This means that $\varkappa$ is expressible as

$$\nu\varepsilon^k = \varkappa = \lambda_1^k + \ldots + \lambda_s^k + \tau_1^k + \ldots + \tau_{2s_1}^k$$

subject to the conditions

$$\lambda_j \in P(T), \qquad \tau_j \in P(T_1),$$

whence follows the desired result.

References

[1] Y. Eda, *On the Waring problem in an algebraic number field*, in *Seminar on Modern Methods in Number Theory*, Tokyo 1971.
[2] H. Hasse, *Vorlesungen über Klassenkörpertheorie*, Würzburg 1967.
[3] L. K. Hua, *Exponential sums over algebraic fields*, Canadian J. Math. 3 (1951), pp. 44–51.
[4] — *On Waring's problem*, Quart. Journ. of Math. 9 (1938), pp. 199–201.
[5] O. Körner, *Über das Waringsche Problem in algebraischen Zahlkörpern*, Math. Ann. 144 (1961), pp. 224–238.
[6] E. Landau, *Über die neue Winogradoffsche Behandlung des Waringschen Problems*, Math. Zeitschr. 31 (1930), pp. 319–338.
[7] T. Mitsui, *On the Goldbach problem in algebraic number field I*, Journ. Math. Soc. Japan 12 (1960), pp. 325–372.
[8] C. L. Siegel, *Generalization of Waring's problem to algebraic number fields*, Amer. Journ. Math. 66 (1944), pp. 122–136.
[9] — *Sums of m-th powers of algebraic integers*, Ann. of Math. 46 (1945), pp. 313–339.
[10] R. M. Stemmler, *The easier Waring problem in algebraic number fields*, Acta Arith. 6 (1961), pp. 447–468.
[11] T. Takagi, *Algebraic number theory* (in Japanese), Tokyo 1948.
[12] T. Tatuzawa, *On the Waring problem in an algebraic number field*, Journ. Math. Soc. Japan 10 (1958), pp. 322–341.
[13] — *On the Waring problem in an algebraic number field*, in *Seminar on Modern Methods in Number Theory*, Tokyo 1971.
[14] И. М. Виноградов, *Избранные труды*, Москва 1952.
[15] — *К вопросу о верхней границе для G(n)*, Изв. Акад. Наук 23 (1959), pp. 637–642.

INSTITUTE OF MATHEMATICS, COLLEGE OF GENERAL EDUCATION
UNIVERSITY OF TOKYO

Received on 24. 5. 1972 (290)

ACTA ARITHMETICA
XXIV (1973)

Zur Theorie der symplektischen Gruppen

von

ULRICH CHRISTIAN (Göttingen)

Carl Ludwig Siegel zum 75. Geburtstag und zum 50-jährigen Professorenjubiläum gewidmet

Will man den Rang der Schar der Modulformen mit Hilfe der Selbergschen Spurformel berechnen, so stößt man auf ein Problem, welches man grob so beschreiben kann: Es sei M eine Modulmatrix n-ten Grades. Wann gibt es eine Modulmatrix n-ten Grades R, so daß die Matrix $R^{-1}MR$ eine Randkomponente der verallgemeinerten oberen Halbebene im Unendlichen festläßt?

Zur Lösung dieses Problems führen wir zunächst einige Bezeichnungen ein.

1. Man bilde die $(2n)\times(2n)$ Matrix

$$I(n) = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

mit $n\times n$ Null- bzw. Einheitsmatrix 0 und E. Für einen Körper K bezeichnen wir mit $\Sigma(n, K)$ die symplektische Gruppe, bestehend aus allen $(2n)\times(2n)$ Matrizen M mit Elementen in K, die der Bedingung

$$M' I(n) M = I(n) \tag{2}$$

genügen. Hierbei bedeutet M' die Transponierte von M. Zwei Matrizen M, $M^* \in \Sigma(n, K)$ heißen konjugiert über K, wenn es ein $R \in \Sigma(n, K)$ mit

$$R^{-1}MR = M^* \tag{3}$$

gibt. Es seien $M, R \in \Sigma(n, K)$. Wir sagen, daß $R^{-1}MR$ aus M hervorgeht, indem man M mit R „konjugiert". In der üblichen Weise bezeichne man mit $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{C}$ die Körper der rationalen, bzw. komplexen Zahlen. Für diese gesamte Arbeit gelte

$$\boldsymbol{Q} \subset K \subset \boldsymbol{C}. \tag{4}$$

Die Siegelsche Modulgruppe n-ten Grades $\Gamma(n)$ ist diejenige Untergruppe von $\Sigma(n, Q)$, die aus allen Matrizen mit ganzzahligen Elementen besteht. Jetzt sei Ψ eine Untergruppe von $\Sigma(n, C)$ und j eine natürliche Zahl mit $0 \leqslant j \leqslant n$. Dann bezeichne Ψ_j die Menge aller Matrizen aus Ψ von folgender Gestalt:

$$M = \begin{pmatrix} A_j & 0 & B_j & * \\ * & P_j' & * & * \\ C_j & 0 & D_j & * \\ 0 & 0 & 0 & P_j^{-1} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Hierbei sind A_j, B_j, C_j, D_j Matrizen mit $(n-j)$ Zeilen und Spalten und P_j eine $j \times j$ Matrix. Die Gruppen $\Gamma_j(n)$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ sind genau diejenigen, die Randkomponenten der verallgemeinerten oberen Halbebene bei Unendlich festlassen.

Es sei M eine quadratische Matrix. Dann bezeichnen wir mit

$$\chi(M, x) = \operatorname{Det}(xE - M) \tag{6}$$

das charakteristische Polynom von M. Ist insbesondere $M \in \Sigma(n, C)$, so gilt

$$\chi(M, x) = x^{2n} \chi\left(M, \frac{1}{x}\right). \tag{7}$$

Zum Beweis siehe man [2, (13)]. Ein Polynom, welches dem Transformationsgesetz (7) genügt, wollen wir in dieser Arbeit „involutorisch" nennen.

Meine Arbeit [2] ist die Grundlage der vorliegenden Untersuchung. Daher werde ich mich weiterhin eng an die Bezeichnung und die Resultate von [2] halten. Die Arbeit [2] steht auch im Zusammenhang mit einer Untersuchung von G. E. Wall [6].

Nunmehr beweisen wir folgende Resultate:

Satz 1. *Es sei K ein Körper, welcher der Bedingung (4) genügt und T eine $n \times n$ Matrix mit Elementen aus K. Angenommen, es gibt eine nicht-singuläre $n \times n$ Matrix V mit Elementen aus K, so daß*

$$V^{-1} T V = \begin{pmatrix} T_1 & T_{12} \\ 0 & T_2 \end{pmatrix} \tag{8}$$

mit einer $r \times r$ Matrix T_1 und einer $(n-r) \times (n-r)$ Matrix T_2 gilt. Dann zerfällt das charakteristische Polynom von T im Polynomring $K[x]$ in der Gestalt

$$\chi(T, x) = k_1(x) k_2(x) \tag{9}$$

mit

$$\chi(T_\iota, x) = k_\iota(x) \quad (\iota = 1, 2). \tag{10}$$

Die Polynome $k_1(x)$, $k_2(x)$ haben also den höchsten Koeffizienten 1, und es gilt

$$\operatorname{Grad} k_1(x) = r, \quad \operatorname{Grad} k_2(x) = n - r. \tag{11}$$

Nun zerfalle umgekehrt das charakteristische Polynom $\chi(T, x)$ in $K[x]$ in der Gestalt (9), so daß (11) gilt. Dann gibt es eine nicht-singuläre $n \times n$ Matrix V mit Elementen aus K, derart daß (8) und (10) erfüllt sind. Es seien insbesondere die Elemente von T rational. Genau dann sind die Bedingungen (8), (10) durch ein unimodulares V mit $\operatorname{Det} V = 1$ lösbar, wenn sie mit einem rationalen V lösbar sind.

