ACTA ARITHMETICA
XXIV (1973)

Über eine Methode von E. Hecke in der Theorie der Gleichverteilung

von

EDMUND HLAWKA (Wien)

Herrn Prof. C. L. Siegel zum 75. Geburtstag gewidmet in Dankbarkeit und Verehrung

E. Hecke [3] zeigte 1921 folgenden Satz: Ist α irrational, dann ist die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \{n\alpha\} z^n$ über den Einheitskreis nicht fortsetzbar. Dabei bedeutet $\{x\} = x - [x]$. Er benützte dabei die Theorie der Gleichverteilung. Er ging von folgender Bemeıkung aus: Ist für eine reelle Zahlenfolge (c_k) der Limes $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} c_k = c$ vorhanden, dann ist $\lim_{r\to 1-0} (1-r) \sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k$ ebenfalls vorhanden und $= c$. Da die Folge $\{n\alpha\}$ gleichverteilt ist, so ist für jede im Riemannschen Sinne integrierbare, periodische Funktion f mit der Periode 1

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(k\alpha) = \int_0^1 f(x)\,dx. \tag{1}$$

Nimmt man jetzt $z_q = re^{2\pi i q\alpha}$ (q natürliche Zahl, $0 < r < 1$) und wendet (1) auf die Funktion $f(x) = \{x\} e^{2\pi i q x}$ an, so erhält man, da für $q \neq 0$ ja $\int_0^1 f\,dx = (2\pi i q)^{-1}$, daß

$$\lim_{r\to 1} (1-r) \sum_{n=1}^{\infty} \{n\alpha\} e^{2\pi i q n\alpha} r^n = (2\pi i q)^{-1}. \tag{2}$$

Da die Folge $(e^{2\pi i q\alpha})$ auf $|z| = 1$ dicht liegt, so folgt aus (2) die Behauptung von Hecke. Er zeigte darüber hinaus: Sind α, β linearunabhängig über Z, so ist

$$\lim_{r\to 1} (1-r) \sum_{n=1}^{\infty} \{n\alpha\} e^{2\pi i n\beta} r^n = 0. \tag{3}$$

Dies folgt daraus, daß unter dieser Voraussetzung die zweidimensionale Folge $(n\alpha, n\beta)$ gleichverteilt mod 1 ist und für jede im Riemannschen Sinne integrierbare Funktion f, periodisch mit der Periode 1, in zwei Variabeln

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}f(k\alpha,k\beta)=\int_0^1\int_0^1 f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2.$$

Die Funktion $f(x_1,x_2)=\{x_1\}e^{2\pi i x_2}$ liefert dann die Behauptung. Die Methode von Hecke wurde von vielen Autoren verallgemeinert, ich hebe nur W. Schwarz [8] und F. W. Caroll und J. H. B. Kemperman [1] hervor. So zeigen die letztgenannten Autoren: Für jede Funktion Φ (unter den gleichen Voraussetzungen wie oben für f) gilt für jedes ganzzahlige $q\geqslant 1$

$$\lim_{r\to 1}(1-r)\sum_{n=1}^{\infty}\Phi(\alpha n)e^{2\pi i q n\alpha}r^n=\hat{\Phi} \tag{3'}$$

wo $\hat{\Phi}=\int_0^1\Phi(x)e^{2\pi i q x}dx$. Wenn $\hat{\Phi}\neq 0$, so wird die Stelle $e^{2\pi i q\alpha}$ eine Stelle starker Singularität der Funktion $\sum\Phi(\alpha n)z^n$ genannt. Wir stellen nun die Frage: Kann man z.B. in (2) bzw. (3′) mehr aussagen d.h. kann man über die Differenz

$$\delta(\Phi,r,q)=(1-r)\sum\Phi(\alpha n)e^{2\pi i q n\alpha}-\hat{\Phi}$$

in Abhängigkeit von r eine Abschätzung stärker als (1) herleiten? Diese Abhängigkeit wird von den feineren Eigenschaften von α und Φ abhängen. So werden wir zeigen: Besitzt die Kettenbruchentwicklung von α beschränkte Teilnenner und ist Φ von beschränkter Variation, so ist

$$|\delta(r)|\leqslant K(\Phi)\,(1-r)\log\frac{1}{1-r}$$

wo K nur von Φ und q abhängt. Besitzt Φ höhere Ableitungen, dann gilt sogar

$$|\delta(r)|\leqslant K(\Phi)\,(1-r).$$

Da es die gleiche Mühe macht und um auch (3) behandeln zu können behandeln wir gleich Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty}\Phi(\alpha_1 n,\ldots,\alpha_s n)z^n$, wo $\alpha_1,\ldots,\alpha_s$ linear unabhängig über Z sind.

Wir gehen sogar weiter, indem wir eine beliebige Folge $\omega=(x_0,x_1,\ldots)$ im R^s zu Grunde legen. Dann betrachten wir $\sum_{n=0}^{\infty}f(x_n)r^n$, wo wieder f die gleichen Voraussetzungen wie oben erfüllt, aber jetzt auf R^s definiert ist. Von Interesse ist für uns der Fall, daß $f(x)=\chi_J(x_1-[x_1],\ldots,x_s-[x_s])$, wo χ_J die charakteristische Funktion eines Teilintervalls J des s-dimensionalen Einheitswürfels I^s ist. Ist nämlich $D_N(\omega)$ die Diskrepanz von ω welche definiert ist als

$$\sup_J\left|\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}\chi_J(\{x_k\})-\operatorname{Vol}J\right|$$

erstreckt über alle J mit $0=(0,\ldots,0)$ als linken unteren Eckpunkt ($\operatorname{Vol}J$ = Volumen von J), dann sei

$$D_N^*(\omega)=\sup_{m\geqslant N}D_m(\omega).$$

Weiter führen wir folgenden Ausdruck ein, welchen ich Abelsche Diskrepanz von ω nennen möchte $(0<r<1)$

$$D_A(\omega,r)=\sup_J\left|(1-r)\sum_{k=0}^{\infty}\chi_J(\{x_k\})r^k-\operatorname{Vol}J\right|$$

und dazu noch $D_A^*(\omega,r)=\sup_{r'\geqslant r}D_A(\omega,r')$.

Wir zeigen zunächst (Formel (10))

$$D_A(\omega,r)\leqslant D_A^*(\omega,r)\leqslant 4D_M^*(\omega)$$

wo $M=[(1-r)^{-1/2}]$. Dann zeigen wir als „Taubersche Abschätzung"

$$D_N(\omega)\leqslant D_N^*(\omega)\leqslant 6^3\left(\log D_A^{-1}\left(\omega,e^{-\frac{\log(N+1)}{N+1}}\right)\right)^{-1/2}\qquad\text{(Formel (38))}.$$

Es läßt sich leicht zeigen, daß der Exponent $1/2$ in der obigen Abschätzung durch 1 ersetzt werden kann, was aber in der Arbeit nicht weiter ausgeführt wird. Wie weit sich diese Abschätzungen verbessern lassen wäre ein interessantes Problem. Es ist bekannt, daß $D_N(\omega)\geqslant(N+1)^{-1}$, ja nach W. Schmidt gibt es unendlich viele N_i so daß bei passendem $c(\omega)$ gilt

$$D_{N_i}(\omega)\geqslant c\frac{\log(N_i+1)}{N_i+1}.$$

Für die oben eingeführte Abelsche Diskrepanz läßt sich leicht zeigen, daß $D_A(\omega,r)\geqslant 1-r$.

