ACTA ARITHMETICA
XXIV (1973)

Über die Siegel-Nullstelle der Dirichletschen Funktionen*

von

P. Turán (Budapest)

Zum 75-ten Geburtstag von Carl Ludwig Siegel

1. Die Nichteffektivität der sogenannten Siegel-Nullstellen bringt wesentliche Schwierigkeiten in der analytischen Zahlentheorie. Ein möglicher Ausweg erschien mir vor vielen Jahren die Frage mit solchen zu verknüpfen, welche direktarithmetisch angreifbar sind. Es bedeute $A(x, k, l)$ die Anzahl derjenigen natürlichen Zahlen unter x, welche $\equiv l \bmod k$ sind und deren Primfaktoren alle $\geqslant x^{1/4}$ sind; es seien $c_1, c_2, \ldots$ positive *explizit angebbare* Konstanten. In einem Brief von Mai oder Juni 1942 teilte ich E. Hecke den folgenden Satz mit.

Wenn für $x > k^{c_1}$ die Ungleichung

$$A(x, k, l) \leqslant 2.29 \frac{x}{\varphi(k)\log x} \tag{1.1}$$

gleichmäßig in l gilt, dann kann keine der zu dem Modulus k gehörige Dirichletsche $L(s, k, \chi)$ Funktion auf der reellen Strecke

$$1 - \frac{1}{(\log k \log\log\log k)^2} \leqslant s \leqslant 1 \tag{1.2}$$

verschwinden.

2. In dem Brief wurde der Satz als eine untere Abschätzung der Klassenzahl imaginär quadratischer Körper angegeben. Ebendort wurde auch bemerkt, daß für $x > e^k$, $k > c_2$, die Ungleichung

$$A(x, k, l) < 2.247 \frac{x}{\varphi(k)\log x} \tag{2.1}$$

leicht beweisbar ist und Bruns Siebmethode für $x > k^{c_3}$ die Ungleichung

$$A(x, k, l) < 2.9 \frac{x}{\varphi(k)\log x} \tag{2.2}$$

* Eine kurze Mitteilung über den Inhalt dieser Arbeit hatte ich in Juli 11, 1972 in Oberwolfach gemacht.

wirklich ergibt. Da die Siebmethoden in den letzten fünfundzwanzig Jahren sehr verstärkt wurden, ist der folgende, etwas allgemeinere Satz auch heute von gewisser Interesse. Es sei

$$\tag{2.3} \tfrac{1}{4} \leqslant \alpha < \tfrac{1}{3}$$

fest und bedeute $A_\alpha(x, k, l)$ die Anzahl derjenigen Zahlen $\leqslant x$, welche $\equiv l \bmod k$ und deren alle Primfaktoren $\geqslant x^\alpha$ sind. Es sei ferner

$$\tag{2.4} A_1 = A_1(\alpha) = \int\limits_{1/3}^{(1-\alpha)/2} \frac{\log \dfrac{r}{1-2r}}{r(1-r)}\, dr$$

und

$$\tag{2.5} A_2 = A_2(\alpha) = \int\limits_{(1-\alpha)/2}^{1-2\alpha} \frac{\log \dfrac{1-\alpha-r}{\alpha}}{r(1-r)}\, dr.$$

Dann gilt der

Satz. *Wenn für ein beliebig kleines $\delta > 0$ und $k > k_0(\delta, \alpha)$*

$$\tag{2.6} x \geqslant \exp(\log^2 k \log\log k)$$

die Ungleichung

$$\tag{2.7} A_\alpha(x, k, l) \leqslant 2(1 + A_1 + A_2 - \delta)\frac{x}{\varphi(k)\log x}$$

gilt, dann kann keine der $L(s, k, \chi)$-Funktionen auf der Strecke in (1.2) *verschwinden.*

Orientierungshalber sei bemerkt, daß für fixiertes α in (2.3), fixiertes $(k, l) = 1$ und $x \to \infty$ mit den Bezeichnungen (2.4)–(2.5) die Relation

$$\tag{2.8} A_\alpha(x, k, l) \sim \left(1 + \log\frac{1-\alpha}{\alpha} + A_1 + A_2\right)\frac{x}{\varphi(k)\log x}$$

ohne Vermutungen gilt. Es wäre von Interesse die Abschätzung (2.7) mit denen von Halberstam–Jurkat–Richert, mit Benutzung von Rechenmaschinen, für das ganze Intervall in (2.3) zu vergleichen. Mit etwas größerer Mühe könnte man in dem Satz die Strecke (1.2) durch

$$\tag{2.9} 1 - \frac{c_4}{\log^2 k} \leqslant s \leqslant 1$$

mit hinreichend großen c_4 und auch δ in (2.7) etwa durch $1/\log\log k$ ersetzen.