Satz 2. *Es sei $M \in \Sigma(n, K)$. Angenommen, es gibt ein $R \in \Sigma(n, K)$, so daß*

$$R^{-1} M R = \begin{pmatrix} A_j & 0 & B_j & * \\ * & P_j' & * & * \\ C_j & 0 & D_j & * \\ 0 & 0 & 0 & P_j^{-1} \end{pmatrix} \in \Sigma_j(n, K) \tag{12}$$

mit $(n-j) \times (n-j)$ Matrizen A_j, B_j, C_j, D_j und einer $j \times j$ Matrix P_j gilt. Dann zerfällt das charakteristische Polynom von M im Polynomring $K[x]$ in der Gestalt

$$\chi(M, x) = g(x) h(x) h^*(x) \tag{13}$$

mit

$$\chi(M_j, x) = g(x) \tag{14}$$

und

$$\chi(P_j', x) = h(x), \quad \chi(P_j^{-1}, x) = h^*(x); \tag{15}$$

hierbei wurde

$$M_j = \begin{pmatrix} A_j & B_j \\ C_j & D_j \end{pmatrix} \in \Sigma(n-j, K) \tag{16}$$

gesetzt. Die Polynome $g(x)$, $h(x)$, $h^*(x)$ haben also die höchsten Koeffizienten 1, und es gilt

$$\operatorname{Grad} g(x) = 2(n-j), \quad \operatorname{Grad} h(x) = \operatorname{Grad} h^*(x) = j, \tag{17}$$

sowie

$$g(x) = x^{2(n-j)} g\left(\frac{1}{x}\right) \tag{18}$$

und

$$h^*(x) = \delta x^j h\left(\frac{1}{x}\right) \quad (0 \neq \delta \in K). \tag{19}$$

Insbesondere ist also $g(x)$ involutorisch.

Nehmen wir weiter an, es sei $p(x)$ ein involutorisches Polynom mit

$$\operatorname{Grad} p(x) = 2c, \tag{20}$$

wie es in [2, (73)], *beschrieben wird. $p(x)$ gehe in $\chi(M, x)$ genau zur s-ten Potenz und in $h(x)$ genau zur t-ten Potenz auf. Dann geht $p(x)$ auch in $h^*(x)$ genau zur t-ten Potenz auf.*

Vermöge der in [2] *entwickelten Reduktionstheorie ist dann M konjugiert zu einer Matrix*

$$\{\tilde{M}, \tilde{\tilde{M}}\} \in \Sigma(cs, n-cs, K), \tag{21}$$

wobei die Matrizen $\tilde{M}$, $\tilde{\tilde{M}}$ bis auf Konjugiertenbildung eindeutig bestimmt sind. Die Bezeichnung $\Sigma(n_1, \ldots, n_r; K)$ wurde in [2, Seite 217], *definiert. Ferner gilt*

$$\chi(\tilde{M}, x) = p^s(x), \tag{22}$$

während $\chi(\tilde{\tilde{M}}, x)$ zu $p(x)$ teilerfremd ist. Indem man P_j mit einer nicht-singulären $j \times j$ Matrix konjugiert, deren Elemente in K liegen, kann man es in die Gestalt

$$\begin{pmatrix} \tilde{P} & 0 \\ 0 & \tilde{\tilde{P}} \end{pmatrix} \tag{23}$$

mit einer $(2ct) \times (2ct)$ Matrix $\tilde{P}$ und einer $(j-2ct) \times (j-2ct)$ Matrix $\tilde{\tilde{P}}$ transformieren. Hierbei gilt

$$\chi(\tilde{P}, x) = p^t(x), \tag{24}$$

während $\chi(\tilde{\tilde{P}}, x)$ zu $p(x)$ teilerfremd ist.

Aus der Lösbarkeit von (12) *durch ein $R \in \Sigma(n, K)$ ergibt sich dann weiter: Es existiert eine $(2cs) \times (2ct)$-Matrix N mit Elementen aus K, so daß folgendes gilt:*

$$\tilde{M} N = N \tilde{P}, \tag{25}$$

$$N' I(cs) N = 0, \tag{26}$$

$$\operatorname{Rang} N = 2ct. \tag{27}$$

Jetzt nehmen wir umgekehrt an, daß das charakteristische Polynom von M in der Gestalt (13) *mit* (17), (18), (19) *zerfällt. Ferner sei $p(x)$ ein in $K[x]$ irreduzibles involutorisches Polynom der vorher genannten Art, welches in $\chi(M, x)$ genau von s-ter und in $h(x)$ genau von t-ter Potenz aufgeht. Wir wählen zu $p(x)$ eine $(2ct) \times (2ct)$ Matrix $\tilde{P}$ mit Elementen aus K, so daß* (24) *gilt. Weiter transformieren wir M in die Gestalt* (21). *Dieses machen wir für jedes in $\chi(M, x)$ aufgehende involutorische Polynom $p(x)$ des oben genannten Typs. Und für jedes solche Polynom $p(x)$ mit der dazugewählten Matrix $\tilde{P}$ seien die Bedingungen* (25), (26), (27) *durch ein N lösbar.*

Dann gibt es ein $R \in \Sigma(n, K)$, so daß die Bedingungen (12), (14), (15) *gelten. Ist weiter $p(x)$ eines der oben genannten involutorischen Polynome und $\tilde{P}$ die dazugewählte Matrix, so kann man die in* (12) *auftretende Matrix P_j durch Konjugieren mit einer nicht-singulären $j \times j$ Matrix, deren Elemente aus K sind, in die Gestalt* (23) *transformieren. Hierbei ist $\chi(\tilde{\tilde{P}}, x)$ zu $p(x)$ teilerfremd.*

Es sei insbesondere $M \in \Sigma(n, Q)$. Genau dann sind die Bedingungen (12), (14), (15) *durch eine Siegelsche Modulmatrix $R \in \Gamma(n)$ lösbar, wenn* (12), (14), (15) *durch ein $R \in \Sigma(n, Q)$ lösbar sind.*

Wir können also folgendes sagen. Abgesehen von den involutorischen Polynomen $p(x)$ ist (12) genau dann lösbar, wenn das charakteristische Polynom $\chi(M, x)$ in der Gestalt (13) mit (17), (18), (19) zerfällt. Bei den involutorischen Polynomen $p(x)$ kommen noch die Bedingungen (25) bis (27) hinzu. Ich werde am Schluß der Arbeit auf die Lösbarkeit dieser Bedingungen eingehen.

2. Beweis von Satz 1. Aus der Lösbarkeit von (8) durch eine Matrix V folgen sofort die Bedingungen (9), (10), (11). Nun mögen umgekehrt (9), (11) gelten. Wir zeigen die Lösbarkeit von (8), (10) durch ein passendes V.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man

$$T = \begin{pmatrix} B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_l \end{pmatrix} \tag{28}$$

annehmen mit

$$\chi(B_\lambda, x) = j_\lambda^{b_\lambda}(x) \quad (\lambda = 1, \ldots, l), \tag{29}$$

wobei $j_\lambda(x)$ ein irreduzibles Polynom in $K[x]$ und die b_λ natürliche Zahlen sind. Ferner gelte

$$\operatorname{Grad} j_\lambda(x) = h_\lambda \tag{30}$$

und

$$\operatorname{Rang}(\alpha_\lambda E - B_\lambda) = b_\lambda h_\lambda - 1 \quad (\lambda = 1, \ldots, l) \tag{31}$$

für jede Nullstelle α_λ von $j_\lambda(x)$.

Offenbar gilt

$$j_1^{b_1}(x) \ldots j_l^{b_l}(x) = \chi(T, x) = k_1(x) k_2(x).$$

Wie man leicht sieht, gibt es nicht-negative ganze Zahlen $b_{11}, \ldots, b_{l1}$ und $b_{12}, \ldots, b_{l2}$ mit

$$k_\iota(x) = j_1^{b_{1\iota}}(x) \ldots j_l^{b_{l\iota}}(x) \quad (\iota = 1, 2) \tag{32}$$

und

$$b_\lambda = b_{\lambda 1} + b_{\lambda 2} \quad (\lambda = 1, \ldots, l). \tag{33}$$

Angenommen, Satz 1 ist für jedes B_λ richtig. Dann gibt es nicht-singuläre Matrizen V_λ mit Elementen aus K und von derselben Zeilen- und Spaltenzahl wie B_λ, so daß

$$V_\lambda^{-1} B_\lambda V_\lambda = \begin{pmatrix} B_{\lambda 1} & B_{\lambda 12} \\ 0 & B_{\lambda 2} \end{pmatrix} \qquad (\lambda = 1, \ldots, l) \tag{34}$$

und

$$\chi(B_{\lambda\iota}, x) = j_\lambda^{b_{\lambda\iota}}(x) \qquad (\lambda = 1, \ldots, l;\ \iota = 1, 2) \tag{35}$$

gilt. Hieraus folgt (8) mit

$$V = \begin{pmatrix} V_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & V_l \end{pmatrix}, \qquad T_\varkappa = \begin{pmatrix} B_{1\varkappa} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_{l\varkappa} \end{pmatrix},$$

wobei $\varkappa$ die Indizes 1, 2 und das bei T_{12} auftretende Indexpaar 1, 2 durchläuft. Es genügt also, die Lösbarkeit von (8) für den Fall $T = B$ mit

$$\chi(B, x) = j^b(x) \tag{36}$$

und

$$\operatorname{Rang}(\alpha E - B) = bh - 1 \tag{37}$$

zu zeigen. Hierbei ist $j(x)$ ein irreduzibles Polynom in $K[x]$ vom Gewicht h, ferner b eine natürliche Zahl und α eine Nullstelle von $j(x)$. Wegen (9), (36) müssen auch $k_1(x)$ und $k_2(x)$ Potenzen von $j(x)$ sein, wobei aber auch die nullte Potenz zulässig ist.