Es ist zu vermuten, daß unendlich viele r_i mit $\lim_{i\to\infty}r_i=1$ existieren, so daß

$$D_A(\omega,r_i)\geqslant c(1-r_i)\log\frac{1}{1-r_i}.$$

Dies wird insbesondere für die Folge $\omega=(n\alpha)$ gelten, wenn α irrational ist. Dieser Spezialfall läßt sich vermutlich einfacher beweisen, wenn man die Methode von Ostrowski (vgl. Koksma [5]) zum Beweis von

$$D_N((n\alpha))=\Omega\left(\frac{\log N}{N}\right)$$

auf den vorliegenden Fall überträgt.

§ 1. Es sei f eine im Riemannschen Sinne integrierbare Funktion in s Variablen, periodisch mit der Periode 1, weiter sei $\omega=(x_0,x_1,\ldots)$ eine Folge im R^s. Wir betrachten nun die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}f(x_n)r^n$. Wir setzen

$\lambda(f) = \int\limits_{I^s} f(x)dx$, wo I^s der Würfel $0 \leqslant \xi_i < 1$ $(i = 1, \ldots, s)$. Wir wollen nun das Verhalten von

$$\delta(r, f, \omega) = \Big|(1-r)\sum_{n=0}^{\infty} f(x_n)r^n - \lambda(f)\Big|$$

untersuchen. Wir setzen $c_n = f(x_n) - \lambda(f)$, $C_n = c_0 + \ldots + c_n$, dann ist für ganzzahliges $M \geqslant 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n = \sum_{n=0}^{M-1} c_n r^n - C_{M-1} r^M + (1-r)\sum_{n=M}^{\infty} C_n r^n \tag{4}$$

$\big(\sum\limits_{n=0}^{-1} = C_{-1} = 0\big)$. Wir setzen weiter

$$\Delta_n(f) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f(x_k) - \lambda,$$

so ist $C_n = (n+1)\Delta_n(f)$. Da f integrierbar ist, so existiert ein K, so daß $|f| \leqslant K$. Wir erhalten aus (4) für $0 \leqslant r < 1$

$$\delta(r, f, \omega)\,(1-r)^{-1} \leqslant 2MK + M|\Delta_M(f)| + (1-r)\sum_{n=M}^{\infty}(n+1)|\Delta_n(f)|r^n \tag{5}$$

insbesondere für $M = 0$

$$\delta(r, f, \omega) \leqslant (1-r)^2 \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)|\Delta_n(f)|r^n. \tag{5'}$$

Es sei jetzt vorausgesetzt, daß f von beschränkter Variation $V(f)$ im Sinne von Hardy–Krause ist (für $s = 1$ ist es die übliche Variation), dann gilt [4]

$$|\Delta_n(f)| \leqslant D_n(\omega)V(f). \tag{6}$$

Wir führen wie in der Einleitung die modifizierte Diskrepanz $D_n^* = \sup\limits_{m \geqslant n} D_m$ ein. Es ist die Folge (D_n^*) monoton abnehmend,

$$\sum_{n=M}^{\infty}(n+1)D_n r^n \leqslant D_M^* \sum_{n=M}^{\infty}(n+1)r^n < D_M^*(1-r)^{-2}$$

erhalten. Wir aus (5)

$$\delta(r, f, \omega)\,(1-r)^{-1} \leqslant 2MK + V(f)\big(M + (1-r)^{-1}\big)D_M^*. \tag{7}$$

Für $M = 0$ erhalten wir aus (5')

$$\delta(r, f, \omega)\,(1-r)^{-1} \leqslant V(f)\,(1-r)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)D_n r^n. \tag{8}$$

Wir nehmen nun in (7) $M = [(1-r)^{-1/2}]$. Es ist $M \geqslant 1$ und wir erhalten aus (7)

$$\delta(r, f, \omega) \leqslant 2K(1-r)^{1/2} + V(f)\big((1-r)^{1/2} + 1\big)D_M^*.$$

Nun ist $D_M^* \geqslant D_M \geqslant (M+1)^{-1}$, also

$$\delta \leqslant 2\big(K + V(f)\big)D_M^*(\omega). \tag{9}$$

Es sei nun J ein Teilintervall von I^s, $f(x) = \chi_J(x_1 - [x_1], \ldots, x_s - [x_s])$ wo χ_J die charakteristische Funktion von J ist. Dann ist $\lambda(f)$ das Volumen $\mu(J)$ von J, $V(f) = K = 1$ und wir erhalten, wenn wir

$$D_A(\omega, r) = \sup_J \Big|(1-r)\sum_{n=0}^{\infty}\chi_J(x_n) - \mu(J)\Big|$$

die Abelsche Diskrepanz von ω, einführen

$$D_A(\omega, r) \leqslant 4D_{M(r)}^*(\omega) \tag{10}$$

wo $M(r) = [(1-r)^{-1/2}]$. Dabei wollen wir auch in D_A nur die J betrachten, welche 0 als linken unteren Eckpunkt haben (obwohl dies nicht notwendig wäre). Führen wir noch die modifizierte Abelsche Diskrepanz $D_A^*(\omega, r) = \sup\limits_{r' \geqslant r} D_A(\omega, r')$ ein, so folgern wir leicht aus (10), daß auch

$$D_A^*(\omega, r) \leqslant 4D_M^*(\omega) \tag{10'}$$

gilt.

Man kann unter Umständen schärfere Abschätzungen als (9) herleiten. Nehmen wir an, es gelte eine Abschätzung

$$D_n(\omega) \leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{h(k)}$$

wo h eine monoton wachsende Funktion ist. Dann folgt aus (8)

$$\delta(r, f, \omega) \leqslant V(f)\,(1-r)^2 \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{h(k)}.$$

Nun ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \sum_{k=0}^{n} h^{-1}(k) = (1-r)^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} h^{-1}(n)r^n,$$

also erhalten wir

$$\delta(r, f, \omega) \leqslant V(f)\,(1-r)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^n}{h(n)}. \tag{11}$$

Wenn man über f stärkere Voraussetzungen macht, kann man ebenfalls (9) verschärfen. Nehmen wir zuerst $s = 1$ und nehmen an, daß f stetige Ableitungen bis zu einer Ordnung m besitzt.

