ACTA ARITHMETICA
XXIII (1973)

Volumsapproximation beim Jacobialgorithmus, II

von

F. SCHWEIGER (Salzburg)

Herrn Professor N. Hofreiter
zum 70. Geburtstag gewidmet

1. Einleitung. Es sei K der n-dimensionale Einheitswürfel, $K = \{x \mid x = (x_1, \ldots, x_n), 0 < x_i < 1\}$ und $T\colon K \to K$ definiert durch

$$T(x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{x_2}{x_1} - \left[\frac{x_2}{x_1}\right], \ldots, \frac{1}{x_1} - \left[\frac{1}{x_1}\right]\right).$$

Entfernt man aus K eine abzählbare Menge von Hyperebenen, so ist T^s auf der Restmenge B definiert für jedes $s \geqslant 1$. Man definiert die Ziffernfunktion

$$k\colon B \to \boldsymbol{Z}^n$$

vermittels

$$k(x) = \left(\left[\frac{x_2}{x_1}\right], \ldots, \left[\frac{1}{x_1}\right]\right)$$

und rekursiv setzt man

$$k^{(s)}(x) = k(T^{s-1}x) \quad \text{für } s \geqslant 1 \text{ und } x \in B.$$

Eine Folge $(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots)$ ganzzahliger Vektoren,

$$\boldsymbol{a}^{(s)} = (a_1^{(s)}, \ldots, a_n^{(s)}) \in \boldsymbol{Z}^n,$$

heißt zulässig, wenn gelten:

(1) $$0 \leqslant a_j^{(s)} \leqslant a_n^{(s)}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n;$$

(2) $$1 \leqslant a_n^{(s)};$$

(3) Die Beziehungen

$$\begin{aligned} a_j^{(s)} &= a_n^{(s)}, \\ a_{j-1}^{(s+1)} &= a_{n-1}^{(s+1)}, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ a_{j-t}^{(s+t)} &= a_{n-t}^{(s+t)} \end{aligned}$$

implizieren

$$a_{j-t-1}^{(s+t+1)} \leqslant a_{n-t-1}^{(s+t+1)} \quad \text{für } t+1 < j$$

und

$$1 \leqslant a_{n-t-1}^{(s+t+1)} \quad \text{für } t+1 = j.$$

Ist X die Menge aller zulässigen Folgen, so ist die Abbildung Φ: $B \to X$, definiert durch

$$\Phi(x) = \big(k_1(x), k_2(x), \ldots\big)$$

eine Bijektion (Perron [3]).

Definiert man

$$A_i^{(n+1)} = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \quad A_0^{(n+1)} = 1,$$

$$A_i^{(g+n+1)} = A_i^{(g)} + \sum_{j=1}^{n} A_i^{(g+j)} k_j^{(g)}(x), \quad g \geqslant 1, \quad 0 \leqslant i \leqslant n,$$

so gilt (Perron [3], Bernstein [1])

$$\lim_{g\to\infty} \frac{A_i^{(g)}}{A_0^{(g)}} = x_i.$$

Betrachtet man n aufeinanderfolgende Näherungspunkte

$$(A_1^{(g+j)}/A_0^{(g+j)}, \ldots, A_n^{(g+j)}/A_0^{(g+j)}), \quad 1 \leqslant j \leqslant n,$$

so spannen diese mit x zusammen ein konvexes Polyeder mit dem Volumen $V(x;\, g)$ auf. Man zeigt nun (Schweiger [5]):

$$n!\, A_0^{(g+1)} \ldots A_0^{(g+n)} V(x;\, g) = \big(A_0^{(g+1)} F(x;\, g)\big)^{-1}$$

wobei

$$F(x, g) = \frac{A_0^{(g+n+1)} + \sum_{j=1}^{n} A_0^{(g+j)} x_j^{(g)}}{A_0^{(g+1)}}$$

und $x^{(g)} = T^g x$.

Die folgende Vermutung scheint vernünftig zu sein: Ist $\xi > 1$ die größte reelle Nullstelle von $\xi^{n+1} - \xi^n - 1 = 0$, so ist für jedes $x \in B$ die Ungleichung

$$F(x;\, g) > (n+1)\,\xi^n - n\xi^{n-1} = \beta$$

für unendlich viele g erfüllt.