Man setze

$$j(x) = x^h + a_{h-1}x^{h-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \tag{38}$$

und bilde die $h \times h$ Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{h-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{h-1} \end{pmatrix}. \tag{39}$$

Die $(bh) \times (bh)$ Matrix B ist dann zu der $(bh) \times (bh)$ Matrix

$$\begin{pmatrix} A & E & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & E \\ 0 & & & A \end{pmatrix} \tag{40}$$

konjugiert über K. Die Matrix (40) besitzt aber die auf der rechten Seite von (8) angegebene Gestalt. Damit ist Satz 1 bis auf die Schlußbemerkung über unimodulare Matrizen bewiesen.

Jetzt gelte (8) mit rationalen Matrizen T, V. Man setze

$$V = UD. \tag{41}$$

Hierbei ist U unimodular, $\operatorname{Det} U = 1$ und

$$D = \begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix}$$

eine „Dreiecksmatrix". Es folgt

$$U^{-1}TU = D \begin{pmatrix} T_1 & T_{12} \\ 0 & T_2 \end{pmatrix} D^{-1}. \tag{42}$$

Die rechte Seite von (42) besitzt wieder die Gestalt

$$\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}.$$

Satz 1 ist bewiesen.

3. Beweis von Satz 2. Zuerst nehmen wir an, daß (12) gilt. Dann folgen sofort die Gleichungen (13) bis (19). Ferner wissen wir, daß $p(x)$ in $h(x)$ genau zur t-ten Potenz aufgeht. Da $p(x)$ involutorisch ist, folgt aus (19), daß $p(x)$ auch in $h^*(x)$ genau zur t-ten Potenz aufgeht. Nun transformiere man M und P_j in die Gestalt (21) bzw. (23). Ferner bringe man auch die durch (12), (16) definierte Matrix M_j in die Gestalt

$$M_j = \{\tilde K, \tilde{\tilde K}\} \in \Sigma(c(s-2t), n-j-c(s-2t), K), \tag{43}$$

mit

$$\chi(\tilde K, x) = p^{s-2t}(x) \tag{44}$$

und $\chi(\tilde{\tilde K}, x)$ teilerfremd zu $p(x)$. Durch rechnen sieht man, daß es eine Matrix $L \in \Sigma_j(n, K)$ mit

$$L^{-1}R^{-1}MRL = \begin{pmatrix} \tilde A & 0 & 0 & 0 & \tilde B & 0 & * & 0 \\ 0 & \tilde{\tilde A} & 0 & 0 & 0 & \tilde{\tilde B} & 0 & * \\ * & 0 & \tilde P' & 0 & * & 0 & * & 0 \\ 0 & * & 0 & \tilde{\tilde P}' & 0 & * & 0 & * \\ \tilde C & 0 & 0 & 0 & \tilde D & 0 & * & 0 \\ 0 & \tilde{\tilde C} & 0 & 0 & 0 & \tilde{\tilde D} & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde P'^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\tilde P}'^{-1} \end{pmatrix} \tag{45}$$

sowie

$$\tilde{K} = \begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & \tilde{D} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\tilde{K}} = \begin{pmatrix} \tilde{\tilde{A}} & \tilde{\tilde{B}} \\ \tilde{\tilde{C}} & \tilde{\tilde{D}} \end{pmatrix}$$

gibt. Die Sterne stehen für Elemente, die wir nicht näher zu kennen brauchen.

Man konjugiere die Matrix (45) mit

$$\begin{pmatrix} U' & 0 \\ 0 & U^{-1} \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix},$$

wobei die Kästchen von U mit passender Zeilen- und Spaltenzahl zu wählen sind. Dann bekommt man

$$R_1^{-1} M R_1 = \{\tilde{H}, \tilde{\tilde{H}}\} \in \Sigma(cs, n-cs, K) \tag{46}$$

mit

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} \tilde{A} & 0 & \tilde{B} & * \\ * & \tilde{P}' & * & * \\ \tilde{C} & 0 & \tilde{D} & * \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{P}^{-1} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\tilde{H}} = \begin{pmatrix} \tilde{\tilde{A}} & 0 & \tilde{\tilde{B}} & * \\ * & \tilde{\tilde{P}}' & * & * \\ \tilde{\tilde{C}} & 0 & \tilde{\tilde{D}} & * \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{\tilde{P}}^{-1} \end{pmatrix} \tag{47}$$

sowie

$$\chi(\tilde{H}, x) = p^s(x). \tag{48}$$

Ferner ist $\chi(\tilde{\tilde{H}}, x)$ zu $p(x)$ teilerfremd. Aus (21), (46) und [2, Lemma 2], folgt

$$R_1 = \{\tilde{R}, \tilde{\tilde{R}}\} \in \Sigma(cs, n-cs; K),$$

sowie

$$\tilde{R}^{-1} \tilde{M} \tilde{R} = \tilde{H} \tag{49}$$

mit $\tilde{R} \in \Sigma(cs, K)$.

Man konjugiere $\tilde{H}$ mit

$$\begin{pmatrix} U' & 0 \\ 0 & U^{-1} \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}, \tag{50}$$

wobei die Zeilen- und Spaltenzahl der Kästchen von U passend gewählt wird. Dann geht $\tilde{H}$ über in eine Matrix der Gestalt

$$\begin{pmatrix} \tilde{P}' & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{pmatrix}. \tag{51}$$

Andererseits gibt es eine nicht-singuläre Matrix J, so daß

$$J^{-1} \tilde{P}' J = \tilde{P} \tag{52}$$

gilt. Also kann man

$$\tilde{M} \tilde{R}_1 = \tilde{R}_1 \begin{pmatrix} \tilde{P} & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{pmatrix} \tag{53}$$

erreichen mit

$$\tilde{R}_1 \in \Sigma(cs, K).$$

Es sei N die $(2cs) \times (2ct)$ Matrix, bestehend aus den ersten $(2ct)$ Spalten von $\tilde{R}_1$. Aus (53) folgt dann sofort (25). Nun geht $p^t(x)$ sowohl in $h(x)$ als auch in $h^*(x)$ auf. Wegen (13) also $p^{2t}(x) | \chi(M, x)$, d.h., $2t \leqslant s$. Hieraus und weil $\tilde{R}_1$ symplektisch ist, ergeben sich (26) und (27). Damit ist gezeigt, daß aus der Lösbarkeit von (12) alle in Satz 2 gennanten Bedingungen folgen.

4. Jetzt nehmen wir umgekehrt an, daß das charakteristische Polynom $\chi(M, x)$ in der Gestalt (13) zerfällt; dabei mögen (17), (18), (19) gelten. Ist ferner $p(x)$ ein involutorisches Polynom und $\tilde{P}$ eine zugehörige Matrix mit den in Satz 2 genannten Eigenschaften, so seien (25), (26), (27) lösbar. Nun zeigen wir, daß es ein $R \in \Sigma(n, K)$ gibt, so daß die Bedingungen (12), (14), (15) gelten. Die in (12) auftretende Matrix P_j kann man dabei in die Gestalt (23) bringen.