Die Methode dieser Arbeit erlaubt also zu zeigen, daß z.B. aus (1.1) kann man das Nichtverschwinden aller $L(s, k, \chi)$ Funktionen mit festem k auf der Strecke (1.2) ableiten. Wir bemerken, ohne in Einzelheiten eingehend, daß aus der bewiesenen, rein arithmetischer Ungleichung (2.2) man analogerweise beweisen kann, daß die Totalanzahl aller Nullstellen (mit Multiplizität gerechnet) aller $L(s, k, \chi)$ Funktionen mit festem k auf der Strecke (1.2) höchstens 1 ist (was mit mehr Funktionentheorie wohlbekannt ist).

3. Nun kehren wir zum Beweis des Satzes. Wir setzen voraus — im Gegensatz zu unserer Behauptung — daß eine Nullstelle β mit

$$\tag{3.1} 1 - \frac{1}{(\log k \log\log k)^2} \leqslant \beta \leqslant 1$$

existiert. Es sei α auf (2.3) fest und

$$\tag{3.2} k \geqslant \max\left(\frac{9}{1-3\alpha}, c_5\right);$$

wenn abkürzungswegen

$$\tag{3.3} \exp(\log^2 k \log\log k) = y,$$

gesetz wird, dann folgt aus (3.2) die Ungleichung

$$\tag{3.4} \alpha \leqslant \frac{1}{3} - \frac{\log\log y}{\log y}.$$

Es sei ferner

$$\tag{3.5} [\log y \log\log y] = \omega$$

und für $\alpha\omega \leqslant \nu \leqslant \omega$ (ν ganz)

$$\tag{3.6} a_\nu = \frac{\nu}{\omega}.$$

4. Wenn β eine Nullstelle von $L(s, k, \chi_1)$ ist (wo χ_1 ein reelles Charakter mod k bedeutet), dann nach Titchmarsh und Page (siehe z.B. K. Prachar *Primzahlverteilung*, S. 134) folgt, daß wenn p immer Primzahlen bedeutet die Ungleichungen

$$\Big|\sum_{p \leqslant N} \chi_0(p)\log p - N\Big| < N\exp(-c_6\sqrt{\log N}),$$

$$\Big|\sum_{p \leqslant N} \chi_1(p)\log p + \frac{N^\beta}{\beta}\Big| < N\exp(-c_6\sqrt{\log N})$$

gelten und für $\chi \neq \chi_0, \chi_1$

$$\Big|\sum_{p \leqslant N} \chi(p)\log p\Big| < N\exp(-c_6\sqrt{\log N}).$$

Wenn man dies mit $N = y^{a_\nu}$ resp. $y^{a_{\nu-1}}$ anwendet, folgt daraus

$$(4.1)\qquad \Big|\sum_{y^{a_{\nu-1}}<p\leqslant y^{a_\nu}} \chi_0(p)\log p-(y^{a_\nu}-y^{a_{\nu-1}})\Big| < 2y^{a_\nu}\exp(-c_7\sqrt{\log y}),$$

$$(4.2)\qquad \Big|\sum_{y^{a_{\nu-1}}<p\leqslant y^{a_\nu}} \chi_1(p)\log p+\frac{y^{\beta a_\nu}-y^{\beta a_{\nu-1}}}{\beta}\Big| < 2y^{a_\nu}\exp(-c_7\sqrt{\log y})$$

und für $\chi\neq\chi_0,\chi_1$

$$(4.3)\qquad \Big|\sum_{y^{a_{\nu-1}}<p\leqslant y^{a_\nu}} \chi(p)\log p\Big| < 2y^{a_\nu}\exp(-c_7\sqrt{\log y}).$$