Für $n = 1$ ist dies der Satz von Hurwitz (siehe etwa Khintchine [2]). Den Fall $n = 2$ und etwas mehr hat Schmidt [4] gezeigt. Der Fall $n = 3$ wurde in [6] behandelt. In dieser Arbeit wird eine Ungleichung für beliebiges n hergeleitet, die einerseits für den Beweis des allgemeinen Falles von Interesse sein könnte, anderseits den Fall $n = 4$ zu erledigen gestattet.

2. Zum allgemeinen Fall.

Hilfssatz 1. *Ist $k_n^{(g)} = 1$, $k_j^{(g)} = 0$, $1 \leqslant j < n$, für alle $g \geqslant G$, so ist*

$$\lim_{g\to\infty} F(x;\, g) = \beta$$

und unendlich oft gilt

$$F(x;\, g) < \beta.$$

Beweis. Es ist $T^G x = y$, wo $y = (\xi^{-1}, \xi^{-2}, \ldots, \xi^{-n})$. Wir betrachten die Hyperebene

$$L(X_1, \ldots, X_n) = X_1 + X_2\xi^{-n} + \ldots + X_n\xi^{-2} + \xi^{-1} - \beta = 0.$$

Der Punkt $P = (\xi^n, \xi^{n-1}, \ldots, \xi)$ liegt auf dieser Hyperebene. Ist

$$p(g) = \left(\frac{A_0^{(g+n+1)}}{A_0^{(g+1)}}, \ldots, \frac{A_0^{(g+2)}}{A_0^{(g+1)}}\right)$$

so sieht man: Der Punkt $p(g+n+1)$ liegt im konvexen Polyeder, welches von $p(g), \ldots, p(g+n)$ aufgespannt wird. Ferner ist

$$\lim_{g\to\infty} p(g) = P.$$

Da P ebenfalls im konvexen Polyeder, aufgespannt von $p(g), \ldots, p(g+n)$ liegt und $\xi^{n+1} - \xi^n - 1$ irreduzibel ist, so erfüllt einer dieser Punkte

$$L\big(p(g+j)\big) < 0,$$

d.h.

$$F(x, g+j) < \beta.$$

Wir führen nun folgende Abkürzungen ein:

$$K(s+j) = \frac{A_0^{(s+j+1)}}{A_0^{(s+j)}}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n+1,$$

$$\lambda(s+j) = k_n^{(s+j)} + x_n^{(s+j)}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n+1.$$

Hilfssatz 2.

$$F(x, s+j)\,\lambda(s+j+1) = F(x, s+j+1)\,K(s+j+1).$$

Beweis. Rechnung.

Hilfssatz 3.

$$X_j^{(s+1)} = \frac{\sum_{t=0}^{j-1}\Big(\prod_{a=j+2-t}^{j+1} \lambda(s+a)\Big) k_t^{(s+j+1-t)}}{\prod_{i=1}^{j} \lambda(s+i+1)} \quad \textit{für} \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Dabei ist $k_0^{(g)} = 1$.

Beweis. Es ist

$$x_1^{(s+1)} = \frac{1}{\lambda(s+2)}.$$

Ferner ist

$$x_{j+1}^{(s+1)} = \frac{x_j^{(s+2)} + k_j^{(s+2)}}{\lambda(s+2)}$$

und Induktion rundet den Beweis ab. Wie üblich ist ein leeres Produkt (für $t = 0$) gleich 1 zu setzen. Es sei nun

$$F(x, s+j) = \varepsilon(j)\beta$$

für $0 \leqslant j \leqslant n+1$, wo $0 < \varepsilon(j) \leqslant 1$.

Aus Hilfssatz 2 folgt zunächst

$$\varepsilon(j)\lambda(s+j+1) = \varepsilon(j+1)\, K(s+j+1).$$

HILFSSATZ 4. *Unter den genannten Bedingungen gilt*

$$\beta \geqslant k_n^{(s+1)} \prod_{a=2}^{n} \lambda(s+a) + \sum_{a=2}^{n} \frac{1}{\lambda(s+a)} + \sum_{t=1}^{n-1} \sum_{i=t}^{n} k_t^{(s+i+1-t)} + \\ + \frac{1}{k_n^{(s+1)}+1} + \frac{1}{k_n^{(s+1)} + k_{n-1}^{(s+1)} + \ldots + k_1^{(s+1)} + 1}.$$

Beweis. Es ist

$$F(x, s+1) = \frac{\sum_{i=0}^{n} A_0^{(s+i+1)} (k_i^{(s+1)} + x_i^{(s+2)})}{A_0^{(s+2)}}$$

wo $k_0^{(s+1)} = 1$, $x_0^{(s+1)} = 0$ gesetzt wird.

