ACTA ARITHMETICA
XXIII (1973)

Répartition des sous-suites d'une suite donnée

par

YVES DUPAIN et JACQUES LESCA (Talence)

§ 0. Introduction. Pour toute suite de points du tore $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$, l'ensemble des densités des sous-suites équiréparties est un intervalle initial de $\boldsymbol{R}_+$.
M. Mendès France [2], qui le remarque, se demande si cet intervalle est fermé. La réponse est positive comme le prouve le théorème plus général ci-dessous.

Soit X un espace topologique localement compact muni d'une base dénombrable, et soit $u = (u_n)_{n\in \boldsymbol{N}}$ une suite de points de X. Nous nous proposons d'étudier l'ensemble des mesures de Borel μ de norme 1 telles qu'il existe une sous-suite de u possédant une densité et μ-équirépartie [1].

Soit $\mathscr{M}$ l'ensemble des mesures de Borel positives sur X. Soit $\mu \in \mathscr{M}$; un borélien est dit μ-mesurable au sens de Riemann ($\mathscr{R}$-μ-mesurable), si la mesure μ de sa frontière est nulle.

Nous dirons qu'une partie P de $\boldsymbol{N}$ est μ-répartie, si pour tout borélien B, $\mathscr{R}$-μ-mesurable, l'ensemble des indices n appartenant à P et tels que u_n appartient à B a la densité $\mu(B)$. Il est clair que si P est μ-répartie, P a elle-même la densité $\mu(X)$, et si $\mu(X) > 0$, la sous-suite $(u_n)_{n\in P}$ ordonnée par indices croissants est ν-équirépartie pour la mesure $\nu = \dfrac{1}{\mu(X)}\mu$.

THÉORÈME. *L'ensemble $\mathscr{A}$ des mesures $\mu \in \mathscr{M}$ telles qu'il existe une partie P de $\boldsymbol{N}$, μ-répartie, est un intervalle initial fermé de $\mathscr{M}$ (nous prouverons l'existence d'une mesure $\mu_0 \in \mathscr{M}$, telle que $\mathscr{A}$ est l'ensemble des mesures majorées par μ_0).*

Remarques

1) Si X est réduit à deux éléments; $X = \{a, b\}$, à une suite u de points de X, faisons correspondre la partie $Q = \{n\colon u_n = a\}$. Alors u est équirépartie si Q a une densité. Si Q n'a pas de densité, il existe d_0 qui est la plus grande densité des sous-suites de Q. Il convient de remarquer que d_0 n'est pas en général la densité inférieure d^- de Q mais un minorant de d^-, et que si l'on se donne trois nombres d^0, d^- et d^+, tels que $0 \leqslant d_0$

$\leqslant d^- \leqslant d^+ \leqslant 1$, il existe des parties Q pour lesquelles ces nombres sont respectivement la meilleure densité, la densité inférieure et la densité supérieure.

2) Il ressort du théorème que si μ est une mesure de norme 1, l'ensemble des densités des sous-suites μ-équiréparties, s'il n'est pas vide, est un intervalle réel $[0, \lambda_0]$. Si $X = [0, 1[$, μ la mesure de Lebesgue et si u possède une fonction de répartition f, on calcule $\lambda_0(u) = \lambda_0 = \operatorname{Inf}\{f'(x)\colon x \in [0, 1[, f \text{ dérivable au point } x\}$.

Ce résultat s'applique, par exemple, à la suite des puissances d'un nombre de Salem θ [3]; en particulier si n est le degré de θ, on montre que λ_0 ne dépend que de n et que λ_0 tend vers 1 quand n tend vers l'infini.

3) Si P est une partie de N, μ-répartie et ν-répartie, μ et ν étant des mesures de $\mathscr{M}$, alors $\mu = \nu$. (L'ensemble des $\mathscr{R}$-μ-mesurables d'une mesure quelconque engendre la tribu des Boréliens). Soient u une suite μ-équirépartie et B_0 un borélien; soit ν la mesure définie par $\nu(B) = \mu(B \cap B_0)$. Alors deux parties P et Q ν-réparties ont une différence symétrique de densité nulle. (Ce résultat est à rapprocher de ceux de R. Scoville [4]).

4) Si X n'est pas réduit à un élément, pour toute mesure μ appartenant à $\mathscr{M}$ de norme au plus 1, il existe une suite u, telle que l'ensemble $\mathscr{A}$ soit l'ensemble des mesures majorées par μ.