Wenn also $a_{\nu_1}, a_{\nu_2}, a_{\nu_3}$ drei beliebige aus unseren a_ν's sind und U_χ für $\chi=\chi_0$, $\chi=\chi_1$ und $\chi\neq\chi_0,\chi_1$ die Ausdrücke

$$(4.4)\qquad \prod_{j=1}^{3}(y^{a_{\nu_j}}-y^{a_{\nu_j-1}}),\qquad -\frac{1}{\beta^3}\prod_{j=1}^{3}(y^{\beta a_{\nu_j}}-y^{\beta a_{\nu_j-1}}),\qquad 0$$

bedeutet, dann aus (4.1), (4.2), (4.3) folgt die Ungleichung

$$(4.5)\qquad \Big|\sum_{\substack{y^{a_{\nu_j-1}}<p_j\leqslant y^{a_{\nu_j}}\\(j=1,2,3)}} \chi(p_1p_2p_3)\log p_1\log p_2\log p_3-U_\chi\Big| < 7y^{a_{\nu_1}+a_{\nu_2}+a_{\nu_3}}\exp(-c_7\sqrt{\log y}).$$

Wenn man also die ganze Zahl l so wählt, daß

$$(4.6)\qquad \chi_1(l)=-1$$

dann aus (4.5) folgt die Ungleichung

$$(4.7)\qquad \Big|\sum{}'\log p_1\log p_2\log p_3-\frac{1}{\varphi(k)}(U_{\chi_0}-U_{\chi_1})\Big| < 7y^{\frac{\nu_1+\nu_2+\nu_3}{\omega}}\exp(-c_7\sqrt{\log y}),$$

wo die Summation auf der linken Seite durch die Forderungen

$$(4.8)\qquad p_1p_2p_3\equiv l \bmod k,\qquad y^{\frac{\nu_j-1}{\omega}}<p_j\leqslant y^{\frac{\nu_j}{\omega}},\quad j=1,2,3,$$

eingeschränkt ist. Aus (4.4) und (4.7) folgt leicht, wenn man kurz

$$(4.9)\qquad \sum{}'\log p_1\log p_2\log p_3 = S$$

setzt, daß

$$\Big|S-\frac{y^{\frac{\nu_1+\nu_2+\nu_3}{\omega}}+y^{\beta\frac{\nu_1+\nu_2+\nu_3}{\omega}}}{\varphi(k)(\log\log y)^3}\Big| < c_8 y^{\frac{\nu_1+\nu_2+\nu_3}{\omega}}\Big\{\exp(-c_7\sqrt{\log y})+\frac{1}{\varphi(k)(\log\log y)^4}\Big\};$$

nach (3.3) folgt daraus

$$\Big|S-\frac{y^{\frac{\nu_1+\nu_2+\nu_3}{\omega}}\{1+y^{(\beta-1)\frac{\nu_1+\nu_2+\nu_3}{\omega}}\}}{\varphi(k)(\log\log y)^3}\Big| < c_9\frac{y^{\frac{\nu_1+\nu_2+\nu_3}{\omega}}}{\varphi(k)(\log\log y)^4}.$$

Da, wegen unserer Annahme (3.1) die Ungleichung

$$|1-y^{(\beta-1)\frac{\nu_1+\nu_2+\nu_3}{\omega}}| < \frac{c_{10}}{\log\log y}$$

gilt, folgt aus der obigen die Ungleichung

$$\Big|S-\frac{2y^{\frac{\nu_1+\nu_2+\nu_3}{\omega}}}{\varphi(k)(\log\log y)^3}\Big| < c_{11}\frac{y^{\frac{\nu_1+\nu_2+\nu_3}{\omega}}}{\varphi(k)(\log\log y)^4}$$

und auch für die Anzahl $E_{\nu_1\nu_2\nu_3}$ der ganzen Zahlen mit (4.8) die Ungleichung

$$(4.10)\qquad E_{\nu_1\nu_2\nu_3} > 2\Big(1-\frac{c_{11}}{\log\log y}\Big)\frac{y^{\frac{\nu_1+\nu_2+\nu_3}{\omega}}}{\varphi(k)\nu_1\nu_2\nu_3}.$$