Daraus sieht man

$$F(x, s+1) = \sum_{i=1}^{n} \Big(\prod_{a=2}^{i} K(s+a)\Big) (k_i^{(s+1)} + x_i^{(s+1)}) + \frac{A_0^{(s+1)}}{A_0^{(s+2)}}.$$

Benützt man Hilfssatz 2 und 3, so erhält man nach einiger Rechnung

$$F(x, s+1) \\ = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\varepsilon(1)}{\varepsilon(i)} \frac{1}{\lambda(s+i+1)} \sum_{t=0}^{i} k_t^{(s+i+1-t)} \prod_{m=i+2-t}^{i+1} \lambda(s+m) \right] + \frac{1}{K(s+1)}.$$

Da $F(x, s+1) = \varepsilon(1)\beta$ erhält man letztlich

$$\beta = \frac{1}{\varepsilon(n)\lambda(s+n+1)} + \frac{1}{\varepsilon(1)K(s+1)} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\varepsilon(i)\lambda(s+i+1)} + \\ + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\varepsilon(i)\lambda(s+i+1)} \sum_{t=1}^{i} k_t^{(s+i+1-t)} \Big(\prod_{m=i+2-t}^{i+1} \lambda(s+m) \Big).$$

Wir bemerken

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{t=1}^{i} = \sum_{t=1}^{n} \sum_{i=t}^{n}$$

und spalten $t = n$ ab:

$$\frac{k_n^{(s+1)}}{\varepsilon(n)} \lambda(s+2) \ldots \lambda(s+n) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\varepsilon(i)\lambda(s+i+1)} \\ \geqslant k_n^{(s+1)} \lambda(s+2) \ldots \lambda(s+n) + \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{\lambda(s+i)}.$$

Ferner ist

$$\frac{\prod_{m=i+2-t}^{i+1} \lambda(s+m)}{\varepsilon(i)\lambda(s+i+1)} \geqslant 1 \quad \text{für} \quad 1 \leqslant t \leqslant n-1.$$

Da

$$\varepsilon(1)K(s+1) = \varepsilon(0)\lambda(s+1)$$

und

$$\lambda(s+1) = k_n^{(s+1)} + x_n^{(s+1)} \leqslant k_n^{(s+1)} + 1$$

ist weiters

$$\frac{1}{\varepsilon(1)K(s+1)} \geqslant \frac{1}{k_n^{(s+1)}+1}.$$

Wir beachten sodann

$$\varepsilon(n)\lambda(s+n+1) = \varepsilon(n+1)K(s+n+1)$$

und

$$K(s+n+1) \leqslant k_n^{(s+1)} + k_{n-1}^{(s+1)} + \ldots + k_1^{(s+1)} + 1.$$

Daraus erhält man das Resultat.

3. Beweis für $n = 4$. Eine numerische Rechnung zeigt

$$\beta = 6.0991 \ldots < 6.1.$$

Die Ungleichung von Hilfssatz 4 lautet daher

$$k_1^{(s+1)}+k_1^{(s+2)}+k_1^{(s+3)}+k_1^{(s+4)}+k_2^{(s+1)}+k_2^{(s+2)}+k_2^{(s+3)}+$$
$$+k_3^{(s+1)}+k_3^{(s+2)}+k_4^{(s+1)}\prod_{a=2}^{4}\lambda(s+a)+\sum_{a=2}^{4}\lambda(s+a)^{-1}+$$
$$+(1+k_4^{(s+1)})^{-1}+(1+k_1^{(s+1)}+k_2^{(s+1)}+k_3^{(s+1)}+k_4^{(s+1)})^{-1}\leqslant 6.1.$$

Es ist weiter (arithmetisch-geometrische Ungleichung!)

$$k_4^{(s+1)}\prod_{a=2}^{4}\lambda(s+a)+\sum_{a=2}^{4}\lambda(s+a)^{-1}$$
$$\geqslant (k_4^{(s+1)}-1)\prod_{a=2}^{4}\lambda(s+a)+\prod_{a=2}^{4}\lambda(s+a)+\sum_{a=2}^{4}\lambda(s+a)^{-1}$$
$$\geqslant (k_4^{(s+1)}-1)k_4^{(s+2)}k_4^{(s+3)}k_4^{(s+4)}+4.$$

Wir nehmen nun an: $F(x, g)\leqslant\beta$ für alle $g\geqslant G$.