Nach der Eulerschen Summenformel gilt

$$f(x) = \lambda(f) + \sum_{r=1}^{m} \frac{1}{r!} P_r(x)\left(f^{(r-1)}(1) - f^{(r-1)}(0)\right) - \frac{1}{m!}\int_0^1 P_m(x-t) f^{(m)}\,dt.$$

Dabei ist P_r das r-te Bernoullische Polynom. Da f periodisch ist, so haben wir, wenn wir noch $P_0 = 1$ setzen

$$f(x) = \lambda(f) - \frac{1}{m!}\int_0^1 P_m(x-t) f^{(m)}(t)\,dt = \sum_{k=0,1} \frac{(-1)^k}{(mk)!}\int_0^1 P_{mk}(x-t) f^{(mk)}(t)\,dt.$$

Ist jetzt $s > 1$ dann wenden wir diese Summenformel s-mal an. Dabei nehmen wir an, daß f stetige Ableitungen bis zur Ordnung ms besitzt. Wir erhalten dann, wenn wir $k = (k_1, \ldots, k_s)$,

$$P_{mk}(x-t) = P_{mk_1}(x_1 - t_1) \ldots P_{mk_s}(x_s - t_s), \qquad (mk)! = (mk_1)! \ldots (mk_s)!,$$

$|k| = k_1 + \ldots + k_s$ setzen

$$f(x) = \sum_k \frac{(-1)^{|k|}}{(mk)!} \int_{I^s} P_{mk}(x-t) \frac{\partial^{m|k|} f}{\partial t_1^{k_1} \ldots \partial t_s^{k_s}}\, dt_1 \ldots dt_s.$$

Dabei erstreckt sich die Summe über alle Gitterpunkte k mit Koordinaten 0 oder 1. Es ist dann

$$\left|\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} f(x_j) - \lambda(f)\right| \leqslant \sum_{k \neq 0} \int_I \left|\frac{\partial^{m|k|} f}{\partial t_1^{k_1} \ldots \partial t_s^{k_s}}\right| \left|\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} P_{mk}(x_j - t)\right| dt_1 \ldots dt_s.$$

Es sei nun L eine obere Schranke für alle Integrale

$$\int_I \left|\frac{\partial^{m|k|} f}{\partial t_1^{k_1} \ldots \partial t_s^{k_s}}\right|$$

dann ist

$$\left|\frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n} f(x_j) - \lambda(f)\right| \leqslant 2^s L \sum_{k \neq 0} \sup_t \left|\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} P_{mk}(x_j - t)\right|.$$

Nun besitzt $P_m(x-t)$ für $s = 1$ und $m > 1$ die absolut konvergente Fourierentwicklung $\sum\limits_{h \neq 0} h^{-m} e^{2\pi i h x}$, also ist

$$(12) \qquad |\Delta_n(f)| \leqslant 2^s L \sum_{h \neq 0} R^{-m}(h) \left|\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} e^{2\pi i \langle h x_j \rangle}\right|.$$

Dabei ist

$$R(h) = \prod_{i=1}^{s} \operatorname{Max}(|h_i|, 1), \qquad h = (h_1, \ldots, h_s), \qquad \langle hx \rangle = h_1 x_1 + \ldots + h_s x_s.$$

§ 2. Wir wählen nun $s = 1$, für (x_n) die Folge (αn), wo α irrational ist und setzen für ganzzahliges q und für eine im Riemannschen Sinne integrierbare Funktion Φ, periodisch mit der Periode 1

$$f(x) = \Phi(x) e^{2\pi i q x}.$$

Setzen wir weiter von Φ beschränkte Variation $V(\Phi)$ voraus, so ist auch f von beschränkter Variation und es ist

$$(13) \qquad V(f) \leqslant V(\Phi) + 2\pi C q$$

wo C eine obere Schranke von Φ in I ist. Es ist ja $V(e^{2\pi i q}) = 2\pi q$. Wir benötigen nun eine Abschätzung für D_n. Wir wollen eine Abschätzung geben welche die klassischen Abschätzungen von Ostrowski und Behnke umfaßt (vgl. [5]).

Wir nennen (nach einer modifizierten Definition von S. Lang [6]) α vom Kotypus γ, wo γ eine Funktion auf N ist, wenn für alle natürlichen n ganze Zahlen p, q existieren mit g.g.T. $(p, q) = 1$, so daß

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2} \quad \text{und} \quad \gamma(n) \leqslant q \leqslant n$$

ist.

Leichter nachzuprüfen ist der Typus φ (φ wieder auf N definiert) von α. Er ist so definiert: Für alle ganzzahligen p, q wo $q \geqslant 1$ ist

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant q^{-1}\varphi^{-1}(q).$$

Ist φ monoton wachsend im strengen Sinn, so ist α vom Kotypus $\bar{\varphi}^1$ ($\bar{\varphi}^1$: inverse Funktion von φ). Der Beweis ist leicht: Nach Dirichlet existieren für alle $n \geqslant 1$ ganze Zahlen p, q mit g.g.T. $(p, q) = 1$ so daß

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{qn} \quad \text{und} \quad 1 \leqslant q \leqslant n.$$

Es ist also $n \leqslant \varphi(q)$, also $\bar{\varphi}^1(n) \leqslant q \leqslant n$. Wir werden nun zeigen: Ist α vom Kotypus γ, wo γ monoton wachsend auf N, dann ist

$$(14) \qquad D_n(\omega) \leqslant \frac{1}{n+1}\left(\frac{5}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\gamma(k)} + 1\right).$$

Definieren wir noch $\gamma(0) = 1$, so ist

$$(14') \qquad D_n(\omega) < \frac{5}{2(n+1)}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\gamma(k)}.$$

B e w e i s. Es ist für jedes Teilintervall J: $0 \leqslant x < \gamma$ ja

$$\chi_J(x) = \gamma + \{x + 1 - \gamma\} - \{x\}.$$

Es ist also mit $1-\gamma=\delta$

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\chi_J(x_k)-\gamma=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\{x_n+\delta\}-\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\{x_k\}-\frac{1}{2}\right)$$

also

$$D_n(\omega)\leqslant\frac{2}{n+1}\sup_{0\leqslant\delta<1}\left|\sum_{k=0}^{n}\{x_n+\delta\}-\frac{n+1}{2}\right|.$$

Nach Voraussetzung existieren ganze p, q mit $\alpha=\frac{p}{q}+\frac{\vartheta_1}{q^2}$, $|\vartheta_1|<1$, g.g.T. $(p,q)=1$ und $\gamma(n)\leqslant q\leqslant n$.

Wir betrachten nun

$$\Sigma=\sum_{k=n+1-q}^{n}\{\alpha n+\delta\}=\sum_{r=0}^{q-1}\{\alpha(n-q+1)+\delta+r\alpha\}=\sum_{r=0}^{q-1}\{r\alpha+\delta_2\}$$

wo $\delta_2=\alpha(n-q+1)+\delta$ gesetzt ist. Es ist $\delta_2\geqslant 0$. Weiter ist

$$\Sigma=\sum_{r=0}^{q-1}\left\{\frac{rp}{q}+\frac{\Psi(r)}{q}\right\},$$

wo $\Psi(r)=\frac{r\delta_1}{q}+q\delta_2$. Es ist

$$q\delta_2-1\leqslant q\delta_2-\frac{r}{q}\leqslant\Psi(r)\leqslant q\delta_2+\frac{q-1}{q}<q\delta_2+1.$$

Setzen wir also $q\delta_2-1=c$, so ist $c<\Psi(r)<c+2$. Nun ist

$$\Sigma=\sum_{r=0}^{q-1}\left\{\frac{rp+[c]}{q}+\frac{\Psi(r)-[c]}{q}\right\}.$$

Setzen wir $\Psi_1(r)=\Psi(r)-[c]$ so ist also mit $\lambda=c-[c]$ sicher $\lambda<\Psi_1(r)<\lambda+2$ mit $0\leqslant\lambda<1$. Nun durchläuft mit r auch $rp+[c]=a(r)$ alle Zahlen von 0 bis $q-1$ modulo q, da g.g.T. $(p,q)=1$. Es ist r durch a eindeutig bestimmt, also $r=r(a)$.

