2. $m = 291$, $A = \begin{pmatrix} -16 & 5 \\ 7 & 16 \end{pmatrix}$, $a(\lambda, \mu) = -25\lambda^2+25\lambda\mu-6\mu^2$.

This $a(\lambda, \mu)$ represents -6 which is a divisor of $4m$, but not of m; however the form also represents 3 for $\lambda = 3$, $\mu = 19$ leading to the factorization $\begin{pmatrix} 19 & -4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 23 \\ 23 & 108 \end{pmatrix}$. The matrix A corresponds to an ideal class of order 4.

The author has been guided by computations based on Ince's tables on ideasl in quadratic fields and by a program carried out by G. Hayward at California Institute of Technology. The example given in D was constructed by D. Estes and H. Kisilevsky with whom the author also had helpful discussions on earlier parts.

References

[0] C. F. Gauss, *Disquisitiones arithmeticae*, 1801.
[1] H. Cohn, *A Second Course in Number Theory*, New York 1962.
[2] E. L. Ince, *Cycles of Reduced Ideals in Quadratic Fields*, British Association for the Advancement of Science Tables IV, 1934.
[3] L. Rédei and H. Reichardt, *Die durch vier teilbaren Invarianten der Klassengruppe des quadratischen Zahlkörpers*, J. Reine Angew. Math. 170 (1933), pp. 69–74.
[4] A. Scholz, *Über die Lösbarkeit der Gleichung $t^2-Du^2 = -4$*, Math. Zeitschr. 39 (1934), pp. 95–111.
[5] O. Taussky, *On a theorem of Latimer and MacDuffee*, Canad. J. Math. 1 (1949), pp. 300–302.
[6] — *On matrix classes corresponding to an ideal and its inverse*, Illinois J. Math. 1 (1957), pp. 108–113.
[7] — *Ideal Matrices I*, Archiv d. Math. 13 (1962), pp. 275–282.
[8] — *On the similarity transformation between an integral matrix with irreducible characteristic polynomial and its transpose*, Math. Ann. 166 (1966), pp. 60–63.
[9] — *Symmetric matrices and their role in the study of general matrices*, Linear Algebra and Appl. 5 (1972), pp. 147–159.
[10] — and H. Zassenhaus, *On the similarity transformation between a matrix and its transpose*, Pacific J. Math. 9 (1959), pp. 893–896.

CALIFORNIA INSTITUTE OF TECHNOLOGY
Pasadena, California

Received on 30. 8. 1972 (320)

ACTA ARITHMETICA
XXIV (1973)

Quadratische Formen über Zahlringen

von

MEINHARD PETERS (Münster)*

Carl Ludwig Siegel zum 75. Geburtstag

Jede natürliche Zahl ist bekanntlich Summe von 4 Quadraten ganzer rationaler Zahlen. In dieser Note erhalten wir Verallgemeinerungen auf algebraische Zahlkörper: z. B. ist in nicht total-reellen Zahlkörpern mit ungerader Diskriminante jede total-positive ganze Zahl Summe von 4 Quadraten ganzer Zahlen (s. Satz 1). Allgemeiner lassen sich in nicht total-reellen Zahlkörpern die durch Summen von Quadraten ganzer Zahlen darstellbaren Zahlen bereits durch eine Summe von 4 ganzen Quadraten darstellen; dieses folgt aus einem Lokal-Global-Prinzip, das der starke Approximationssatz vermittelt (s. Satz 1). In Ordnungen reell-quadratischer Zahlkörper lassen sich die durch Quadratsummen darstellbaren Elemente bereits durch eine Summe von 5 Quadraten darstellen; diese Elemente kann man charakterisieren (s. Satz 2). Es ergeben sich dabei elementare Beweise für einige bekannte Aussagen über die Anzahl der Klassen im Geschlecht der Form $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$ (s. Satz 3 und Bemerkung 3). Für Verallgemeinerungen von Quadratsummen auf andere quadratische Formen F im Falle der reell-quadratischen Zahlkörper bedarf es bei der hier angewandten Beweismethode der Voraussetzung, daß das Geschlecht von F über Z nur eine Klasse enthält. In einem Anhang ist eine Tabelle der primitiven definiten quadratischen Formen in Diagonalgestalt der Dimensionen $\geqslant 4$ mit einklassigem Geschlecht über Z aufgeführt; diese Tabelle wird ausgenutzt für die eben genannten Verallgemeinerungen (s. Satz 2).