Zum Beweise gehen wir aus von der in [2] entwickelten Reduktionstheorie für symplektische Matrizen und bringen M in die Gestalt

$$M = \{M^{(1)}, \ldots, M^{(r)}\} \in \Sigma(n_1, \ldots, n_r; K), \tag{54}$$

wobei die charakteristischen Polynome $\chi(M^{(1)}, x), \ldots, \chi(M^{(r)}, x)$ paarweise teilerfremd sind. Wir bilden die größten gemeinsamen Teiler

$$\begin{cases} g_\varrho(x) = \langle g(x), \chi(M^{(\varrho)}, x) \rangle, \\ h_\varrho(x) = \langle h(x), \chi(M^{(\varrho)}, x) \rangle, \\ h_\varrho^*(x) = \langle h^*(x), \chi(M^{(\varrho)}, x) \rangle \end{cases} \tag{55}$$

$(\varrho = 1, \ldots, r)$ und setzen

$$\operatorname{Grad} h_\varrho(x) = j_\varrho \quad (\varrho = 1, \ldots, r). \tag{56}$$

Aus der Zerlegung [2, (14)], folgt, daß jedes $g_\varrho(x)$ involutorisch ist. Ferner gilt

$$\operatorname{Grad} h_\varrho^*(x) = j_\varrho \quad (\varrho = 1, \ldots, r) \tag{57}$$

und

$$h_\varrho^*(x) = \delta_\varrho x^{j_\varrho} h_\varrho\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (0 \neq \delta_\varrho \in K;\ \varrho = 1, \ldots, r). \tag{58}$$

Ist $p(x)$ ein involutorisches Polynom der in Satz 2 genannten Art und sind s und t ebenfalls wie in Satz 2 definiert, so gibt es einen eindeutig bestimmten Index $\varrho = \varrho_0$, derart, daß $p(x)$ in $\chi(M^{(\varrho_0)}, x)$ genau zur Potenz s und in $h_{\varrho_0}(x)$ und $h_{\varrho_0}^*(x)$ genau zur Potenz t aufgeht, während $p(x)$ zu allen $\chi(M^{(\varrho)}, x)$ mit $\varrho \neq \varrho_0$ teilerfremd ist. Schließlich gilt

$$\begin{cases} g(x) = g_1(x) \ldots g_r(x), \\ h(x) = h_1(x) \ldots h_r(x), \\ h^*(x) = h_1^*(x) \ldots h_r^*(x), \end{cases} \tag{59}$$

$$\chi(M^{(\varrho)}, x) = g_\varrho(x) h_\varrho(x) h_\varrho^*(x) \qquad (\varrho = 1, \ldots, r). \tag{60}$$

Nehmen wir nun an, daß die Aussage von Satz 2 für jedes Kästchen $M^{(\varrho)}$ mit den zugehörigen Polynomen $g_\varrho(x)$, $h_\varrho(x)$, $h_\varrho^*(x)$ $(\varrho = 1, \ldots, r)$ richtig ist. Wir zeigen, daß dann Satz 2 auch für die Matrix M gilt. Es sei nämlich

$$R^{(\varrho)-1} M^{(\varrho)} R^{(\varrho)} = \begin{pmatrix} A_{j_\varrho}^{(\varrho)} & 0 & B_{j_\varrho}^{(\varrho)} & * \\ * & P_{j_\varrho}^{(\varrho)'} & * & * \\ C_{j_\varrho}^{(\varrho)} & 0 & D_{j_\varrho}^{(\varrho)} & * \\ 0 & 0 & 0 & P_{j_\varrho}^{(\varrho)-1} \end{pmatrix} \qquad (\varrho = 1, \ldots, r), \tag{61}$$

$$R^{(\varrho)} \in \Sigma(n_\varrho, K) \qquad (\varrho = 1, \ldots, r), \tag{62}$$

$$M_{j_\varrho}^{(\varrho)} = \begin{pmatrix} A_{j_\varrho}^{(\varrho)} & B_{j_\varrho}^{(\varrho)} \\ C_{j_\varrho}^{(\varrho)} & D_{j_\varrho}^{(\varrho)} \end{pmatrix} \in \Sigma(n_\varrho - j_\varrho, K) \qquad (\varrho = 1, \ldots, r), \tag{63}$$

$$\chi(M_{j_\varrho}^{(\varrho)}, x) = g_\varrho(x) \qquad (\varrho = 1, \ldots, r), \tag{64}$$

$$\chi(P_{j_\varrho}^{(\varrho)'}, x) = h_\varrho(x), \qquad \chi(P_{j_\varrho}^{(\varrho)-1}, x) = h_\varrho^*(x) \qquad (\varrho = 1, \ldots, r). \tag{65}$$

Nun konjugiere man die Matrix

$$(R^{(1)-1} M^{(1)} R^{(1)}, \ldots, R^{(r)-1} M^{(r)} R^{(r)}) = (R^{(1)}, \ldots, R^{(r)})^{-1} (M^{(1)}, \ldots, M^{(r)}) (R^{(1)}, \ldots, R^{(r)})$$

mit

$$\begin{pmatrix} U' & 0 \\ 0 & U^{-1} \end{pmatrix},$$

wobei die Elemente von U nur 0 oder 1 sind. Bei passender Wahl von U erhält man (12) mit

$$M_j = \{M_{j_1}^{(1)}, \ldots, M_{j_r}^{(r)}\} \tag{66}$$

und

$$P_j = \begin{pmatrix} P_{j_1}^{(1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P_{j_r}^{(r)} \end{pmatrix}. \tag{67}$$

Weiter sei $p(x)$ ein involutorisches Polynom der in Satz 2 genannten Art und $\tilde{P}$ die zugehörige Matrix. $p^s(x)$ teile $\chi(M^{(\varrho_0)}, x)$, und es sei $p(x)$ zu $\chi(M^{(\varrho)}, x)$ $(\varrho \neq \varrho_0)$ teilerfremd. Dann kann man $P_{j_{\varrho_0}}^{(\varrho_0)}$ und infolgedessen auch P_j in die Gestalt (23) transformieren. Damit sind alle Forderungen von Satz 2 erfüllt.

Wegen [2, (14)], genügt es also, Satz 2 für folgende Fälle zu beweisen:

$$\chi(M, x) = q^\tau(x), \tag{68}$$

wobei $q^\tau(x)$ wie in [2, § 3], definiert ist;

$$\chi(M, x) = (x \pm 1)^{2m} \tag{69}$$

und

$$\chi(M, x) = p^s(x), \tag{70}$$

wobei $p^s(x)$ wie in [2, § 4], definiert ist.

5. Wir betrachten zuerst den Fall (68). Nach [2, (50)], hat man

$$q(x) = v(x) v^*(x); \tag{71}$$

hierbei sind $v(x)$, $v^*(x)$ irreduzible Polynome aus $K[x]$ mit dem höchsten Koeffizienten 1 und vom Grade d, für welche

$$v^*(x) = \omega x^d v\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (0 \neq \omega \in K) \tag{72}$$

gilt. Aus (13), (68), (71) folgt $h(x) = v^\alpha(x) v^{*\beta}(x)$ mit nicht-negativen ganzen Zahlen α und β. Wegen (19), (72) also $h^*(x) = v^\beta(x) v^{*\alpha}(x)$. Offenbar genügt es nun, die Lösbarkeit von (12) durch ein passendes $R \in \Sigma(d\tau, K)$ für die Fälle $h(x) = v(x)$, $h^*(x) = v^*(x)$ bzw. $h(x) = v^*(x)$, $h^*(x) = v(x)$ zu beweisen, weil man daraus den allgemeinen Fall sofort durch Induktion ableiten kann. Bei $h(x) = v^*(x)$, $h^*(x) = v(x)$ vertauschen wir noch die Bezeichnungen $v(x)$ und $v^*(x)$. Also genügt es, den Fall

$$h(x) = v(x) \quad \text{und} \quad h^*(x) = v^*(x) \tag{73}$$

zu betrachten.

Auf Grund von [2, Lemma 3], gibt es ein $R_1 \in \Sigma(d\tau, K)$ mit

$$R_1^{-1} M R_1 = \begin{pmatrix} T' & 0 \\ 0 & T^{-1} \end{pmatrix} \tag{74}$$

und

(75) $$\chi(T, x) = v^{\tau}(x), \quad \chi(T^{-1}, x) = v^{*\tau}(x).$$

Nun setzen wir

(76) $$R = R_1\begin{pmatrix} V'^{-1} & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix};$$

hierbei bezeichnet V eine nicht-singuläre $(d\tau)\times(d\tau)$ Matrix mit Elementen aus K. Dann geht T in $V^{-1}TV$ über. Wegen Satz 1 kann man V so wählen, daß

(77) $$V^{-1}TV = \begin{pmatrix} T_1 & T_{12} \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}$$

mit

(78) $$\chi(T_1, x) = v^{\tau-1}(x), \quad \chi(T_2, x) = v(x)$$

gilt. Nun sieht man sofort, daß das durch (76) gegebene R die Bedingungen (12), (14), (15) erfüllt.