Setzen wir $\Psi_1(r(a))=\Psi_2(a)$ so ist

$$\Sigma=\sum_{a=0}^{q-1}\left\{\frac{a}{q}+\frac{\Psi_2(a)}{q}\right\}=\sum_{a=0}^{q-1}\frac{a}{q}+\sum_{a=0}^{q-1}\delta_3(a)$$

wo

$$\delta_3(a)=\left\{\frac{a}{q}+\frac{\Psi_2(a)}{q}\right\}-\frac{a}{q}=\frac{\Psi_2(a)}{q}-\left[\frac{a}{q}+\frac{\Psi_2(a)}{q}\right].$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

1) $0\leqslant a\leqslant q-3$. Dann ist

$$\frac{\lambda}{q}\leqslant\frac{a}{q}+\frac{\Psi_2(a)}{q}<\frac{q-3}{q}+\frac{\lambda+2}{q}<1$$

also ist

$$\delta_3(a)=\frac{\Psi_2(a)}{q}\quad\text{und}\quad\frac{\lambda}{q}\leqslant\delta_3(a)<\frac{\lambda+2}{q}.$$

2) $a=q-2$ oder $q-1$. Dann ist

$$0\leqslant\frac{q-2}{2}\leqslant\frac{a}{q}+\frac{\Psi_2(a)}{q}<\frac{q-1}{a}+\frac{\lambda+2}{q}<1+\frac{2}{q}<2.$$

Es ist also $0\leqslant[\ ]\leqslant 1$, also

$$\frac{\lambda}{q}-1<\delta_3(a)<\frac{\lambda+2}{q}.$$

Wir erhalten also insgesamt

$$\sum_{a=0}^{q-1}\delta_3(a)=\sum_{a=0}^{q-3}+\sum_{a=q-2}^{q-1}<\frac{\lambda+2}{q}q=\lambda+2<3$$

andererseits

$$\sum_{a=0}^{q-1}\delta_3(a)\geqslant(q-2)\frac{\lambda}{q}+2\left(\frac{\lambda}{q}-1\right)=q\frac{\lambda}{q}-2\geqslant-2.$$

Es ist also

$$\Sigma=\frac{q-1}{2}+\Sigma\delta_3(a)<\frac{q}{2}+\frac{5}{2}$$

also

$$\left|\Sigma-\frac{q}{2}\right|<\frac{5}{2}.$$

Wir zeigen nun durch vollständige Induktion nach n

(15) $$\left|\sum_{k=0}^{n}\{\alpha k+\delta\}-\frac{n+1}{2}\right|\leqslant\frac{5}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\gamma(k)}+1.$$

Für $n=0$ ist (15) richtig. Nehmen wir an, daß (15) für alle $n'<n$ richtig ist. Es existieren ganze p,q mit $\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2}$ mit $\gamma(n)\leqslant q\leqslant n$, dann ist

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\{\alpha k+\delta\}-\frac{n+1}{2}\right|=\left|\sum_{k=0}^{n-q}-\tfrac{1}{2}(n-q+1)+\sum_{k=n-q+1}^{n}-\frac{q}{2}\right|$$

$$\leqslant\left|\sum_{k=0}^{n-q}-\tfrac{1}{2}(n-q+1)\right|+\left|\sum_{k=n-q+1}^{n}-\frac{q}{2}\right|$$

$$\leqslant\frac{5}{2}\sum_{k=1}^{n-q}\frac{1}{\gamma(k)}+1+\frac{5}{2}.$$

Nun ist

$$\sum_{k=n-q+1}^{n} \frac{1}{\gamma(k)} \geqslant \frac{q}{\gamma(n)} \geqslant 1,$$

also

$$\left| \sum_{k=n-q+1}^{n} - \frac{q}{2} \right| \leqslant \frac{5}{2} \sum_{k=n-q+1}^{n} \frac{1}{\gamma(k)}$$

und daraus folgt die Behauptung.

Ist $\gamma(n) \geqslant 1$ für alle $n \geqslant n_0$ so gilt auch

$$D_n^* \leqslant \frac{5}{2(n+1)} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\gamma(k)}. \tag{16}$$

Es ist nämlich

$$D_{m+1} \leqslant \frac{5}{2(m+2)} \sum_{k=0}^{m+1} \frac{1}{\gamma(k)} \leqslant \frac{5}{2(m+1)} \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{\gamma(k)} \quad \text{für} \quad m > n_0$$

da γ monoton wachsend.

Ist γ für alle $t \geqslant 1$ definiert, $\gamma(1) \geqslant 1$ und γ monoton wachsend, dann ist

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\gamma(k)} \leqslant 1 + \frac{1}{\gamma(1)} + \int_1^n \frac{1}{\gamma(t)},$$

also

$$D_n^* \leqslant \frac{5}{2(n+1)} \left(1 + \frac{1}{\gamma(1)} + \int_1^n \frac{dt}{\gamma(t)}\right). \tag{16'}$$

Betrachten wir einige Beispiele:

1) Es habe α beschränkte Teilnenner in ihrer Kettenbruchentwicklung, dann existiert bekanntlich ein $c(\alpha)$, so daß für alle p, q sicher

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{1}{c(\alpha) q^2}.$$

Es ist also α vom linearen Typus $\varphi(t) = c(\alpha)t$, also vom Kotypus $\gamma(t) = \dfrac{1}{c(\alpha)} t$. Wir können o.B.d.A. $c \geqslant 1$ annehmen, dann ist also

$$D_n \leqslant D_n^* \leqslant \frac{5c(\alpha)}{2(n+1)} \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) = O\left(\frac{\log n}{n}\right).$$

Dann folgt aus (9) und (12) für

$$\delta(r, \Phi, q) = \left|(1-r) \sum \Phi(an) e^{2\pi i q n a} r^n - \hat{\Phi}_q\right|$$

$$\delta(r, \Phi, q) \leqslant c_1\big((C+1)q + V(\Phi)\big)(1-r)^{1/2} \log\frac{1}{1-r},$$

wo c_1 nur von α abhängt. Dabei ist $\hat{\Phi}_q$ die Fouriertransformierte $\int_0^1 \Phi(x) e^{2\pi i q x} dx$ von Φ. Benützen wir (8), so erhalten wir für die rechte Seite von (8) mit $h(n) = \dfrac{2}{5}\gamma(n) = \dfrac{2}{5c(\alpha)n}$ die Abschätzung

$$\big(V(\Phi) + Cq\big)(1-r)\left(1 + \frac{2}{5c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n}\right),$$

also

$$\big(V(\Phi) + Cq\big)(1-r)\left(1 + \frac{2}{5c} \log(1-r)\right). \tag{17}$$

Wählen wir mit Hecke $\Phi(x) = \{x\}$ so ist für $q \neq 0$, $\hat{\Phi} = (2\pi i q)^{-1}$, $V(\Phi) = C = 1$ und wir erhalten

$$\left|(1-r)\Sigma\{an\} e^{2\pi i a q n} r^n - \frac{1}{2\pi i q}\right| \leqslant (1+q)(1-r)\left(1 + \frac{2}{5c}\log(1-r)\right). \tag{18}$$