5. Jetzt betrachten wir die Anzahl $B_3(y,a,k,l)$ derjenigen natürlichen Zahlen, welche von der Form $p_1p_2p_3$ mit

$$(5.1)\qquad p_j\geqslant y^a,\quad j=1,2,3,$$

und $\equiv l \bmod k$ sind. Dann gilt offenbar die Abschätzung

$$B_3(y,a,k,l)\geqslant \sum_{\substack{a\omega\leqslant\nu_3\leqslant\nu_2\leqslant\nu_1\leqslant\omega\\ \nu_1+\nu_2+\nu_3\leqslant\omega}} E_{\nu_1\nu_2\nu_3},$$

nach (4.10) also

$$B_3(y,a,k,l) > \frac{2}{\varphi(k)}\Big(1-\frac{c_{12}}{\log\log y}\Big)\sum_{3a\omega\leqslant n\leqslant\omega} y^{\frac{n}{\omega}}\sum_{\substack{a\omega\leqslant\nu_3\leqslant\nu_2\leqslant\nu_1\leqslant\omega\\ \nu_1+\nu_2+\nu_3=n}}\frac{1}{\nu_1\nu_2\nu_3}$$

und *a fortiori*

$$(5.2)\qquad B_3(y,a,k,l) > \frac{2}{\varphi(k)}\Big(1-\frac{c_{12}}{\log\log y}\Big)\sum_{\omega-(\log\log y)^2\leqslant n\leqslant\omega} y^{\frac{n}{\omega}}\Big\{\sum_{\substack{a\omega\leqslant\nu_3\leqslant\nu_2\leqslant\nu_1\leqslant\omega\\ \nu_1+\nu_2+\nu_3=n}}\frac{1}{\nu_1\nu_2\nu_3}\Big\}.$$

6. Nun betrachten wir die Summe

$$(6.1)\qquad S_n = \sum_{\substack{a\omega\leqslant\nu_3\leqslant\nu_2\leqslant\nu_1\leqslant\omega\\ \nu_1+\nu_2+\nu_3=n}} \frac{1}{\nu_1\nu_2\nu_3} = \sum{}' \frac{1}{\nu_1\nu_2(n-\nu_1-\nu_2)},$$

wo die letzte Summation auf die Gitterpunkte (ν_1, ν_2) mit

$$(6.2)\qquad a\omega \leqslant n-\nu_1-\nu_2 \leqslant \nu_2 \leqslant \nu_1 \leqslant \omega$$

sich bezieht. Also müssen wir die Gitterpunkte des Dreiecks mit den Ecken

$$\left(\frac{n}{3}, \frac{n}{3}\right), \qquad \left(\frac{n-a\omega}{2}, \frac{n-a\omega}{2}\right), \qquad (n-2a\omega, a\omega)$$

betrachten. Daher

$$S_n = \sum_{\frac{n}{3}\leqslant\nu_1\leqslant n-2a\omega} \frac{1}{\nu_1} \sum_{\frac{n-\nu_1}{2}\leqslant\nu_2\leqslant\min(\nu_1, n-a\omega-\nu_1)} \frac{1}{\nu_2(n-\nu_1-\nu_2)}$$

$$= \sum_{\frac{n}{3}\leqslant\nu_1\leqslant\frac{n-a\omega}{2}} \frac{1}{\nu_1(n-\nu_1)} \sum_{\frac{n-\nu_1}{2}\leqslant\nu_2\leqslant\nu_1} \left(\frac{1}{\nu_2}+\frac{1}{n-\nu_1-\nu_2}\right) +$$

$$+ \sum_{\frac{n-a\omega}{2}<\nu_1\leqslant n-2a\omega} \frac{1}{\nu_1(n-\nu_1)} \sum_{\frac{n-\nu_1}{2}\leqslant\nu_2\leqslant(n-a\omega-\nu_1)} \left(\frac{1}{\nu_2}+\frac{1}{n-\nu_1-\nu_2}\right)$$