Es sei nun $k_4^{(g)}=1$ für alle $g\geqslant G$. Dann erhalten wir

$$k_1^{(s+1)}+k_1^{(s+2)}+k_1^{(s+3)}+k_1^{(s+4)}+k_2^{(s+1)}+k_2^{(s+2)}+k_2^{(s+3)}+$$
$$+k_3^{(s+1)}+k_3^{(s+2)}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2+k_1^{(s+1)}+k_2^{(s+1)}+k_3^{(s+1)}}\leqslant 2.1.$$

Ist $k_3^{(s+1)}=1$, so muß $k_2^{(s+2)}\leqslant k_3^{(s+2)}$ gelten. Da $k_3^{(s+2)}=1$ unmöglich, gilt weiter $k_1^{(s+3)}\leqslant k_2^{(s+3)}$ und da analog $k_2^{(s+3)}=0$, erhält man $1\leqslant k_1^{(s+4)}$, einen Widerspruch. Ebenso sieht man, daß $k_2^{(s+1)}=1$ oder $k_1^{(s+1)}=1$ unmöglich ist. Dieser Fall führt daher auf den in Hilfssatz 1 behandelten Algorithmus.

Es sei $k_4^{(g)}>1$ unendlich oft!

Ist $k_4^{(s+1)}=3$, so liefert schon

$$k_4^{(s+1)}-1+\frac{1}{1+k_4^{(s+1)}}\leqslant 2.1$$

einen Widerspruch.

Ist $k_4^{(s+1)}=2$, so erhalten wir

$$\sum_{j=1}^{4}k_1^{(s+j)}+\sum_{j=1}^{3}k_2^{(s+j)}+\sum_{j=1}^{2}k_3^{(s+j)}+k_4^{(s+2)}k_4^{(s+3)}k_4^{(s+4)}+$$
$$+\frac{1}{3}+\frac{1}{3+k_1^{(s+1)}+k_2^{(s+1)}+k_3^{(s+1)}}\leqslant 2.1.$$

Daraus sieht man:

$$k_4^{(s+2)}=k_4^{(s+3)}=k_4^{(s+4)}=1.$$

Genauer: Von je vier aufeinanderfolgenden $k_4^{(g)}$ kann höchstens ein Wert gleich 2 sein.

Es verbleibt sodann

$$\sum_{j=1}^{4}k_1^{(s+j)}+\sum_{j=1}^{3}k_2^{(s+j)}+\sum_{j=1}^{2}k_3^{(s+j)}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3+k_1^{(s+1)}+k_2^{(s+1)}+k_3^{(s+1)}}\leqslant 1+\frac{1}{10}.$$

Daher muß $k_t^{(g)}=0$ sein für alle $g\geqslant G$ und $1\leqslant t\leqslant 3$.

Es verbleibt der Fall:

$$k_4^{(s-2)}=k_4^{(s-1)}=k_4^{(s)}=1,$$
$$k_4^{(s+1)}=2,$$
$$k_4^{(s+2)}=k_4^{(s+3)}=k_4^{(s+4)}=1$$

wo $k_t^{(g)}=0$, $1\leqslant t\leqslant 3$ und in vier konsekutiven $k_4^{(g)}$ höchstens ein Wert 2 auftritt. Die Ungleichung von Hilfssatz 4 lautet

$$\tfrac{2}{3}+2(1+x_4^{(s+2)})(1+x_4^{(s+3)})(1+x_4^{(s+4)})+\frac{1}{1+x_4^{(s+2)}}+$$
$$+\frac{1}{1+x_4^{(s+3)}}+\frac{1}{1+x_4^{(s+4)}}\leqslant 6.1.$$