Nehmen wir jetzt an, es existiere ein $k > 0$, so daß für alle p, q $\left|\alpha - \dfrac{p}{q}\right| \geqslant \dfrac{1}{cq^{k+1}}$ bei passendem c. Wir sagen α ist vom Typus k. Dies ist sicher der Fall wenn α vom Typus Iη (vgl. [5]) mit $k = \eta + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$. Dann ist $\varphi(t) = ct^k$, $\gamma(t) = \dfrac{1}{c} t^{1/k}$ und

$$D_n = O(n^{-1/k}). \tag{19}$$

Wir haben nun $\sum n^{-1/k} r^n$ zu betrachten und wir benützen, daß

$$\lim_{r\to 1} (1-r)^{1-1/k} \sum n^{-1/k} r^n = K > 0$$

ist. Wir erhalten also

$$\delta(r, \Phi, r) \leqslant c_2\big((C+1)q + V(\Phi)\big)(1-r)^{1/k}. \tag{20}$$

Es sei jetzt α vom Typus IIη d.h. für alle p, q ist $\left|\alpha - \dfrac{p}{q}\right| > \dfrac{1}{q} e^{-cq^{\eta+\varepsilon}}$ bei passendem c. Dann ist $\varphi(t) = e^{ct^{\eta+\varepsilon}}$ und $\gamma(t) = \left(\dfrac{\log t}{c}\right)^{1/(\eta+\varepsilon)}$. Wir erhalten für die linke Seite von (20) dann eine Abschätzung

$$C_3\big((C+1)q+V(\Phi)\big)(1-r)\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}(\log n)^{-1/(\eta+\varepsilon)}r^n\right).$$

Dabei hängen C_2 und C_3 nur von α ab.

Wir können für Φ statt der Funktion von Hecke auch noch andere interessante Spezialfälle betrachten.

1. Es sei $\Phi = \chi_J$ (Indikatorfunktion eines Intervalls J: $\alpha \leqslant x < \beta$ von I). Dann ist

$$\hat{\Phi} = \frac{1}{2\pi i q}\left(e^{2\pi i q\beta}-e^{2\pi i q\alpha}\right) \quad \text{wenn} \quad q \neq 0.$$

Es ist $\hat{\Phi} \neq 0$, wenn $\lambda(J) = \beta-\alpha$ irrational.

2. Ein damit zusammenhängendes Beispiel ist folgende Funktion:

$$\Phi(x) = -1 \text{ für } 0 \leqslant x < \tfrac{1}{2}, \qquad \Phi(x) = +1 \text{ für } \tfrac{1}{2} \leqslant x < 1.$$

Dann ist

$$\hat{\Phi} = 2\,\frac{1-e^{\pi i q}}{2\pi i q} \neq 0 \quad \text{wenn } q \text{ ungerade.}$$

Nach F. W. Caroll und J. H. B. Kemperman [1] sind interessante Beispiel mit $\hat{\Phi} \neq 0$:

3. $\Phi(x) = \sum\limits_{j=0}^{\nu} b_j x^{\gamma_j}$ $(0 = \gamma_0 < \gamma_1 < \ldots < \gamma_\nu)$. Es ist $C = V(\Phi) = \sum\limits_{j=0}^{\nu}|b_j|$.

4. $\Phi(x) = e^{iA\sin 2\pi(x+B)}$ $(A \neq 0)$. Es ist $C = 1$, $V(\Phi) = A$.

Setzen wir jetzt voraus, daß Φ bis zur Ordnung m stetig differenzierbar ist. Dann wenden wir (5′) und (12) mit $s = 1$ an. Nach H. Behnke (vgl. [5], S. 203) gilt für Irrationalzahlen α vom Typus Iη (vgl. auch (34), (35)) für

$$\Sigma_m^n(\alpha) = \sum_{h\neq 0}\frac{1}{|h|^m}\left|\sum_{k=0}^{n}e^{2\pi i n h\alpha}\right| \quad \text{wenn} \quad m \geqslant 1$$

$$\Sigma_m^n(\alpha) = O\left(n^{1-\frac{m}{\eta}+\varepsilon}+n^{\varepsilon}\right) \tag{21}$$

und für $m > \eta$

$$\Sigma_m^n(\alpha) = O(1). \tag{22}$$

Wir beachten noch daß

$$\lim_{r\to 1}(1-r)^{2-\frac{m}{\eta}+\varepsilon}\sum n^{1-\frac{m}{\eta}+\varepsilon}r^n = c_1 > 0, \qquad \lim(1-r)^{1+\varepsilon}\sum n^{\varepsilon}r^n = c_2.$$

dann erhalten wir aus (21)

$$\delta(r, \Phi, q) \leqslant c_4 L(\Phi)\left((1-r)^{\frac{m}{\eta}-\varepsilon}+(1-r)^{1-\varepsilon}\right). \tag{23}$$

Wenn $m > \eta$, dann erhalten wir aus (22)

$$\delta(r, \Phi, q) \leqslant 2(1-r)L(\Phi). \tag{24}$$

Besitzt α beschränkte Kettenbruchnenner dann ist $\eta = 1$, also gilt (24) für $m \geqslant 2$. Es ist (24) eine Verschärfung von (17). Es ist $\hat{\Phi} \neq 0$ für großes q nach W. Schwarz [8] wenn Φ differenzierbar bis zur Ordnung $m+2$, aber $\Phi^{(m+1)}(1) \neq \Phi^{(m+1)}(0)$.

Wenden wir uns nun dem mehrdimensionalen Fall zu. Es sei jetzt $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ Zahlen, welche über Z linear unabhängig sind und $\beta = q_1\alpha_1+\ldots+q_s\alpha_s$. Wir wollen jetzt das Verhalten von $(1-r)\sum\Phi(\alpha_1 n, \ldots$ $\ldots, \alpha_s n)z^n-\hat{\Phi}$ untersuchen, wo $z = e^{2\pi i\beta}$ und

$$\hat{\Phi} = \int_I \Phi(x)e^{2\pi i(q_1x_1+\ldots+q_sx_s)}\,dx_1\ldots dx_s.$$

Dazu benötigen wir eine Abschätzung der Diskrepanz der Folge (αn) $(\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s))$. Hier ist im allgemeinen wenig bekannt. Wir wollen voraussetzen, daß eine Funktion φ definiert auf R^+ existiert, so daß $\varphi(t)/t$ monoton wachsend ist und für alle Gitterpunkte $h = (h_1, \ldots, h_s) \neq 0$

$$(\langle h\alpha\rangle) \geqslant \varphi^{-1}(|h|). \tag{25}$$

Dabei ist $\langle h\alpha\rangle = h_1\alpha_1+\ldots+h_s\alpha_s$, $|h| = \operatorname{Max}(|h_1|, \ldots, |h_s|)$, $(\gamma) = \inf\limits_n|\gamma-n|$ (erstreckt über alle ganzen Zahlen n). Es ist auch φ monoton wachsend. Ein wichtiger Spezialfall ist $\varphi(t) = ct^k$ für $k \geqslant 1$ insbesonder $\varphi(t) = ct^s$. Der letztere Fall tritt z.B. sicher ein, wenn $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ ganze Zahlen eines reellen algebraischen Zahlkörpers K vom Grade $s+1$ sind, so daß $\alpha_1\ldots\alpha_s$ linear unabhängig über Z sind.