(dies hat für jede der Zahlen n in $B_3(y, a, k, l)$ einen Sinn, wegen (3.4)). Daraus folgt nach einer leichter Rechnung

$$S_n = \sum_{\frac{n}{3}\leqslant\nu_1\leqslant\frac{n-a\omega}{2}} \frac{1}{\nu_1(n-\nu_1)} \left\{O\left(\frac{1}{\omega}\right) + \sum_{n-2\nu_1\leqslant\nu_2\leqslant\nu_1} \frac{1}{\nu_2}\right\} +$$

$$+ \sum_{\frac{n-a\omega}{2}\leqslant\nu_1\leqslant n-2a\omega} \frac{1}{\nu_1(n-\nu_1)} \left\{O\left(\frac{1}{\omega}\right) + \sum_{a\omega\leqslant\nu_2\leqslant n-\nu_1-a\omega} \frac{1}{\nu_2}\right\}$$

$$= O\left(\frac{\log\omega}{\omega^2}\right) + \sum_{\frac{n}{3}\leqslant\nu_1\leqslant\frac{n-a\omega}{2}} \frac{1}{\nu_1(n-\nu_1)} \log\frac{\nu_1}{n-2\nu_1} +$$

$$+ \sum_{\frac{n-a\omega}{2}\leqslant\nu_1\leqslant n-2a\omega} \frac{1}{\nu_1(n-\nu_1)} \log\frac{n-a\omega-\nu_1}{a\omega}.$$

Wenn man n überall durch ω ersetzt, folgt leicht

$$(6.3)\qquad S_n = o\left(\frac{1}{\omega}\right) + \sum_{\frac{\omega}{3}\leqslant\nu\leqslant\frac{1-a}{2}\omega} \frac{1}{\nu(\omega-\nu)} \log\frac{\nu}{\omega-2\nu} + $$

$$+ \sum_{\frac{1-a}{2}\omega\leqslant\nu\leqslant(1-2a)\omega} \frac{1}{\nu(\omega-\nu)} \log\frac{(1-a)\omega-\nu}{a\omega}.$$

Dies, mit (5.2) gibt

$$B_3(y, a, k, l) > \frac{2}{\varphi(k)}\left(1-\frac{c_{13}}{\log\log y}\right) \sum_{\omega-(\log\log y)^2\leqslant n\leqslant\omega} y^{\frac{n}{\omega}} \left\{ o\left(\frac{1}{\omega}\right) + \right.$$

$$+ \frac{1}{\omega^2} \sum_{\frac{1}{3}\leqslant\frac{\nu}{\omega}\leqslant\frac{1-a}{2}} \frac{1}{\frac{\nu}{\omega}\left(1-\frac{\nu}{\omega}\right)} \log\frac{\frac{\nu}{\omega}}{1-2\frac{\nu}{\omega}} +$$

$$\left. + \frac{1}{\omega^2} \sum_{\frac{1-a}{2}\leqslant\frac{\nu}{\omega}\leqslant 1-2a} \frac{1}{\frac{\nu}{\omega}\left(1-\frac{\nu}{\omega}\right)} \log\frac{1-a-\frac{\nu}{\omega}}{a} \right\},$$

woraus leicht die Ungleichung

$$B_3(y, a, k, l) > \frac{2}{\varphi(k)}\left(1-\frac{c_{14}}{\log\log y}\right)\{o(1)+A_1+A_2\}\frac{1}{\omega} \sum_{\omega-(\log\log y)^2\leqslant n\leqslant\omega} y^{\frac{n}{\omega}},$$

d.h. für $k > k_0(\delta)$

$$(6.4)\qquad B_3(y, a, k, l) > 2\left(A_1+A_2-\frac{\delta}{2}\right)\frac{y}{\varphi(k)\log y}$$

folgt. Da für

$$B_1(y, a, k, l) = \sum_{\substack{y^a\leqslant p\leqslant y\\ p\equiv l \bmod k}} 1$$

mit $\chi_1(l) = -1$ wieder

$$(6.5)\qquad B_1(y, a, k, l) > 2\left(1-\frac{\delta}{2}\right)\frac{y}{\varphi(k)\log y}$$

gilt, so ist der Beweis des Satzes beendet, da wir mit (6.4) und (6.5) zu einer Ungleichung gekommen sind, die mit (2.7) in Widerspruch steht.

Eingegangen 2. 8. 1972 (309)