SATZ 1. *In einem nicht total-reellen Zahlkörper sind genau diejenigen ganzen Zahlen durch eine quadratische Form F, F regulär und mindestens 4-dimensional, darstellbar, für die das „lokal überall" der Fall ist; insbesondere sind genau diejenigen ganzen Zahlen als Summen von Quadraten ganzer Zahlen darstellbar, für die das „lokall überall" der Fall ist. In einer*

---

* Herrn M. Kneser und Herrn C. L. Siegel danke ich sehr für Hinweise und kritische Bemerkungen.

Darstellung als Quadratsumme kommt man mit 4 Quadraten aus. Bei ungerader Diskriminante des Zahlkörpers sind genau die total-positiven ganzen Zahlen als Quadratsummen ganzer Zahlen darstellbar.

Der Beweis geht analog wie für die Darstellung von -1 durch 4 Quadrate in [9] nach dem starken Approximationssatz von Kneser: Wenn eine Zahl a über den Komplettierungen $R_\mathfrak{p}$ der Maximalordnung R des Zahlkörpers K für alle Primstellen $\mathfrak{p}$ von K durch F dargestellt wird, so gibt es eine Form im Geschlecht von F, die a über R darstellt (s. [8], 102 : 5). Nach [6], Satz 1 stimmen die Darstellungsmaße von a $(\neq 0)$ durch sämtliche Formen des Geschlechts von F überein, also wird a auch von F über R dargestellt. Aus [11] erkennt man, daß eine Darstellung von a über $R_\mathfrak{p}$ durch Summen von Quadraten, falls sie möglich ist, immer bereits durch 4 Quadrate möglich ist; hieraus folgt die zweite Behauptung des Satzes. Die letzte Aussage wird von Siegel in [13] bewiesen (durch Satz 1 wird das dortige Theorem II verschärft).

SATZ 2. *Sei $K = \mathbf{Q}(\sqrt{d})$, $d > 0$ quadratfrei, ein reell-quadratischer Zahlkörper, R_f die Ordnung vom Führer f in K. Jedes Element in R_f, das sich als Summe von Quadraten aus R_f darstellen läßt, läßt sich bereits als Summe von 5 Quadraten darstellen. Die Menge dieser Zahlen $g \in R_f$ kann so charakterisiert werden: g ist total-positiv,*

$$g = \begin{cases} g_0 + g_1 f w, \\ g_0 + 2g_1 f w, \end{cases} \qquad w = \begin{cases} \frac{1}{2}(1+\sqrt{d}), & d \equiv 1(4), \\ \sqrt{d}, & d \not\equiv 1(4) \end{cases}$$

und zu g existiert ein $c \in \mathbf{Z}$ mit $c_2 \leqslant c \leqslant c_1$ und mit $cf \equiv g_1(2)$ falls $d \equiv 1(4)$, wobei

$$c_{1,2} = \begin{cases} \dfrac{1}{df^2}\left(2g_0 + g_1 \pm 2\sqrt{N(g)}\right) & \text{für} \quad d \equiv 1(4), \\[2ex] \dfrac{1}{2df^2}\left(g_0 \pm \sqrt{N(g)}\right) & \text{für} \quad d \not\equiv 1(4). \end{cases}$$

Die so charakterisierten Zahlen werden außer durch die Form $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2$ auch von den Formen

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_5^2,$$
$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+3x_5^2,$$
$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_4^2+2x_5^2,$$
$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_4^2+3x_5^2,$$

über R_f dargestellt.

