann man die $E_2(z;u,v)$ aus Satz 6 auf folgende Weise zu einer Basis von $\{{}_1\Gamma^*(q),-2,\tilde{v}\}$ ergänzen:*

Man nimmt die Funktionen $\mathscr{S}_\xi\tilde{G}_1(*;(1);\mathfrak{e})$, $e_j=\operatorname{sign}\xi^{(j)}$, für je eine ganze Zahl $\xi\in\boldsymbol{Q}(\sqrt{D})$ mit $\mathscr{N}(\xi)=-q$ für folgende D hinzu:

q	11	14	15	17	19	21	22	37	23	26	29	31	43
D	3	7	6	21	7	21	23	38	3	3	6	7	11
									6	14	33	14	23
	11	14	19	33	19	46	31	86	23	43	22	31	43

Die letzte Zeile enthält zusätzliche Wahlmöglichkeiten für D (z.B. für Kontrollrechnungen).

Man überlegt sich leicht, daß $\mathscr{S}_\xi \tilde{G}_1(*;(1);\mathfrak{e})$, $e_j = \operatorname{sign}\xi^{(j)}$, nur vom Ideal (ξ) abhängt und daß die Konjugierte ξ^* von ξ dieselbe Funktion liefert wie ξ. Ist also q Primzahl oder $q = p_1 p_2$, p_1, p_2 Primzahlen, $p_1 | d_K$, so erhält man für alle ganzen $\xi \in K$ mit $\mathscr{N}(\xi) = -q$ dieselbe Funktion, es genügt daher die Angabe von d_K (z.B. im Hauptteil der Tabelle in Satz 12). Dagegen ist

$$\mathscr{S}_{2+\sqrt{19}} \tilde{G}_1(*;(1);\mathfrak{e}) \neq \mathscr{S}_{74+17\sqrt{19}} \tilde{G}_1(*;(1);\mathfrak{e}) \qquad (\text{für } q = 15).$$

In der Tabelle in Satz 12 sind möglichst kleine Werte für d_K benutzt. Die naheliegende Wahl $D = q$ ist nicht immer brauchbar; so erhält man für $q = 22$ auf diese Weise nur ein Element von $\{{}_1\Gamma^*(22), -2, \tilde{v}\}^{\perp}$.

Benutzt man an Stelle von (2) die in Satz 12 angegebene Basis von $\{{}_1\Gamma^*(q), -2, \tilde{v}\}$ (bzw. für $q = 6, 10$ die Basis aus Satz 6) mit der Entwicklung (24), so erhält man eine (5) entsprechende Relation für die Koeffizienten der Entwicklung (24) für alle $f \in \{{}_1\Gamma^*(q), -2, \tilde{v}\}$.

Satz 13. *Zu q (wie unten) gilt für die Koeffizienten $a_m = a(m;f)$ der Entwicklung (24) jeder Funktion $f \in \{{}_1\Gamma^*(q), -2, \tilde{v}\}$*

$$a_0 = c_1 a_1 + c_2 a_2 \quad \textit{bzw.} \quad a_0 = c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3$$

mit den folgenden Werten von c_1, c_2 bzw. c_1, c_2, c_3:

q	6	10	11	17	19	37	14	15	21	22	23	29	31	43
c_1	$\frac{7}{48}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{7}{48}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{12}$	0	0	0
c_2	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{48}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
c_3							$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

Für $q = 26$ ist $a_0 = \frac{1}{16}a_1 + \frac{1}{6}a_2 + \frac{1}{12}a_3 + \frac{1}{48}a_4$.

Damit kann man (34) für $n = 2$, $r = 1$ und die angegebenen Werte von q hinschreiben und erhält ein Analogon zu Satz 10.