Es ist

$$x_4^{(s+2)}=\frac{1}{k_4^{(s+5)}(k_4^{(s+6)}+x_4^{(s+6)})+x_3^{(s+6)}+x_2^{(s+6)}+x_1^{(s+6)}}\geqslant\frac{1}{7},$$
$$x_4^{(s+3)}\geqslant\frac{1}{k_4^{(s+5)}\big(k_4^{(s+6)}(k_4^{(s+7)}+x_4^{(s+7)})+x_3^{(s+6)}\big)+x_2^{(s+6)}+x_1^{(s+6)}}\geqslant\frac{1}{8},$$
$$x_4^{(s+4)}=\frac{1}{k_4^{(s+5)}\Big(k_4^{(s+6)}\big(k_4^{(s+7)}(k_4^{(s+8)}+x_4^{(s+8)})+x_3^{(s+8)}\big)+x_2^{(s+8)}\Big)+x_1^{(s+8)}}\geqslant\frac{1}{9}.$$

Daraus folgt

$$\tfrac{2}{3}+2(1+x_4^{(s+2)})(1+x_4^{(s+3)})(1+x_4^{(s+4)})+\frac{1}{1+x_4^{(s+2)}}+\frac{1}{1+x_4^{(s+3)}}+\frac{1}{1+x_4^{(s+3)}}$$
$$\geqslant\tfrac{2}{3}+2(1+\tfrac{1}{7})(1+\tfrac{1}{8})(1+\tfrac{1}{9})+\tfrac{7}{8}+\tfrac{8}{9}+\tfrac{9}{10}\geqslant 6.15.$$

Dies ist ein Widerspruch.

Zuletzt danke ich noch Herrn W. Bauer, der einige numerische Berechnungen zur Stützung der Vermutung beigetragen hat.

Literaturverzeichnis

[1] L. Bernstein, *The Jacobi-Perron Algorithm. Its Theory and Application*, Lecture Notes in Mathematics 207. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1970.
[2] A. Ya. Khintchine, *Continued Fractions*, Groningen 1963.
[3] O. Perron, *Grundlagen für eine Theorie des Jacobischen Kettenbruchalgorithmus*, Math. Ann. 64 (1907), S. 1–76.

[4] W. Schmidt, *Flächenapproximation beim Jacobialgorithmus*, Math. Ann. 136 (1958), S. 365–374.
[5] F. Schweiger, *Geometrische und elementare metrische Sätze über den Jacobischen Algorithmus*, Sitzungsber. Österr. Akad. Wiss., Math.-naturw. Kl., Abt. II, 173 (1964), S. 59–92.
[6] — *Volumsapproximation beim Jacobialgorithmus*, E. in. Math. Ann.

Eingegangen 25. 8. 1972 (317)

ACTA ARITHMETICA
XXIII (1973)

On the number of integers which are sums of two squares

by

YOICHI MOTOHASHI (Tokyo)

1. Let $b(n)$ be defined to be 1 or 0 according as n be or not be expressed as a sum of two integral squares. As is well-known Landau has proved the asymptotic formula

$$\sum_{n\leqslant N} b(n) = \big(1+o(1)\big)C\frac{N}{\sqrt{\log N}} \quad (\text{as } N\to\infty). \tag{1}$$

On account of this formula we may introduce the problem to prove the asymptotic formula

$$\sum_{N\leqslant n\leqslant N+M} b(n) = \big(1+o(1)\big)C\frac{M}{\sqrt{\log N}}, \tag{2}$$

where M is in the range $N^{a}\leqslant M<N$ with a constant $a<1$. Although this problem has the aspect similar to the theorem of Hoheisel in the theory of prime numbers, it seems extreemly difficult to adapt any methods there to our problem. Thus it is very desirable to prove a good lower estimation of the left side of (2), and this has been recently done by Hooley in the following form(¹): we have

$$\sum_{N\leqslant n\leqslant N+N^{\theta}} b(n) \gg \frac{N^{\theta}}{\sqrt{\log N}} \tag{3}$$

for any $\theta>\frac{12}{37}$. This lower bound of θ comes from the fact that this is the hitherto best exponent of the remainder term of the circle problem [1], and so it seems very difficult to improve (3).

The purpose of the present paper is to prove a non-trivial, but slightly weaker than (3), estimation for "almost all" intervals of very small length. More precisely we shall prove

(¹) In the first draft of the present paper we have proved an estimation weaker than this (by a factor of $(\log\log N)^{-C}$), and we are indebted to Prof. Schinzel who informed us of Prof. Hooley's strong result.