Der Beweis benutzt folgendes

LEMMA. *Die soeben aufgeführten fünf quadratischen Formen der Dimension 5 stellen über $\mathbf{Z}$ alle binären quadratischen Formen $ay_1^2+2by_1y_2+cy_2^2$ mit $a, b, c \in \mathbf{Z}$, $a \geqslant 0$, $c \geqslant 0$ und $D = ac-b^2 \geqslant 0$ dar, insbesondere also alle positiv definiten binären Formen.* (Für die Form $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2$ geht diese Aussage auf Mordell zurück.)

Beweis des Lemmas. Es genügt, die Darstellbarkeit über allen Komplettierungen $\mathbf{Z}_p$ und $\mathbf{R}$ zu beweisen, denn aus überall lokaler Darstellbarkeit folgt die globale durch eine Form des Geschlechts ([8], 102 : 5), und die 5 aufgeführten Formen haben nur eine Klasse im Geschlecht (s. Tabelle im Anhang).

Sei $p \neq 2, 3$. Nach [4], Cor. 34a, b, stellt eine binäre Form der Diskriminante d, $d = 2^i 3^j$, über $\mathbf{Z}_p$ eine quadratfreie Zahl n genau dann dar, wenn $p \nmid n$ oder $p \mid n$ und $\left(\frac{-d}{p}\right) = 1$, eine ternäre Form derselben Diskriminante stellt jedes n dar. Eine binäre Form $\begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & n' \end{pmatrix}$ – und auf solche kann man sich wegen $p \neq 2$ beschränken – wird also für $p \nmid n$ vermöge

$$(1) \qquad \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ z_2 & 0 \\ 0 & w_1 \\ 0 & w_2 \\ 0 & w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & n' \end{pmatrix}$$

mit $z_1^2+z_2^2 = n$, $w_1^2+rw_2^2+tw_3^2 = n'$ dargestellt.

Falls $p \mid n$ und $p \mid n'$, so ist $n-1 = z_1^2+z_2^2$ in $\mathbf{Z}_p$ lösbar und es gilt offenbar $p \nmid n'-1-z_2^2$ oder $p \nmid n'-1-z_1^2$. Es liege ersteres vor, dann ist $n'-1-z_2^2 = rw_1^2+tw_2^2$ in $\mathbf{Z}_p$ lösbar und

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -z_2 & w_1 & w_2 \end{pmatrix}$$

vermittelt analog (1) die gesuchte Darstellung.

Für $p = 2, 3$ konstruiert man Kongruenzlösungen in allen möglichen Fällen und erhält die Behauptung nach [4], Theorem 9b.

Für $\mathbf{R}$ ist die Behauptung offensichtlich.

Bemerkung. Für die übrigen einklassigen Formen der Dimension 5 der Tabelle im Anhang gilt die Aussage des Lemmas nicht; man findet in jedem Fall leicht Gegenbeispiele.

Beweis von Satz 2. (a) $d \equiv 1(4)$. Betrachte ein total-positives $g \in R_f$. Der Ansatz

$$g = g_0 + g_1 f\left(\frac{1+\sqrt{d}}{2}\right) = a + 2bf\left(\frac{1+\sqrt{d}}{2}\right) + cf^2\left(\frac{1+\sqrt{d}}{2}\right)^2,$$

also als binäre Form mit

$$y_1 = 1, \quad y_2 = f\left(\frac{1+\sqrt{d}}{2}\right)$$

in den Bezeichnungen des Lemmas, ergibt

$$g_0 = a+cf^2\left(\frac{d-1}{4}\right), \quad g_1 = 2b+cf.$$

Für die Diskriminante der binären Form erhält man in Abhängigkeit von c:

$$D(c) = ac-b^2 = \tfrac{1}{4}\left(-df^2c^2+c(4g_0+2g_1f)-g_1^2\right).$$

Es ist $D(c) = 0$ für die im Satz genannten Werte $c_{1,2}$. Offenbar ist nach dem Lemma eine Darstellung von g durch 5 Quadrate oder die übrigen vier Formen des Satz 2 möglich, wenn es ein