Satz 14. *Es sei $n = 2$. $\mathfrak{b}$ sei ein Ideal, für das $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = (\varrho) \neq (0)$ Hauptideal ist. Gibt es eine ganze Zahl $\xi \in K$ mit $\mathscr{N}(\xi) = -q$, worin q einen der Werte aus Satz 13 hat, so erhält man*

$$a_0 = \tilde{a}_1(0;\mathfrak{a};\mathfrak{e}) = (2\pi^2)^{-1}{}_+\sqrt{d_K}\,\chi(\mathfrak{a})\,\zeta_K(1;\mathfrak{K},\chi) \quad \textit{für} \quad \operatorname{sign}\mathfrak{e} = -1,$$

indem man in Satz 13 in der Relation zu dem betreffenden q

$$a_m = \operatorname{sign}\mathscr{N}(\varrho) \sum_{\nu \text{ ganz}, \nu\xi_0 \gg 0, \mathscr{S}\nu\xi_0 = m} \; \sum_{\mathfrak{b}|(\mu)|\mathfrak{b}(\nu)} \operatorname{sign}\mathscr{N}(\mu), \qquad \xi_0 = \frac{\xi}{\sqrt{d_K}}$$

setzt.

In jedem Körper $K = \boldsymbol{Q}(\sqrt{D})$, D quadratfrei, $D < 200$ (mit total-positiver Grundeinheit), der nicht schon unter Satz 10 fällt, gibt es eine ganze Zahl ξ mit $\mathscr{N}(\xi) = -q$ und einem der Werte aus Satz 13 für q. Es handelt sich für $D < 100$ um $\boldsymbol{Q}(\sqrt{47})$, einige Körper der Klassenzahl 2 und den Körper $\boldsymbol{Q}(\sqrt{79})$ mit der Klassenzahl 3 (s. Tabellen).

Für andere Werte von q und im Fall $nr > 2$ muß man analog vorgehen. Will man die Werte von Zetafunktionen mit Kongruenzbedingungen bestimmen, so muß man Eisensteinreihen zu Untergruppen von Γ benutzen. In Satz 7 ist dann ${}_1\Gamma_0^*(q)$ durch eine passende Untergruppe zu ersetzen.

In den folgenden Tabellen sind für die $K = \boldsymbol{Q}(\sqrt{D})$ mit D quadratfrei, $D < 100$, und total-positiver Grundeinheit jeweils 2 Werte von q, für die es ein ganzes $\xi \in K$ mit $\mathscr{N}(\xi) = -q$ gibt, zur Auswahl und (für $\operatorname{sign}\mathfrak{e} = -1$)

$$\tilde{a}_1(0;\mathfrak{a};\mathfrak{e}) = (2\pi^2)^{-1}{}_+\sqrt{d_K}\,\chi(\mathfrak{a})\,\zeta_K(1;\mathfrak{K},\chi) \qquad (\mathfrak{a}^{-1} \in \mathfrak{K})$$

für Vertreter der Idealklassen angegeben.

Tabelle 1 $\left(h(\boldsymbol{Q}(\sqrt{D})) = 1\right)$

D	q	$\tilde{a}_1(0;(1);\mathfrak{e})$	D	q	$\tilde{a}_1(0;(1);\mathfrak{e})$
3	2, 3	$\frac{1}{12}$	46	5, 7	$\frac{3}{2}$
6	2, 5	$\frac{1}{6}$	47	11, 19	$\frac{5}{4}$
7	3, 7	$\frac{1}{4}$	57	2, 3	$\frac{1}{6}$
11	2, 7	$\frac{1}{4}$	59	2, 10	$\frac{3}{4}$
14	5, 7	$\frac{1}{2}$	62	13, 23	$\frac{3}{2}$
19	2, 3	$\frac{1}{4}$	67	2, 3	$\frac{1}{4}$
21	3, 5	$\frac{1}{6}$	69	5, 11	$\frac{1}{2}$
22	2, 7	$\frac{1}{2}$	71	7, 11	$\frac{7}{4}$
23	7, 11	$\frac{3}{4}$	77	7, 13	$\frac{1}{2}$
31	3, 15	$\frac{3}{4}$	83	2, 19	$\frac{3}{4}$
33	2, 11	$\frac{1}{6}$	86	2, 5	$\frac{1}{2}$
38	2, 13	$\frac{1}{2}$	93	3, 11	$\frac{1}{2}$
43	2, 3	$\frac{1}{4}$	94	5, 13	$\frac{5}{2}$