6. Wir kommen zu (69). Indem man eventuell noch M durch $-M$ ersetzt, erkennt man, daß es ausreicht, den Fall

(79) $$\chi(M, x) = (x-1)^{2m}$$

zu betrachten. Offenbar gilt $h(x) = h^*(x) = (x-1)^a$ mit einer natürlichen Zahl a. Es genügt wieder, den Fall $a = 1$ zu untersuchen, weil sich daraus der allgemeine Fall sofort durch Induktion nach a ergibt.

Es ist also zu zeigen, daß es eine Matrix $R \in \Sigma(m, K)$ mit

(80) $$R^{-1}MR \in \Sigma_1(m, K)$$

gibt. Zerlegt man dann $R^{-1}MR$ entsprechend (12) in Kästchen, so erfüllen diese von selbst die Gleichungen (14), (15).

Es sei $J(\mu)$ die $\mu\times\mu$ Matrix der Gestalt

(81) $$J(\mu) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & \ddots & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Wegen [2, Lemma 5], brauchen wir nur die beiden folgenden Möglichkeiten zu untersuchen: Es gilt

(82) $$Q^{-1}MQ = J(2m)$$

mit einer nicht-singulären $(2m)\times(2m)$ Matrix Q, deren Elemente in K liegen. Oder es ist

(83) $$Q^{-1}MQ = \begin{pmatrix} J(m) & 0 \\ 0 & J(m) \end{pmatrix}$$

für

(84) $$m \equiv 1 \bmod 2.$$

Dabei bezeichnet Q wieder eine nicht-singuläre $(2m)\times(2m)$ Matrix mit Elementen aus K.

Im Falle (82) können wir wegen [2, (182)],

(85) $$M = \begin{pmatrix} J(m) & * \\ 0 & J'^{-1}(m) \end{pmatrix}$$

annehmen. Nun folgt (80) mit

(86) $$R = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U'^{-1} \end{pmatrix};$$

hierbei ist U eine nicht-singuläre Matrix, für die

(87) $$U^{-1}J(m)U = J'(m)$$

gilt. Die Elemente von U lassen sich rational wählen.

Im Falle (83) können wir wegen [2, Lemma 6],

(88) $$M = \begin{pmatrix} J'(m) & 0 \\ 0 & J^{-1}(m) \end{pmatrix}$$

annehmen. Jetzt folgt (80) mit $R = E$.

7. Wir kommen zum Fall (70).

Hilfssatz 1. *Es sei N eine $k\times l$ Matrix mit Elementen aus K, die den Bedingungen*

(89) $$N'I(k)N = 0,$$

(90) $$\operatorname{Rang} N = l,$$

(91) $$2l \leqslant k$$

genügt. Dann kann man N zu einer Matrix aus $\Sigma(k, K)$ ergänzen.

Beweis. Wir fassen uns kurz, da der Beweis nach der in [3] angegebenen Methode verläuft. Offenbar bleiben die Bedingungen (89), (90) richtig, wenn man N von links mit einer Matrix aus $\Sigma(k, K)$ multipliziert. Durch Multiplikation mit einer Matrix aus $\Sigma(k, K)$ erreicht man, daß die erste Spalte von N die erste Einheitsspalte wird. Wie in [3], (20), folgt dann

(92) $$N = \begin{pmatrix} 1 & b_1 \\ 0 & B_1 \\ 0 & 0 \\ 0 & C_1 \end{pmatrix},$$

wobei die Matrix $\begin{pmatrix} B_1 \\ C_1 \end{pmatrix}$ den Bedingungen (89), (90) mit $k-1$, $l-1$ statt k, l genügt. Nunmehr folgt Hilfssatz 1 induktiv nach der in [3] angegebenen Methode.

Man ergänze die in (25), (26), (27) auftretende Matrix N zu einer Matrix $\tilde{R}_1 = (NN_1) \in \Sigma(cs, K)$. Dann gilt $\tilde{R}_1^{-1} N = \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix}$. Hieraus und aus (25) folgt dann (53). Anwendung von (52) liefert (51). Da die Matrix (51) symplektisch ist, folgt

$$(93) \qquad \begin{pmatrix} \tilde{P}' & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & \tilde{P}'^{-1} & * \\ 0 & * & * & * \end{pmatrix}.$$

Indem wir (93) mit dem Inversen von (50) konjugieren, bekommt man (49). Damit ist die Lösbarkeit von (12) bewiesen. Die Bedingungen (14), (15) folgen aus (24).

8. Hilfssatz 2. *Es sei $K \in \Sigma(n, Q)$. Dann gibt es eine Modulmatrix $R \in \Gamma(n)$ mit*

$$(94) \qquad R^{-1} K \in \bigcap_{\nu=1,\ldots,n} \Sigma_\nu(n, Q).$$

Beweis. Dieser Hilfssatz folgt aus einem Resultat von M. Koecher [5]; man kann ihn aber auch wie folgt leicht beweisen. Für $n = 1$ ist die Behauptung richtig, da es ein $R \in \Gamma(1)$ mit

$$R^{-1} K = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

gibt. Nun sei $n > 1$ und die Behauptung für $n-1$ statt n bewiesen. Wie man aus H. Klingen [4, Hilfssatz 2] oder aus [1, Hilfssatz 6] entnimmt, gibt es ein $R_1 \in \Gamma(n)$ mit

$$(95) \qquad R_1^{-1} K = \left(\begin{array}{ccc|ccc} * & \cdots & * \; 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots \; \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & * \; 0 & * & \cdots & * \\ * & \cdots & * \; * & * & \cdots & * \\ \hline * & \cdots & * \; 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots \; \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & * \; 0 & * & \cdots & * \end{array}\right).$$

Da diese Matrix symplektisch ist, folgt

$$(96) \qquad R_1^{-1} K = \left(\begin{array}{ccc|ccc} * & \cdots & * \; 0 & * & \cdots & * \; * \\ \vdots & & \vdots \; \vdots & \vdots & & \vdots \; \vdots \\ * & \cdots & * \; 0 & * & \cdots & * \; * \\ * & \cdots & * \; * & * & \cdots & * \; * \\ \hline * & \cdots & * \; 0 & * & \cdots & * \; * \\ \vdots & & \vdots \; \vdots & \vdots & & \vdots \; \vdots \\ * & \cdots & * \; 0 & * & \cdots & * \; * \\ 0 & \cdots & 0 \; 0 & 0 & \cdots & 0 \; * \end{array}\right).$$

Nunmehr ergibt sich Hilfssatz 2 durch Induktion.

Jetzt sei $M \in \Sigma(n, Q)$ und $K \in \Sigma(n, Q)$, so daß

$$(97) \qquad K^{-1} M K \in \Sigma_j(n, Q)$$

gilt. Aus (94) folgt $K = RL$ mit $R \in \Gamma(n)$ und

$$L \in \bigcap_{\nu=1,\ldots,n} \Sigma_\nu(n, Q) \subset \Sigma_j(n, Q).$$

Also

$$(98) \qquad R^{-1} M R \in \Sigma_j(n, Q).$$

Satz 2 ist bewiesen.

9. Wir wollen jetzt die Lösbarkeit der Bedingungen (25), (26), (27) durch eine $(2cs) \times (2ct)$ Matrix N mit Elementen aus K untersuchen. Dazu seien

$$(99) \qquad p(x) = x^{2c} + a_{2c-1} x^{2c-1} + \ldots + a_1 x + 1$$

ein irreduzibles involutorisches Polynom aus $K[x]$ mit

$$(100) \qquad a_\nu = a_{2c-\nu} \quad (\nu = 1, \ldots, 2c-1)$$

und

$$(101) \qquad \alpha_1, \ldots, \alpha_{2c}$$

die Nullstellen von $p(x)$. Bei passender Indizierung der Nullstellen gilt

$$(102) \qquad \alpha_{2c-\nu+1} = \alpha_\nu^{-1} \quad (\nu = 1, \ldots, c).$$

Man bilde die $(2c) \times (2c)$ Matrizen

$$(103) \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & -a_{2c-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{2c-1} \end{pmatrix}$$

und

$$(104)\qquad \hat{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & \\ & & \alpha_c & & & & \\ & & & \alpha_c^{-1} & & & \\ & 0 & & & \ddots & & \\ & & & & & & \alpha_1^{-1} \end{pmatrix}.$$

Dann gibt es eine nicht-singuläre $(2c)\times(2c)$ Matrix mit Elementen aus $K(\alpha_1, \ldots, \alpha_{2c})$, so daß

$$(105)\qquad G^{-1}AG = \hat{A}$$

gilt.