(2) $\qquad c \in \boldsymbol{Z}$ mit $c_2 \leqslant c \leqslant c_1$ und mit $cf \equiv g_1(2)$

gibt. Andererseits sei g Summe von s Quadraten aus R_f, oder allgemeiner sei g dargestellt durch eine positiv-definite Diagonalform $\sum_{i=1}^{s} a_i x_i^2$:

$$g = \sum_{i=1}^{s} a_i\left(m_i+n_if\frac{1+\sqrt{d}}{2}\right)^2,$$

also

$$g_0 = \sum_{i=1}^{s} a_i\left(m_i^2+n_i^2\frac{d-1}{4}\right),$$

$$g_1 = \sum_{i=1}^{s} a_i(2m_in_i+n_i^2f).$$

Der Wert $c' = \sum_{i=1}^{s} a_i^2 n_i^2$ erfüllt die Bedingungen von (2), denn es ist

$$4D(c') = \left(\sum_{i=1}^{s} a_i(2m_i+fn_i)^2\right)\left(\sum_{i=1}^{s} a_in_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{s} a_in_i(2m_i+fn_i)\right)^2 \geqslant 0$$

nach Cauchy–Schwarz.

(b) $d \not\equiv 1(4)$. Der Ansatz

$$g = g_0+2g_1f\sqrt{d} = a+2bf\sqrt{d}+cf^2(\sqrt{d})^2$$

führt analog zur Behauptung des Satzes.

Zusatz zu Satz 2. *4 Quadrate reichen für die Darstellung i.a. nicht aus für*

$$\begin{cases} \dfrac{d-1}{4}f^2 > 4 \text{ und } d = 17, f = 1, & \text{falls } d \equiv 1(4), \\ df^2 > 7, & \text{falls } d \not\equiv 1(4). \end{cases}$$

Beweis. (a) $d \equiv 1(4)$. Die diophantischen Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{s}\left(m_i^2+\frac{d-1}{4}n_i^2f^2\right) = \frac{d-1}{4}f^2+7,$$

$$\sum_{i=1}^{s}(2m_in_i+n_i^2f) = f$$

sind für $s = 5$ lösbar, für $s = 4$ jedoch offenbar nicht bei

$$\frac{d-1}{4}f^2 > 7.$$

Dasselbe prüft man leicht für die Fälle $d = 17, 21, 29, f = 1$. In allen diesen Fällen ist also

(3) $$g = \frac{d-1}{4}f^2+7+f^2\left(\frac{1+\sqrt{d}}{2}\right)$$

durch 5, aber nicht durch 4 Quadrate darstellbar.

(b) $d \not\equiv 1(4)$. Die diophantischen Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{s}(m_i^2+df^2n_i^2) = df^2+8,$$

$$\sum_{i=1}^{s} m_in_if = f$$

sind für $s = 5$ lösbar, für $s = 4$ aber nicht, sofern $df^2 > 7$. Also ist

(4) $$g = df^2+8+2f\sqrt{d}$$

durch 5, aber nicht durch 4 Quadrate darstellbar.

Bemerkung 1. In den verbleibenden Fällen $d = 6, 7, 13$ mit $f = 1$ und $d = 5$ mit $f = 2$ benötigt man mindestens 4 Quadrate, für $d = 3$, $f = 1$ mindestens 3 Quadrate, wie man leicht durch Beispiele erkennt; in den Fällen $d = 2, 5$ und $f = 1$ kommt man immer mit 3 Quadraten aus, wie in Bemerkung 2 erläutert.