Tabelle 2 $\left(h(Q(\sqrt{D}))=2\right)$

D	q	$\mathfrak{a}$	$\tilde{a}_1(0;\mathfrak{a};\mathfrak{e})$	D	q	$\mathfrak{a}$	$\tilde{a}_1(0;\mathfrak{a};\mathfrak{e})$
15	11, 15	(1)	$\frac{5}{12}$	55	6, 11	(1)	1
		$(2, 1+\sqrt{15})$	$\frac{1}{12}$			$(2, 1+\sqrt{55})$	0
30	5, 14	(1)	$\frac{2}{3}$	66	2, 17	(1)	$\frac{2}{3}$
		$(2, \sqrt{30})$	$\frac{1}{3}$			$(3, \sqrt{66})$	$\frac{1}{3}$
34	15, 17	(1)	1	70	5, 6	(1)	1
		$(3, 1+\sqrt{34})$	0			$(2, \sqrt{70})$	0
35	10, 19	(1)	$\frac{3}{4}$	78	14, 23	(1)	$\frac{3}{2}$
		$(2, 1+\sqrt{35})$	$\frac{1}{4}$			$(2, \sqrt{78})$	$\frac{1}{2}$
39	3, 14	(1)	$\frac{2}{3}$	87	6, 23	(1)	$\frac{5}{4}$
		$(2, 1+\sqrt{39})$	$\frac{1}{3}$			$(2, 1+\sqrt{87})$	$\frac{1}{4}$
42	6, 17	(1)	$\frac{5}{6}$	91	3, 10	(1)	$\frac{3}{4}$
		$(2, \sqrt{42})$	$\frac{1}{6}$			$(2, 1+\sqrt{91})$	$\frac{1}{4}$
51	2, 15	(1)	$\frac{7}{12}$	95	14, 19	(1)	$\frac{3}{2}$
		$(3, \sqrt{51})$	$\frac{1}{12}$			$(2, 1+\sqrt{95})$	$\frac{1}{2}$

Tabelle 3 $\left(h(Q(\sqrt{D}))=3\right)$

D	q	$\mathfrak{a}$	$\tilde{a}_1(0;\mathfrak{a};\mathfrak{e})$
79	15, 43	(1)	$\frac{7}{4}$
		$(3, 1+\sqrt{79})$	$\frac{1}{4}$
		$(3, 1+\sqrt{79})^2$	$-\frac{1}{4}$

Literaturverzeichnis

[1] M. Eichler, *Über die Darstellbarkeit von Modulformen durch Thetareihen*, Journ. Reine Angew. Math. 195 (1956), S. 156–171.

[2] R. Fricke, *Die elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen*, Bd. 2, Leipzig 1922.

[3] K.-B. Gundlach, *Über die Darstellung der ganzen Spitzenformen zu den Idealstufen der Hilbertschen Modulgruppe und die Abschätzung ihrer Fourierkoeffizienten*, Acta Math. 92 (1954), S. 309–345.

[4] — *Poincarésche und Eisensteinsche Reihen zur Hilbertschen Modulgruppe*, Math. Zeitschr. 64 (1956), S. 339–352.

[5] — *Ganze Nichtspitzenformen der Dimension −1 zu den Hilbertschen Modulgruppen reell-quadratischer Zahlkörper*, Arch. Math. 7 (1956), S. 453–456.

[6] — *Zusammenhänge zwischen Modulformen in einer und in zwei Variablen*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen II, 1965, S. 47–88.

[7] K.-B. Gundlach, *Die Bestimmung der Funktionen zu einigen Hilbertschen Modulgruppen*, Journ. Reine Angew. Math. 220 (1965), S. 109–153.

[8] E. Hecke, *Mathematische Werke*, Göttingen 1952.

[9] H. Petersson, *Automorphe Formen als metrische Invarianten I*, Math. Nachr. 1 (1948), S. 158–212.

[10] H. Shimizu, *On discontinuous groups operating on the product of the upper half planes*, Ann. of Math. 77 (1963), S. 33–71.

[11] C. L. Siegel, *Gesammelte Abhandlungen*, Berlin 1966.

[12] — *Berechnung von Zetafunktionen an ganzzahligen Stellen*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen II, 1969, S. 87–102.

Eingegangen 24. 9. 1972 (327)