Hilfssatz 3. *Es sei X eine $(2c)\times(2c)$ Matrix mit Elementen aus K, so daß*

$$(106)\qquad AX = XA$$

gilt. Die Gesamtheit der Lösungen X von (106) bildet einen $(2c)$-dimensionalen Vektorraum über K mit der Basis

$$(107)\qquad E, A, A^2, \ldots, A^{2c-1}.$$

Es gilt entweder

$$(108)\qquad X = 0 \quad \textit{oder} \quad \operatorname{Det} X \neq 0.$$

Beweis. Man setze $\hat{X} = G^{-1}XG$. Die Formel (106) stellt ein homogenes lineares Gleichungssystem für X dar. Um die Dimension des Lösungsraumes zu berechnen, genügt es also, die Dimension des Lösungsraumes von

$$(109)\qquad \hat{A}\hat{X} = \hat{X}\hat{A}$$

zu bestimmen. Offenbar ist (109) genau dann erfüllt, wenn $\hat{X}$ eine Diagonalmatrix ist. Die Dimension des Lösungsraumes von (109) ist also $2c$.

Es seien $l_0, l_1, \ldots, l_{2c-1} \in K$ und $l_0, \ldots, l_{2c-1}$ nicht alle Null. Wir zeigen, daß dann die Determinante von

$$(110)\qquad l_0E + l_1A + \ldots + l_{2c-1}A^{2c-1}$$

nicht verschwindet. Zum Beweis konjugieren wir (110) mit G und bekommen die Diagonalmatrix

$$(111)\qquad l_0E + l_1\hat{A} + \ldots + l_{2c-1}\hat{A}^{2c-1}.$$

Das ν-te Diagonalelement von (111) ist

$$(112)\qquad l_0 + l_1\alpha_\nu + \ldots + l_{2c-1}\alpha_\nu^{2c-1}.$$

Dieses kann nicht verschwinden, da sonst α_ν Nullstelle eines Polynoms aus $K[x]$ vom Grade $\leqslant 2c-1$ wäre. Das widerspricht der Tatsache, daß α_ν die Nullstelle des irreduziblen Polynoms $p(x)$ vom Grade $2c$ ist. Somit folgt, daß die Determinante von (110) nicht Null ist. Insbesondere sind die Matrizen (107) über K linear unabhängig; ferner gilt (108). Hilfssatz 3 ist bewiesen.

10. Es sei μ eine natürliche Zahl. Wir bilden die $(2c\mu)\times(2c\mu)$ Matrizen

$$(113)\qquad B(\mu) = \begin{pmatrix} A & E & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & 0 & \ddots & E \\ & & & A \end{pmatrix},$$

$$(114)\qquad \hat{B}(\mu) = \begin{pmatrix} \hat{A} & E & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & 0 & \ddots & E \\ & & & \hat{A} \end{pmatrix},$$

$$(115)\qquad H(\mu) = \begin{pmatrix} G & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & G \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$(116)\qquad H^{-1}(\mu)B(\mu)H(\mu) = \hat{B}(\mu)$$

sowie

$$(117)\qquad \operatorname{Rang}\big(\alpha_\nu E - B(\mu)\big) = 2c\mu - 1 \qquad (\nu = 1, \ldots, 2c);$$

hierbei sind die α_ν durch (101) gegeben.

11. Nun sei $M \in \Sigma(cs, K)$ und P eine nicht-singuläre $(2ct)\times(2ct)$ Matrix mit Elementen aus K, so daß

$$(118)\qquad \chi(M, x) = p^s(x),$$

$$(119)\qquad \chi(P, x) = p^t(x)$$

gilt. Gesucht ist eine $(2cs)\times(2ct)$ Matrix N mit

$$(120)\qquad MN = NP,$$

so daß (26), (27) erfüllt sind. Man konjugiere M mit einer Matrix aus $\Sigma(cs, K)$ und P mit einer nicht-singulären $(2ct)\times(2ct)$ Matrix, deren Elemente in K liegen. Dann wird N von links mit einer Matrix aus $\Sigma(cs, K)$ und von rechts mit einer nicht-singulären $(2ct)\times(2ct)$ Matrix multipliziert, deren Elemente aus K sind. (26), (27) bleiben dabei ungeändert. Auf Grund der in [2] entwickelten Reduktionstheorie kann man also

$$(121)\qquad M = \{M_1, \ldots, M_r\} \in \Sigma(cs_1, \ldots, cs_r; K)$$

mit

$$\chi(M_\varrho, x) = p^{s_\varrho}(x) \qquad (\varrho = 1, \ldots, r) \tag{122}$$

und

$$s_1 + \ldots + s_r = s \tag{123}$$

erreichen. Wegen [2, (105)], gibt es dabei zu jedem M_ϱ eine nicht-singuläre $(2cs_\varrho) \times (2cs_\varrho)$ Matrix Q_ϱ mit Elementen aus K, so daß

$$Q_\varrho^{-1} M_\varrho Q_\varrho = B(s_\varrho) \qquad (\varrho = 1, \ldots, r) \tag{124}$$

gilt. Weiter kann man

$$P = \begin{pmatrix} B(t_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B(t_l) \end{pmatrix} \tag{125}$$

mit

$$t_1 + \ldots + t_l = t \tag{126}$$

annehmen. Man setze

$$F = \begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & E_r & 0 \\ 0 & E_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & E_r \end{pmatrix}. \tag{127}$$

Hierbei ist E_ϱ die $(cs_\varrho) \times (cs_\varrho)$ Einheitsmatrix $(\varrho = 1, \ldots, r)$. Es gilt

$$F' = F^{-1}, \tag{128}$$

wegen (121) ferner

$$F^{-1} M F = \begin{pmatrix} M_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & M_r \end{pmatrix} \tag{129}$$

und schließlich

$$F' I(cs) F = \begin{pmatrix} I(cs_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & I(cs_r) \end{pmatrix}. \tag{130}$$

Man bilde die Matrizen

$$S_\varrho = Q_\varrho' I(cs_\varrho) Q_\varrho \qquad (\varrho = 1, \ldots, r). \tag{131}$$

Es gilt

$$S_\varrho' = -S_\varrho \qquad (\varrho = 1, \ldots, r), \tag{132}$$

$$\operatorname{Det} S_\varrho \neq 0 \qquad (\varrho = 1, \ldots, r) \tag{133}$$

und

$$B'(s_\varrho) S_\varrho B(s_\varrho) = S_\varrho \qquad (\varrho = 1, \ldots, r); \tag{134}$$

letzteres folgt aus $M_\varrho' I(cs_\varrho) M_\varrho = I(cs_\varrho)$ und (124). Wir setzen

$$L = \begin{pmatrix} Q_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & Q_r \end{pmatrix}^{-1} F^{-1} N. \tag{135}$$

Die Gleichung (120) geht über in

$$\begin{pmatrix} B(s_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B(s_r) \end{pmatrix} L = LP. \tag{136}$$

Aus (26), (27) folgt

$$L' \begin{pmatrix} S_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & S_r \end{pmatrix} L = 0, \tag{137}$$

$$\operatorname{Rang} L = 2ct. \tag{138}$$

Genügt andererseits L den Bedingungen (136), (137), (138), so definiere man N durch (135). Dieses N erfüllt (25), (26), (27).

Wir zeigen jetzt, daß die Matrizen S_ϱ ähnliche Gestalt besitzen, wie die Matrizen [2, (115)] und [2, (153)].