Das Betrachten ähnlicher diophantischer Gleichungen wie beim letzten Beweis liefert einen elementaren Beweis für folgenden bekannten

Satz 3. *Die 4-dimensionale Einheitsform* $E_4 = x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$ *hat in allen reell-quadratischen Zahlkörpern* $Q(\sqrt{d})$, $d > 5$ *quadratfrei, mehrere Klassen im Geschlecht.*

Beweis. Es genügt, ein $g \in R^{(d)}$ (der Maximalordnung von $Q(\sqrt{d})$) anzugeben, das von E_4 zwar überall lokal, aber nicht global (über $R^{(d)}$) dargestellt wird. Die überall lokal dargestellten Elemente von $R^{(d)}$ sind nach Riehm [11]

für $d \equiv 1(4)$: alle total-positiven $g \in R^{(d)}$,

für $d \not\equiv 1(4)$: alle total-positiven $g \in R^{(d)}$ der Gestalt $a+2b\sqrt{d}\,(a, b \in \boldsymbol{Z})$.

(a) $d \equiv 1(4)$: $g = \left(\frac{d-1}{4}-1\right)+\frac{1+\sqrt{d}}{2}$ ist für $d \geqslant 13$ total-positiv, wird also lokal überall dargestellt; andererseits sind die diophantischen Gleichungen

$$\sum_i \left(m_i^2+\frac{d-1}{4}n_i^2\right) = \frac{d-1}{4}-1, \qquad \sum_i (2m_i n_i+n_i^2) = 1$$

offenbar unlösbar, eine globale Darstellung also unmöglich.

(b) $d \not\equiv 1(4)$: $g = d+2\sqrt{d}$ ist für $d > 4$ total-positiv, wird also lokal überall dargestellt, aber global nicht, wie man analog zu (a) erkennt.

Übrigens kann man offenbar für $d > 7$, $d \neq 13$, auch die in (3) bzw. (4) angegebenen g (mit $f = 1$) für den Beweis benutzen.

Bemerkung 2. Die mir bekannten Beweise von Satz 3 (z.B. in [2]) benutzen den Siegelschen Hauptsatz (insbesondere die Minkowski-Siegelsche Maßformel); letzterer läßt sich auch beim Beweis der Satz 3 abrundenden Aussage, daß die Geschlechtsklassenzahl

$$h(E_4) = 1 \quad \text{in } Q(\sqrt{2}) \text{ und in } Q(\sqrt{5}) \tag{5}$$

und $h(E_4) = 3$ in $Q(\sqrt{3})$, vermeiden: unter Verwendung der „Nachbargittermethode" von M. Kneser wurde dies von Salamon [12] durchgeführt.

Wegen (5) kann man die in Bemerkung 1 erwähnte Tatsache, daß man in $Q(\sqrt{2})$ und $Q(\sqrt{5})$ bei der Darstellung der durch Quadratsummen darstellbaren Elemente mit 3 Quadraten auskommt, durch lokale Betrachtungen beweisen, wie implizit von Dzewas [2] ausgeführt.

Bemerkung 3. Der weitergehende Satz von K. Barner [1] (vgl. auch [10]), daß in total-reellen Zahlkörpern $h(E_4) = 1$ genau für Q, $Q(\sqrt{2})$ und $Q(\sqrt{5})$ gilt, läßt sich – eingeschränkt auf Körper mit ungerader Diskriminante – aus dem elementar, aber trickreich bewiesenen Satz I von Siegel [13] nach dem Muster des Beweises des obigen Satzes 3 schließen.