Nach einer Formel von P. Erdös–P. Turán J. F. Koksma gilt für jede Folge $\omega = (n\alpha)$ und jede natürliche Zahl $M > 1$

$$D_n(\omega) < 40^s\left(\frac{1}{M}+\sum_{0<|h|\leqslant M}R^{-1}(h)\,|S_n(h, \omega)|\right) \tag{26}$$

wo

$$S_n(h, \omega) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}e^{2\pi i k\langle h\alpha\rangle} \leqslant 2\left(n(\langle h\alpha\rangle)\right)^{-1}.$$

Wir zerlegen den Summationsbereich $0 < |h| \leqslant M$ in Bereiche

$$P_r\colon\ 2^{r_j-1} \leqslant \operatorname{Max}(|h_i|, 1) < 2^{r_j} \qquad (j = 1, \ldots, s).$$

Ist $h_j = 0$, dann sei $r_j = 1$. Es habe h_j für festes j in P_r das gleiche Vorzeichen. Die $r_1, \ldots, r_j$ laufen von 1 bis $[\log_2 M]$. In P_r ist

$$2^{r_1+\ldots+r_s-s} \leqslant R(h) < 2^{r_1+\ldots+r_s},$$

also wird

$$\Sigma = \sum R^{-1}(h)|S_n| \leqslant 2n^{-1} \sum_{r_1,\ldots,r_s} 2^{-(r_1+\ldots+r_s)} \sum_{n\epsilon P_r} (\langle\langle h\alpha\rangle\rangle)^{-1}.$$

Wir können in einem festen P o.B.d.A. $\mathrm{Max}(r_1, \ldots, r_s) = r_1$ annehmen. Dann ist in P_r

$$(\langle h\alpha\rangle) \geqslant \varphi^{-1}(|h|) \geqslant \varphi^{-1}(2^{r_1}) = C_r.$$

Zu jedem $h \epsilon P_r$ gibt es eine natürliche Zahl v, so daß

$$vC_r \leqslant (\langle h\alpha\rangle) < (v+1)C_r \quad (v = 1, \ldots, [C_r^{-1}]).$$

Zu gegebenen v kann es höchstens zwei Gitterpunkte $h \epsilon P_r$ geben, denn gäbe es drei solche, dann müßte für zwei solche h, h' ja $\langle h\alpha\rangle$ — nächste ganze Zahl an $\langle h\alpha\rangle$ das gleiche Vorzeichen haben und es wäre $(\langle (h-h')\alpha\rangle) < C_r$ und $0 < |h-h'| < 2^{r_1-1}$ in Widerspruch zu (25). Wir haben also

$$\sum_{h\epsilon P_r} (\langle h\alpha\rangle)^{-1} \leqslant \frac{2}{C_r} \sum \frac{1}{v} < \frac{4}{C_r}(1+|\log C_r|)$$

also wird

$$\Sigma < 8n^{-1} \sum_{r_1,\ldots,r_s} 2^{-(r_1+\ldots+r_s)} \varphi(2^{v_1})\left(1+|\log\varphi(2^{r_1})|\right)$$

also

(27) $$\Sigma < 8n^{-1} \sum_{r_1} \frac{\varphi(2^{r_1})}{2^{r_1}}\left(1+|\log\varphi(2^{r_1})|\right)$$

also

$$\Sigma < 8n^{-1} \frac{\varphi(M)}{M}\left(1+|\log\varphi(M)|\log M\right).$$

Es ist also

$$D_n < 50^s \left(\frac{1}{M} + \frac{\varphi(M)}{Mn}\left(1+|\log\varphi(M)|\right)\log M\right).$$

Es sei nun γ die inverse Funktion zu φ, dann nehmen wir $M = [\gamma(n)]$ und erhalten

$$D_n < 50^s \left(\frac{1}{\gamma(n)}\left(1+(1+\log n)\log\gamma(n)\right)\right)$$

also

(28) $$D_n = O\left(\frac{\log n \log\gamma(n)}{\gamma(n)}\right).$$

Ist z.B. $\varphi(t) = ct^k$ (wir sagen wieder α ist vom Typus k) dann ist $\gamma = \frac{1}{c} t^{1/k}$ und wir erhalten

(29) $$D_n = O(n^{-1/k}\log^2 n).$$

Wir wollen gleich für $m > 1$

$$\Sigma_m^n(\alpha) = \sum_{n\neq 0} R^{-m}(h)\left|\sum_{k=0}^{n} e^{2\pi i k\langle h\alpha\rangle}\right|$$

abschätzen und zwar für den Fall, daß α vom Typus k ist. Es ist für natürliches $M \geqslant 1$

$$\frac{1}{n+1}\Sigma_m^n(\alpha) = \sum_{|h|\leqslant M} + \sum_{|h|>M}.$$

Dann kommt, wenn man wie oben vorgeht, statt (27)

(30) $$\sum_{|h|\leqslant M} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{r_1}\varphi(2^{r_1})2^{-mr_1}\left(1+|\log\varphi(2^{r_1})|\right) = \frac{1}{n}\sum_{r_1} 2^{r_1(k-m)}(1+r_1 k)$$

also wenn $k \geqslant m$

$$\sum_{|h|\leqslant M} \leqslant \frac{M^{k-m}}{n}(1+\log^2 M).$$

Wir nehmen $M = [n^{1/k}]$, dann ist also

(31) $$\sum_{|h|\leqslant M} = n^{-\frac{m}{k}+\varepsilon}.$$

Wir schätzen nun $\sum_{|k|>M}$ ab und beachten, daß für $M_1 = [n^{m/(m-1)^k}]$

$$\sum_{|h|\geqslant M_1} R^{-m}(h)|S_n(\alpha)| \leqslant \sum_{|h|\geqslant M_1} R^{-m}(h) = O(M_1^{-m+1})$$

also

(32) $$\sum_{|h|\geqslant M_1} = O(n^{-m/k}).$$

Wir haben nun $\sum_{M\leqslant|h|\leqslant M_1} R^{-m}(h)|S_n(\alpha)|$ abzuschätzen. Wir betrachten zuerst die Glieder in dieser Summe für die $(\langle h\alpha\rangle)n \geqslant |h|$ ist. Für sie ist

$$R^{-m}(h)|S_n(\alpha)| \leqslant R^{-m}(h)\,(n\langle h\alpha\rangle)^{-1} \leqslant R^{-m}(h)|h|.$$

Es ist also die Summe dieser Glieder $\leqslant \sum_{M \leqslant |h|} |h|^{-m-1} = O(M^{-m}) = O(M^{-m/k})$. (Es ist ja $R(h) \geqslant |h|$.) Wir müssen also nur mehr die Glieder mit $(\langle h\alpha\rangle)n \leqslant |h|$ betrachten. Die Summe dieser Glieder ist

(33)

$$\leqslant \sum_{|h| \leqslant M_1,\, n(\langle h\alpha\rangle) \leqslant |h|} R^{-m}(h) \leqslant \sum_{\operatorname{Max}(|h_2|, \ldots, |h_s|) \leqslant M_1} \frac{1}{(h_2 \ldots h_s)^m} \sum_{\substack{|h_1| \leqslant M \\ (\langle h_1\alpha_1 + \ldots + h_s\alpha_s\rangle) \leqslant M_1/n}} h_1^{-m}.$$

Dabei ist ein h_j durch 1 zu ersetzen wenn $h_j = 0$. Die innere Summe in (33) ist nach (19) mit $h_2\alpha_2 + \ldots + h_s\alpha_s = \varrho$ sicher

$$\leqslant M_1^{-m} \sum_{\langle h_1\alpha_1 + \varrho\rangle \leqslant M_1/n,\, |h_1| \leqslant M_1} 1 = M_1^{-m}\left(\frac{M_1^2}{n} + O(M_1^{1-\frac{1}{k}})\right)$$

also

$$\leqslant M_1^{2-m} n^{-1} + O(M_1^{1-m-\frac{1}{k}}) = O(n^{-\frac{m}{k} - \frac{m}{(m-1)k^2}})$$

also erhalten wir insgesamt $O(n^{-m/k})$.