Hilfssatz 4. *Jede Matrix S_ϱ besitzt die Gestalt*

$$S = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & S_{\varrho 1 s_\varrho} \\ \vdots & & \iddots & \vdots \\ 0 & \iddots & & \vdots \\ S_{\varrho s_\varrho 1} & \cdots & \cdots & S_{\varrho s_\varrho s_\varrho} \end{pmatrix} \qquad (\varrho = 1, \ldots, r). \tag{139}$$

Hierbei sind die $S_{\varrho\iota\varkappa}$ $(\iota, \varkappa = 1, \ldots, s_\varrho)$ Matrizen von $2c$ Zeilen und Spalten. Es gilt

(140) $$A' S_{\varrho\iota\varkappa} A = S_{\varrho\iota\varkappa} \quad (\iota, \varkappa = 1, \ldots, s_\varrho),$$

(141) $$S_{\varrho\iota\varkappa} = -S'_{\varrho\varkappa\iota} \quad (\iota, \varkappa = 1, \ldots, s_\varrho),$$

(142) $$\operatorname{Det} S_{\varrho,\iota,s_\varrho-\iota+1} \neq 0 \quad (\iota = 1, \ldots, s_\varrho),$$

(143) $$S_{\varrho,\iota+1,s_\varrho-\iota} = -A'^{-1} S_{\varrho,\iota,s_\varrho-\iota+1} A \quad (\iota = 1, \ldots, s_\varrho - 1).$$

Beweis. Wir lassen für die Rechnung den Index ϱ fort. Insbesondere schreiben wir s statt s_ϱ. Man setze

(144) $$\hat S = H'(s) S H(s),$$

(145) $$S = \begin{pmatrix} S_{11} & \ldots & S_{1s} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ S_{s1} & \ldots & S_{ss} \end{pmatrix}, \qquad \hat S = \begin{pmatrix} \hat S_{11} & \ldots & \hat S_{1s} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \hat S_{s1} & \ldots & \hat S_{ss} \end{pmatrix},$$

(146) $$\hat S_{\iota\varkappa} = G' S_{\iota\varkappa} G \quad (\iota, \varkappa = 1, \ldots, s).$$

Aus (134) folgt dann

(147) $$\hat B'(s) \hat S \hat B(s) = \hat S.$$

Wegen (114) ist (147) gleichbedeutend mit

(148) $$\hat A' \hat S_{11} \hat A = \hat S_{11},$$

(149) $$\hat A' \hat S_{1,\varkappa-1} + \hat A' \hat S_{1\varkappa} \hat A = \hat S_{1\varkappa} \quad (\varkappa = 2, \ldots, s),$$

(150) $$\hat S_{\iota-1,1} \hat A + \hat A' \hat S_{\iota 1} \hat A = \hat S_{\iota 1} \quad (\iota = 2, \ldots, s),$$

(151) $$\hat S_{\iota-1,\varkappa-1} + \hat A' \hat S_{\iota,\varkappa-1} + \hat S_{\iota-1,\varkappa} \hat A + \hat A' \hat S_{\iota\varkappa} \hat A = \hat S_{\iota\varkappa} \quad (\iota, \varkappa = 2, \ldots, s).$$

Aus (104), (148) ersieht man, daß $\hat S_{11}$ die Gestalt

(152) $$\begin{pmatrix} & & & * \\ & 0 & \iddots & \\ & \iddots & 0 & \\ * & & & \end{pmatrix}$$

besitzt. Wegen (149) folgt dann durch Induktion nach $\varkappa$, daß $\hat S_{1\varkappa}$ $(\varkappa = 2, \ldots, s)$ ebenfalls von der Form (152) ist. Dasselbe bekommt man für $\hat S_{\iota 1}$ $(\iota = 2, \ldots, s)$ aus (150) durch Induktion nach ι. Schließlich ergibt sich dann aus (151), daß alle $\hat S_{\iota\varkappa}$ von der Gestalt (152) sind, indem man erst Induktion nach dem einen und dann nach dem anderen Index macht. Also ist jedes $\hat S_{\iota k}$ $(\iota, \varkappa = 1, \ldots, s)$ von der Form (152). Daraus folgt

(153) $$\hat A' \hat S_{\iota\varkappa} \hat A = \hat S_{\iota\varkappa} \quad (\iota, \varkappa = 1, \ldots, s).$$

Anwendung von (105), (146) liefert (140). Aus (149), (150), (151) einerseits und (153) andererseits bekommt man weiter

(154) $$\hat S_{1,\varkappa-1} = 0, \quad \hat S_{\iota-1,1} = 0 \quad (\iota, \varkappa = 2, \ldots, s),$$

(155) $$\hat S_{\iota-1,\varkappa-1} + \hat A' \hat S_{\iota,\varkappa-1} + \hat S_{\iota-1,\varkappa} \hat A = 0 \quad (\iota, \varkappa = 2, \ldots, s).$$

Hieraus schließt man

(156) $$\hat S_{\iota\varkappa} = 0 \quad (\iota + \varkappa \leqslant s).$$

Wegen (146) folgen hieraus (139) und (143). Die Formeln (141) und (142) bekommt man aus (132), (133), (139). Hilfssatz 4 ist bewiesen.

12. Wir zerlegen die in (136) auftretende Matrix L in der Gestalt

(157) $$L = (L_{\varrho\lambda}) \quad (\varrho = 1, \ldots, r;\ \lambda = 1, \ldots, l)$$

mit $(2cs_\varrho) \times (2ct_\lambda)$ Kästchen $L_{\varrho\lambda}$. Dann ist (136) gleichbedeutend mit

(158) $$B(s_\varrho) L_{\varrho\lambda} = L_{\varrho\lambda} B(t_\lambda) \quad (\varrho = 1, \ldots, r;\ \lambda = 1, \ldots, l).$$

Der folgende Hilfssatz erinnert an [2, (94)].

Hilfssatz 5. *Die Matrix $L_{\varrho\lambda}$ ist genau dann eine Lösung von (158), wenn gilt*

(159) $$L_{\varrho\lambda} = \begin{cases} \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_{t_\lambda} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & X_2 \\ & & & X_1 \\ & & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} & (s_\varrho \geqslant t_\lambda), \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & X_1 & X_2 & \cdots & X_{s_\varrho} \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & X_1 \end{pmatrix} & (s_\varrho \leqslant t_\lambda). \end{cases}$$

Hierbei sind $X_1, X_2, \ldots$ mit A vertauschbare $(2c) \times (2c)$ Matrizen, deren Elemente in K liegen.

Beweis. Man schreibe L statt $L_{\varrho\lambda}$ und s, t statt s_ϱ und t_λ. Ferner sei

(160) $$L = \begin{pmatrix} X_{11} & \ldots & X_{1t} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ X_{s1} & \ldots & X_{st} \end{pmatrix}$$

mit $(2c)\times(2c)$ Matrizen $X_{\sigma\tau}$ $(\sigma=1,\ldots,s;\ \tau=1,\ldots,t)$. Weiter werde

$$\hat{L}=H^{-1}(s)\,LH(t)=\begin{pmatrix}\hat{X}_{11} & \ldots & \hat{X}_{1t}\\ \cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\\ \hat{X}_{s1} & \ldots & \hat{X}_{st}\end{pmatrix} \tag{161}$$

gesetzt. Dann gilt

$$\hat{X}_{\sigma\tau}=G^{-1}X_{\sigma\tau}G \qquad (\sigma=1,\ldots,s;\ \tau=1,\ldots,t). \tag{162}$$

Aus (158) ergibt sich

$$\hat{B}(s)\hat{L}=\hat{L}\hat{B}(t). \tag{163}$$

Das ist äquivalent zu folgenden Gleichungen:

$$\hat{A}\hat{X}_{\sigma\tau}+\hat{X}_{\sigma+1,\tau}=\hat{X}_{\sigma,\tau-1}+\hat{X}_{\sigma\tau}\hat{A} \qquad (\sigma=1,\ldots,s-1;\ \tau=2,\ldots,t), \tag{164}$$

$$\hat{A}\hat{X}_{\sigma1}+\hat{X}_{\sigma+1,1}=\hat{X}_{\sigma1}\hat{A} \qquad (\sigma=1,\ldots,s-1), \tag{165}$$

$$\hat{A}\hat{X}_{s\tau}=\hat{X}_{s,\tau-1}+\hat{X}_{s\tau}\hat{A} \qquad (\tau=2,\ldots,t), \tag{166}$$

$$\hat{A}\hat{X}_{s1}=\hat{X}_{s1}\hat{A}. \tag{167}$$

Aus (104) und (167) ersieht man, daß $\hat{X}_{s1}$ eine Diagonalmatrix ist. Wegen (165), (166) sind dann auch $\hat{X}_{\sigma1}$ und $\hat{X}_{s\tau}$ Diagonalmatrizen. Schließlich liefert (164), daß alle $\hat{X}_{\sigma\tau}$ Diagonalmatrizen sind. Also

$$\hat{A}\hat{X}_{\sigma\tau}=\hat{X}_{\sigma\tau}\hat{A} \qquad (\sigma=1,\ldots,s;\ \tau=1,\ldots,t). \tag{168}$$

Auf Grund von (105), (162) folgt

$$AX_{\sigma\tau}=X_{\sigma\tau}A \qquad (\sigma=1,\ldots,s;\ \tau=1,\ldots,t). \tag{169}$$

Anwendung von (168) auf (164) bis (166) liefert wegen (162):

$$X_{\sigma+1,\tau}=X_{\sigma,\tau-1} \qquad (\sigma=1,\ldots,s-1;\ \tau=2,\ldots,t), \tag{170}$$

$$X_{21}=\ldots=X_{s1}=0, \tag{171}$$

$$X_{s1}=\ldots=X_{s,t-1}=0. \tag{172}$$

Daraus folgt (159). Nun sieht man leicht, daß die durch (159) gegebenen $L_{\varrho\lambda}$ auch (158) lösen, wenn $X_1, X_2, \ldots$ mit A vertauschbar sind. Hilfssatz 5 ist bewiesen.