ANHANG

Tabelle der primitiven positiv definiten quadratischen Diagonalformen $\sum_i a_i x_i^2$ **der Dimensionen** $\geqslant 4$ **über** $\boldsymbol{Z}$ **mit** ***einer*** **Klasse im Geschlecht** (es werden die Koeffizienten a_i der Größe nach angeordnet aufgeführt)

Dim. 4:	1 1 1 1	1 2 2 6
	1 1 1 2	1 2 2 8
	1 1 1 3	1 2 4 4
	1 1 1 4	1 2 4 6
	1 1 1 5	1 2 8 8
	1 1 1 8	1 3 3 3
	1 1 2 2	1 3 3 6
	1 1 2 3	1 3 3 9
	1 1 2 4	1 3 6 6
	1 1 2 6	1 3 9 9
	1 1 3 3	1 4 4 4
	1 1 3 9	1 4 4 8
	1 1 4 4	1 5 5 5
	1 1 4 8	1 8 8 8
	1 2 2 2	2 3 3 6
	1 2 2 3	2 3 6 6
	1 2 2 4	2 3 6 12
Dim. 5:	1 1 1 1 1	1 1 4 4 4
	1 1 1 1 2	1 2 2 2 2
	1 1 1 1 3	1 2 2 2 4
	1 1 1 1 4	1 2 2 2 6
	1 1 1 2 2	1 2 2 4 4
	1 1 1 2 3	1 3 3 3 3
	1 1 1 4 4	1 3 3 3 6
	1 1 2 2 2	1 4 4 4 4
	1 1 2 2 4	2 3 6 6 6
Dim. 6:	1 1 1 1 1 1	1 1 2 2 2 2
	1 1 1 1 1 2	1 2 2 2 2 2
	1 1 1 1 1 3	1 2 2 2 2 4
	1 1 1 1 2 2	1 3 3 3 3 3
Dim. 7:	1 1 1 1 1 1 1	
	1 1 1 1 1 1 2	
	1 2 2 2 2 2 2	
Dim. 8:	1 1 1 1 1 1 1 1	
Dim. $\geqslant$ 9:	keine	

Zur *Herstellung* der Tabelle ist folgendes zu sagen: Ein Satz von Eichler [3] besagt, daß ein definites Gitter eindeutig in zueinander orthogonale unzerlegbare Teilgitter zerlegt werden kann; hieraus folgt leicht, daß ein definites Gitter mindestens so viele Klassen im Geschlecht hat wie eine seiner orthogonalen Komponenten. Ausgehend von einer Tabelle

[5] der ternären definiten quadratischen Formen in Diagonalgestalt über $\boldsymbol{Z}$ mit Klassenzahl 1 kann man deshalb alle für Klassenzahl 1 „in Frage kommenden" höherdimensionalen Diagonalformen aufstellen: als einklassig kommen nur solche Formen in Frage, deren sämtliche orthogonalen Komponenten einklassig sind. Die in Frage kommenden Formen lassen sich mit der Minkowski–Siegelschen Maßformel auf Einklassigkeit testen: eine Form D ist genau dann einklassig, wenn $M(D) = 1/E(D)$, wobei $M(D)$ das Maß und $E(D)$ die Einheitenanzahl von D ist. Für die m-dimensionale Diagonalform

$$D = (\underbrace{d_1, d_1, \ldots, d_1}_{s_1\text{-mal}}, \ldots, \underbrace{d_n, \ldots, d_n}_{s_n\text{-mal}})$$

ist

$$E(D) = 2^m s_1! \ldots s_n!,$$

andererseits läßt sich der explizite Ausdruck für $M(D)$ bei Minkowski ([7], S. 171, 181) finden. Auf diese Weise erhält man die Tabelle.