Es ist also, wenn $k \geqslant m$

$$\Sigma_m^n(\alpha) = O(n^{-m/k+\varepsilon}). \tag{34}$$

Wenn $m > k$ dann folgt sofort aus (30)

$$\Sigma_m^n(\alpha) = O(1). \tag{35}$$

Wir erhalten nach (8) und (29) mit $x_n = \alpha n$ im R^s und

$$\delta(f, r) = \left|(1-r) \sum f(\alpha n) r^n - \lambda(f)\right|$$

$$\delta(f, r) \leqslant C_1 V(f) \left(\sum n^{1-\frac{1}{k}+\varepsilon} r^n\right)(1-r)^2$$

also

$$\delta(f, r) \leqslant C_2 V(f)\,(1-r)^{1/k-\varepsilon} \tag{36}$$

wo C_1, C_2 nur von α abhängen, wenn α vom Typus k ist. Nehmen wir $s = 2$, $f(x_1, x_2) = \Phi(x_1) e^{2\pi i x_2}$, dann ist $\lambda = 0$ und wir erhalten

$$\left|(1-r) \sum \Phi(\alpha, n) e^{2\pi i \alpha_2 n} r^n\right| \leqslant C_2 V(\Phi)\,(1-r)^{1/k-\varepsilon}.$$

Wenn $s > 1$ dann erhalten wir

$$\left|(1-r) \sum \Phi(\alpha_1 n, \ldots, \alpha_s n) z^n - \hat{\Phi}\right| \leqslant C_3\big(V(\Phi) + q(C+1)\big)(1-r)^{1/k-\varepsilon}$$

wenn $|\Phi| \leqslant C$, $z = re^{2\pi i\beta}$, $\beta = \alpha_1 q_1 + \ldots + \alpha_s q_s$, $q = (q_1, \ldots, q_s)$. Weiter erhalten wir für $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$, $\alpha_{s+1} = \beta$, wenn $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \beta)$ vom Typus k ist

$$\left|(1-r) \sum \Phi(\alpha_1 n, \ldots, \alpha_s n) e^{2\pi i n\beta} r^n\right| \leqslant C_4 V(\Phi)\,(1-r)^{1/k-\varepsilon}.$$

Die letzteren Resultate lassen sich mittels (34) bzw. (35) verschärfen, wenn Φ stetige Ableitungen bis zur Ordnung sm besitzt.

§ 3. Wir wollen nun die in § 1 eingeführte Diskrepanz $D_A(\omega, r)$ etwas näher untersuchen. Wir stellen zunächst fest: Es ist

$$D_A(\omega, r) \geqslant 1 - r. \tag{37}$$

Es sei J ein Teilintervall von I mit einer Länge $< \varepsilon$ welche das Glied x_0 der Folge enthält. Dann ist $D_A(\omega, r) \geqslant 1 - r - \varepsilon$ also da ε beliebig $D_A(\omega, r) \geqslant 1 - r$. Wir führen wieder auch

$$D_A^*(\omega, r) = \sup_{r' \geqslant r} D_A(\omega, r')$$

ein. Es ist stets $D_A^*(\omega, r') \leqslant D_A^*(\omega, r)$ für $r' \geqslant r$. Wir haben schon festgestellt, daß

$$D_A^*(\omega, r) \leqslant 4 D_{M(r)}^*(\omega, r)$$

mit $M(r) = [(1-r)^{-1/2}]$. Wir wollen nun D_A^* mittels D^* nach unten abschätzen.

Wir wollen folgendes zeigen: Es existiert eine absolute Konstante C z.B. 6^8, so daß

$$D_N^*(\omega) \leqslant C\left(\log D_A^{-1}(e^{-\frac{\log(N+1)}{N+1}})\right)^{-1/2}. \tag{38}$$

Man könnte mittels der neueren Untersuchungen von Korevaar und Ganelius (vgl. [2]) den Exponenten $-1/2$ in (38) durch -1 ersetzen. Wir begnügen uns mit (38) da der Beweis, wobei wir eine Methode von Postnikov [7] benützen, am einfachsten wird. Wie schon in der Einleitung bemerkt, wäre eine wesentliche Verschärfung von (38) wünschenswert. Es sei nun J ein Teilintervall von I^s. Nach Voraussetzung ist, wenn wir für $D_A^*(\omega, r)$ kurz $D^*(r)$ schreiben

$$(1-r) \sum \chi_J(x_n) r^n = J + \delta D^*(r).$$

Dabei bedeuten im folgenden alle δ Zahlen mit $|\delta| \leqslant 1$. Es ist allgemein für jedes $k \geqslant 0$

$$(1-r^{k+1}) \sum \chi_J(x_n) r^{n(k+1)} = J + \delta D^*(r^{k+1}).$$

Nun ist

$$\frac{1-r}{1-r^{k+1}} - \frac{1}{k+1} \leqslant 1 - r$$

also

$$(1-r)\sum \chi_J(x_n)\, r^{n(k+1)} = \frac{1-r}{1-r^{k+1}}\,(1-r^{k+1})\sum \chi_J(x^n)\, r^{n(k+1)}$$
$$= \frac{J}{k+1} + 2\delta D^*(r^{k+1}) + \delta(1-r)$$

also nach (37)

$$(1-r)\sum \chi_J(x_n)\, r^{n(k+1)} = \frac{J}{k+1} + 3\delta D^*(r^{k+1}).$$

Es sei nun $P_g(x)$ ein Polynom $b_0+b_1x+\ldots+b_gx^g$ vom Grade g. Dann haben wir, da D^*monoton abnimmt

(39) $$(1-r)\sum \chi_J(x_n) P_g(r^n) r^n = J\int_0^1 P_g(x)\,dx + 3\delta D^*(r^{g+1})\sum_{k=0}^{g}|b_k|$$

da

$$\int_0^1 P_g(x)\,dx = \sum_{k=0}^{g}\frac{b_k}{k+1}.$$

Es sei nun f eine stetige Funktion auf $\langle 0,1\rangle = \bar I$. Dann existiert, wenn $\sup|f| = M(f)$ auf $\bar I$ zu jedem g ein Polynom P_g so daß für alle $x\in\bar I$ stets

$$|f(x)-P_g(x)| \leqslant 12\omega\left(\frac{1}{2g};f\right)$$

und für die Koeffizienten b_j von P_g gilt $\sum\limits_{k=0}^{g} \leqslant 2\cdot 6^g M$. Dabei ist $\omega(\delta,f)$ der Stetigkeitsmodul von f. Es ist

$$(1-r)\sum \chi_J(x_n) f(r^n) r^n$$
$$= (1-r)\sum \chi_J P_g(r^n) r^n + (1-r)\sum \big(f(r^n)-P_g(r^n)\big)\chi_J(x_n) r^n.$$