Durch Hilfssatz 5 haben wir einen vollständigen Überblick über alle Lösungen von (136). Wegen (157) ist (137) äquivalent zu

$$\sum_{\varrho=1}^{r} L'_{\varrho\varkappa}S_\varrho L_{\varrho\lambda}=0 \qquad (\varkappa,\lambda=1,\ldots,l). \tag{173}$$

Wir werden nun sehen, daß (173) zusammen mit (138) in einigen Fällen lösbar in anderen Fällen unlösbar ist.

13. Satz 3. *Es sei*

$$r\geqslant l \tag{174}$$

und

$$s_\lambda\geqslant 2t_\lambda \qquad (\lambda=1,\ldots,l). \tag{175}$$

Dann sind die Bedingungen (136), (137), (138) *lösbar.*

Beweis. Aus (139), (159) folgt

$$L'_{\varrho\varkappa}S_\varrho L_{\varrho\lambda}=0 \qquad (s_\varrho\geqslant t_\varkappa+t_\lambda). \tag{176}$$

Wir wählen nun

$$L_{\varrho\lambda}=0 \qquad (\varrho\neq\lambda), \tag{177}$$

$$L_{\lambda\lambda}=\begin{pmatrix}E\\0\end{pmatrix} \qquad (\lambda=1,\ldots,l) \tag{178}$$

mit einer $(2ct_\lambda)\times(2ct_\lambda)$ Einheitsmatrix E. Dann gilt

$$L'_{\varrho\varkappa}S_\varrho L_{\varrho\lambda}=0, \tag{179}$$

falls nicht $\varkappa=\varrho=\lambda$ gilt. Bei $\varkappa=\varrho=\lambda$ ergibt sich aber (179) aus (175) und (176). Also ist (173) erfüllt. Die Matrizen (177), (178) besitzen ferner die Gestalt (159); sie lösen deshalb (158). Man füge die Kästchen $L_{\varrho\lambda}$ entsprechend (157) zu einer Matrix L zusammen; diese erfüllen dann die Bedingungen (136), (137). Aus der Konstruktion von L folgt weiter die Gültigkeit von (138). Satz 3 ist bewiesen.

14. Wir zeigen jetzt an zwei Beispielen, daß (136), (137), (138) nicht immer lösbar sind.

Beispiel 1. Es sei

$$r=2,\ l=1, \tag{180}$$

$$s_1=s_2=t_1=1. \tag{181}$$

Aus (157), (159) folgt dann

$$L=\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}, \tag{182}$$

wobei X_1 und X_2 mit A vertauschbar sind. Jedes solche L löst (136). Aus (173) bekommt man

$$X_1'S_1X_1+X_2'S_2X_2=0. \tag{183}$$

Hierbei sind S_1, S_2 schiefsymmetrisch und nicht singulär.

Wir behaupten weiter, daß die Bedingung (138) zu

$$\operatorname{Det}X_1\neq 0, \quad \operatorname{Det}X_2\neq 0 \tag{184}$$

äquivalent ist. Aus (184) folgt jedenfalls (138). Wir nehmen jetzt an, daß (184) nicht gilt und zeigen die Ungültigkeit von (138). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\operatorname{Det}X_1=0$, wegen Hilfssatz 3 also $X_1=0$.

Die Gleichung (183) liefert dann $X_2' S_2 X_2 = 0$; aber $\mathrm{Det}\, S_2 \neq 0$, somit $\mathrm{Det}\, X_2 = 0$, d.h., $X_2 = 0$ auf Grund von Hilfssatz 3. Bei $X_1 = X_2 = 0$ gilt aber (138) nicht. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Es bleibt also festzustellen, wann die Bedingung (183) gilt. Man setze $X = X_2 X_1^{-1}$. Dann ist X mit A vertauschbar und aus (183) folgt

$$S_1 + X' S_2 X = 0. \tag{185}$$

Ferner hat man

$$\mathrm{Det}\, X \neq 0. \tag{186}$$

Es gebe andererseits ein mit A vertauschbares X, so daß die Beziehungen (185), (186) gelten. Dann ist $X_1 = E$, $X_2 = X$ eine Lösung von (183). Man braucht also nur noch festzustellen, wann (185) durch ein nichtsinguläres mit A vertauschbares X lösbar ist. Dieses Problem führt nun genau auf die in [2, Seiten 230–232] beschriebene Reduktionstheorie. Daraus entnimmt man, daß (185) genau dann lösbar ist, wenn gewisse arithmetische Bedingungen gelten. Im Falle (180), (181) führt also die Frage nach der Lösbarkeit von (136), (137), (138) auf arithmetische Bedingungen.

Beispiel 2. In dieser Arbeit tritt das Problem der Lösbarkeit von (136) bis (138) nur für $s \geqslant 2t$ auf. Zerlegt man aber L in Kästchen der Gestalt (157), so kann dabei auch $s_\varrho < 2t_\lambda$ sein. Deshalb betrachten wir auch den Fall

$$r = l = 1 \tag{187}$$

mit

$$s < 2t \tag{188}$$

und zeigen, daß es dann keine Lösung L von (136), (137), (138) gibt.

Wegen (138), (159) existiert jedenfalls keine Lösung bei $s < t$. Für $t \leqslant s < 2t$ hat man

$$L = \begin{pmatrix} X_1 & \cdots & X_t \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & X_1 \\ \vdots & & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \tag{189}$$

wobei $X_1, \ldots, X_t$ mit A vertauschbar sind. (138) ist dann gleichbedeutend mit

$$\mathrm{Det}\, X_1 \neq 0. \tag{190}$$

Wegen $r = 1$ gibt es nur eine Matrix S der in (131) genannten Art. Formel (137) geht über in

$$L' S L = 0. \tag{191}$$

Wegen (139) gilt dabei

$$S = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & S_{1s} \\ \vdots & & ⋰ & \vdots \\ 0 & ⋰ & & \vdots \\ S_{s1} & \cdots & \cdots & S_{ss} \end{pmatrix}. \tag{192}$$

Berechnet man nun $L'SL$ aus (189) und (192), so sieht man, daß eines der $(2c)\times(2c)$ Kästchen von $L'SL$ die Gestalt $X_1' S_{s-t+1,t} X_1$ besitzt. Aus (142), (190) folgt $\mathrm{Det}(X_1' S_{s-t+1,t} X_1) \neq 0$. Somit kann (191) nicht gelten. D.h., (136) bis (138) sind unlösbar.

Literatur

[1] U. Christian, *Einführung in die Theorie der paramodularen Gruppen*, Math. Ann. 168 (1967), S. 59–104.

[2] — *A reduction theory for symplectic matrices*, Math. Zeitschr. 101 (1967), S. 213–244.

[3] — *Über die erste Zeile paramodularer Matrizen*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, math.-phys. Klasse, 1967, S. 239–245.

[4] H. Klingen, *Über die Erzeugenden gewisser Modulgruppen*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, math.-phys. Klasse, 1956, S. 173–185.

[5] M. Koecher, *Zur Theorie der Modulformen n-ten Grades II*, Math. Zeitschr. 61 (1955), S. 455–466.

[6] G. E. Wall, *On the conjugacy classes in the unitary, symplectic and orthogonal groups*, J. Australian Math. Soc. 3 (1963), S. 1–62.

Eingegangen 15. 6. 1972 (293)