Literaturverzeichnis

[1] K. Barner, *Über die quaternäre Einheitsform in total-reellen algebraischen Zahlkörpern*, Crelles J. 229 (1968), S. 194–208.
[2] J. Dzewas, *Quadratsummen in reell-quadratischen Zahlkörpern*, Math. Nachr. 21 (1960), S. 233–284.
[3] M. Eichler, *Note zur Theorie der Kristallgitter*, Math. Ann. 125 (1952), S. 51–55.
[4] B. W. Jones, *The arithmetic theory of quadratic forms*, Providence 1950.
[5] B. W. Jones and G. Pall, *Regular and semiregular positive ternary quadratic forms*, Acta Math. 70 (1939), S. 165–191.
[6] M. Kneser, *Darstellungsmaße indefiniter quadratischer Formen*, Math. Zeitschr. 77 (1961), S. 188–194.
[7] H. Minkowski, *Ges. Abh.*, Band 1, Leipzig–Berlin 1911.
[8] O. T. O'Meara, *Introduction to Quadratic Forms*, 2 nd ed., Berlin 1971.
[9] M. Peters, *Die Stufe von Ordnungen ganzer Zahlen in algebraischen Zahlkörpern*, Math. Ann. 195 (1972), S. 309–314.
[10] H. Pfeuffer, *Quadratsummen in totalreellen algebraischen Zahlkörpern*, Crelles J. 249 (1971), S. 208–216.
[11] C. Riehm, *On the integral representation of quadratic forms over local fields*, Amer. J. Math. 86 (1964), S. 25–62.
[12] R. Salamon, *Die Klassen im Geschlecht von $x_1^2+x_2^2+x_3^2$ und $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$ über $Z(\sqrt{3})$*, Arch. Math. 20 (1969), S. 523–530.
[13] C. L. Siegel, *Sums of m-th powers of algebraic integers*, Ges. Abh., Band 3, Nr. 49, Berlin 1966.

Eingegangen 5. 9. 1972 (319)

ACTA ARITHMETICA
XXIV (1973)

Dirichlet series with functional equations and related arithmetical identities

by

K. Chandrasekharan and H. Joris (Zürich)

To Carl L. Siegel on his completion of 75 years

§ 1. Introduction. Fifty years ago Siegel gave a short proof of Hamburger's theorem on the Riemann zeta-function $\zeta(s)$. Let G be an entire function of finite order, P a polynomial, s a complex variable, written $s = \sigma + it$, and $f(s) = G(s)/P(s)$. Let $f(s) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m m^{-s}$, where (c_m) is a sequence of complex numbers, and the series converges absolutely for $\sigma > 1$. Let

$$\pi^{-\frac{1}{2}s}\Gamma(\tfrac{1}{2}s)f(s) = \pi^{-\frac{1}{2}(1-s)}\Gamma(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}s)g(1-s), \tag{1.1}$$

where $g(1-s) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m m^{s-1}$, the series converging absolutely for $\sigma < -\varkappa < 0$. Then $f(s) = c_1\zeta(s) = g(s)$. The proof follows at once from Siegel's partial-fraction formula [9]:

$$\sum_{m=1}^{\infty} c_m\left(\frac{1}{t+im} + \frac{1}{t-im}\right) - \pi t H(t) = 2\pi \sum_{m=1}^{\infty} b_m e^{-2\pi m t}, \quad t > 0, \tag{1.2}$$

where $H(t)$ is a finite sum of terms of the form $t^{\alpha}\log^{\beta} t$.

Arnold Walfisz in his Göttingen dissertation, published in 1922, found an identity associated with the Dedekind zeta-function $\zeta_K(s)$ of an algebraic number field K of degree n, from which he deduced an Ω-result for the ideal function. For $\operatorname{Re} s > 1$, $\zeta_K(s) = \sum_{m=1}^{\infty} a(m) m^{-s}$, where $a(m)$ is the number of non-null integral ideals with norm m. Walfisz's identity [10] runs as follows: for $\operatorname{Re} s > 0$, we have

$$\frac{1}{s}\sum_{m=1}^{\infty} a(m) e^{-sm^{1/n}} - \frac{n!\lambda}{s^{n+1}} - \frac{1}{s}\zeta_K(0) = D i^{r_1+r_2}\frac{1}{s}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a(m)}{m} M(sm^{-1/n}). \tag{1.3}$$