Da

$$|f-P| \leqslant 12\omega\left(\frac{1}{2g}\right)$$

so ist der zweite Term im obigen Ausdruck $\leqslant 12\omega\left(\frac{1}{2g},f\right)$. Weiter ist

$$\int_0^1 P_g(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_0^1 \big(P_g(x)-f(x)\big)\,dx$$

also erhalten wir

(40) $$(1-r)\sum \chi_J(x_n) f(r^n) r^n$$
$$= J\int_0^1 f(x)\,dx + 24\delta\omega\left(\frac{1}{2g}\right) + \delta M(f)\, 6^{g+1} D^*(r^{g+1}).$$

Wir nehmen nun in (40) $r = e^{-1/(N+1)}$ und bemerken daß

$$(N+1)^{-1} \geqslant 1-e^{-1/(N+1)} \geqslant (N+1)^{-1} - \tfrac{1}{2}(N+1)^{-2} \geqslant \tfrac{1}{2}(N+1)^{-1}.$$

Weiter sei

$$\alpha = 1+\frac{1}{\sqrt{g}}, \qquad \beta = 1-\frac{1}{\sqrt{g}}$$

und

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0\leqslant x\leqslant e^{-\alpha}, \\ \dfrac{e}{e^{-1}-e^{-\alpha}}\,(x-e^{-\alpha}) & \text{für } e^{-\alpha}\leqslant x\leqslant e^{-1}, \\ \dfrac{1}{x} & \text{für } e^{-1}\leqslant x\leqslant 1 \end{cases}$$

und

$$f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0\leqslant x\leqslant e^{-1}, \\ \dfrac{e^{\beta}}{e^{-\beta}-e^{-1}}\,(x-e^{-1}) & \text{für } e^{-1}\leqslant x\leqslant e^{-\beta}, \\ \dfrac{1}{x} & \text{für } e^{-\beta}\leqslant x\leqslant 1. \end{cases}$$

Es ist $M(f_1)$ und $M(f_2)\leqslant e$,

$$\int_0^1 f_1(x)\,dx = 1+\frac{1-e^{1-\alpha}}{2}, \qquad \int_0^1 f_2(x)\,dx = 1-\frac{e^{-\beta}-e^{-1}}{2}\,e^{\beta},$$

$$\omega(\varrho,f_1) = \frac{e}{e^{-1}-e^{-\alpha}}\,\varrho, \qquad \omega(\varrho,f_2) = \frac{e^{\beta}}{e^{-\beta}-e^{-1}}\,\varrho.$$

Weiter bemerken wir, daß

$$1-e^{1-\alpha}\leqslant \alpha-1, \qquad (1-e^{1-\alpha})^{-1}\leqslant\frac{3}{\alpha-1}, \qquad 1-e^{\beta-1}\leqslant 1-\beta,$$
$$e^{\beta}(e^{-\beta}-e^{-1})^{-1}\leqslant e(e^{-\beta}-e^{-1})^{-1}\leqslant 4e(1-\beta)^{-1}.$$

Wir berücksichtigen daß

$$(1-e^{-1/(N+1)})\sum_{n=0}^{N}\chi_J(x_n) \geqslant \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\chi_J(x_n) - \frac{1}{2(N+1)},$$

dann erhalten wir aus (40) mit $f = f_1$

$$\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\chi_J(x_n) \leqslant J + \frac{1}{2(N+1)} + \frac{a-1}{2} + \frac{36e^2}{g(a-1)} + e\cdot 6^{g+1}D^*(r^{g+1}).$$

Weiters liefert (40) mit $f = f_2$ auf der linken Seite

$$(1-e^{-1/N})\Bigl(\sum_{n\leqslant\beta N}\chi_J(x_n) + \sum_{\beta N\leqslant n\leqslant N}\chi_J(x_n)\frac{e^{\beta}}{e^{-\beta}-e^{-1}}(e^{-n/(N+1)}-e^{-1})e^{-n/(N+1)}\Bigr)$$

also

$$\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\chi_J(x_n) \geqslant J - \frac{1-\beta}{2} - \frac{36e}{g(1-\beta)} - e\cdot 6^{g+1}D^*(r^{g+1})$$

also erhalten wir

$$\left|\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\chi_J(x_n) - J\right| \leqslant \frac{1}{2(N+1)} + \frac{500}{\sqrt{g}} + 3\cdot 6^{g+1}D^*(r^{g+1}).$$

Das gilt für jedes J, also haben wir eine Abschätzung für $D_N(\omega)$. Nun ist $D_N(\omega) \geqslant \frac{1}{N+1}$, also erhalten wir

$$D_N(\omega) \leqslant \frac{10^3}{\sqrt{g}} + 6^{g+2}D^*(r^{g+1}). \tag{41}$$

Wir setzen nun zunächst voraus, daß $N \geqslant g$ und $D^*(\varrho) \leqslant 6^{-8}$ wo $\varrho = e^{-\frac{\log(N+1)}{N+1}}$. Dann nehmen wir für

$$g = \left[\frac{1}{2\log 6}\log D^{-1}(\varrho)\right] - 1.$$

Es ist $g \geqslant 3$. Es ist weiter nach (37)

$$D^*(\varrho) \geqslant 1-\varrho \geqslant \frac{1}{2}\,\frac{\log(N+1)}{N+1},$$

also

$$\log\frac{1}{D^*(\varrho)} \leqslant \log 2 + \log(N+1) - \log\log(N+1) \leqslant \log(N+1).$$

Es ist also $g+1 < \log(N+1)$. Dann ist

$$r^{g+1} \geqslant e^{-\frac{\log(N+1)}{N+1}} = \varrho, \quad \text{also } D^*(r^{g+1}) \leqslant D^*(\varrho).$$

Es wird also $6^{g+1}D^*(r^{g+1}) \leqslant \sqrt{D^*(\varrho)}$. Nun ist $D^* \leqslant \log^{-1}\frac{1}{D^*}$ also erhalten wir

$$D_N(\omega) \leqslant 6^8(\log D^{*-1}(\varrho))^{-1/2}. \tag{42}$$

Ist $D^*(\varrho) \geqslant 6^{-8}$ so ist (42) trivial, ebenso für $N \leqslant g$. Da die rechte Seite von (41) für $N \geqslant 2$ monoton abnimmt, so folgt (38).

Literaturverzeichnis

[1] F. W. Caroll and J. H. B. Kemperman, *Noncontinuable analytic functions* Duke Math. Journal 32 (1963), S. 65–83.

[2] T. H. Ganelius, *Tauberian Remainder Theorems* (Lecture Notes in Mathematics Nr. 232), Berlin—Göttingen—Heidelberg 1971.

[3] E. Hecke, *Über analytische Funktionen und die Verteilung von Zahlen mod. Eins*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 1 (1921), S. 54–71.

[4] E. Hlawka, *Funktionen von beschränkter Variation in der Theorie der Gleichverteilung*, Ann. Mat. Pura ed Appl. IV 54 (1961), S. 325–333.

[5] J. F. Koksma, *Diophantische Approximationen*, 1936.

[6] S. Lang, *Introduction to Diophantine Approximation*, Reading, Mass., 1966.

[7] A. G. Postnikov, *The remainder term in the Tauberian theorem of Hardy and Littlewood* (Russian), Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.) 77 (1951), S. 193–196.

[8] W. Schwarz, *Irrationale Potenzreihen*, Arch. Math. 13 (1962), S. 228–240.

MATHEMATISCHES INSTITUT DER UNIVERSITÄT WIEN

Eingegangen 26. 4. 1972 (277)