Introduisons quelques notations. Soient P une partie de N et A une partie de X; posons

$$\pi(P, A, n) = \operatorname{card}\{k \in P\colon 0 \leqslant k < n,\ u_k \in A\},$$

$$\tau(P, A, n) = \frac{1}{n}\pi(P, A, n),$$

$$\tau^+(P, A) = \limsup_{n\to\infty} \tau(P, A, n),$$

$$\tau^-(P, A) = \liminf_{n\to\infty} \tau(P, A, n)$$

et si la limite existe

$$\tau(P, A) = \tau^+(P, A) = \tau^-(P, A).$$

Pour un borélien B posons:

$$\varrho(B) = \sup\{\tau(P, B)\colon P \in \mathscr{P}(N);\ \tau^+(P, B) = \tau^-(P, B)\}$$

c'est la borne supérieure des densités des sous suites de u dont chaque élément appartient à B.

La fonction ϱ est sur-additive, c'est-à-dire que si $\{B_1, B_2, \ldots, B_r\}$ est un ensemble fini de Boréliens disjoints

$$\varrho(B_1 \cup \ldots \cup B_r) \geqslant \varrho(B_1) + \ldots + \varrho(B_r); \qquad \varrho \text{ est croissante.}$$

Posons encore pour un borélien B

$$\varrho^+(B) = \inf\{\varrho(U)\colon U \text{ ouvert contenant } \overline{B}\} \ (\overline{B} \text{ désigne l'adhérence de } B),$$

$$\mu_0(B) = \inf\Big\{\sum \varrho^+(A_n);\ A_n \in \mathscr{B},\ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \supset B\Big\}.$$

Il est clair que μ_0 minore ϱ^+ et majore toute mesure $\mu \in \mathscr{M}$ minorant ϱ^+. Dans le paragraphe 1 nous montrerons que $\mathscr{A}$ est l'ensemble des mesures $\mu \in \mathscr{M}$ qui minorent ϱ^+, et dans le paragraphe 2 nous prouverons que μ_0 appartient à $\mathscr{M}$, ce qui entraîne.

$$\mathscr{A} = [0, \mu_0] = \{\mu \in \mathscr{M}\colon 0 \leqslant \mu \leqslant \mu_0\}.$$

§ 1. $\mathscr{A}$ est l'ensemble des mesures qui minorent ϱ^+. Vérifions tout d'abord

Lemme A. *Toute mesure de $\mathscr{A}$ est majorée par ϱ^+.*

Preuve. Soit $\mu \in \mathscr{A}$. Il existe une partie P de N, μ-répartie.

Si B est un borélien $\mathscr{R}$-μ-mesurable, nous avons:

$$\mu(B) = \tau(P, B) \leqslant \varrho(B) \leqslant \varrho^+(B).$$

Si B est un borélien quelconque, et $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert U contenant $\overline{B}$ tel que:

$$\varrho^+(B) \geqslant \varrho(U) - \varepsilon.$$

D'autre part il existe un borélien U', $\mathscr{R}$-μ-mesurable tel que

$$\overline{B} \subset U' \subset \overline{U}' \subset U.$$

Nous avons alors $\mu(B) \leqslant \mu(U') \leqslant \varrho^+(U') \leqslant \varrho(U) \leqslant \varrho^+(B) + \varepsilon$. ε étant arbitraire, $\mu(B) \leqslant \varrho^+(B)$, ce qui prouve le lemme A. ■

Afin de démontrer la réciproque, établissons quelques lemmes.

Lemme B. *Soit $\mu \in \mathscr{M}$, $\mu \leqslant \varrho^+$. Si B est un borélien, $\mathscr{R}$-μ-mesurable, $\mu(B) \leqslant \varrho(B)$.*

Preuve. $\mu(B) = \mu(B^\circ)$ (B° désigne l'intérieur de B). Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un fermé F inclus dans B° tel que $\mu(F) \geqslant \mu(B) - \varepsilon$, d'autre part

$$\mu(F) \leqslant \varrho^+(F) \leqslant \varrho(B^\circ) \leqslant \varrho(B) \quad \text{d'où} \quad \mu(B) \leqslant \varrho(B) + \varepsilon.$$

ε étant arbitraire, nous en déduisons le lemme B. ■

Lemme C. *Soit $\mu \in \mathscr{M}$, $\mu \leqslant \varrho^+$. Si B est un borélien $\mathscr{R}$-μ-mesurable, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une partie P de N et un entier N tels que*

1° *si $n \geqslant N$, $|\tau(P, B, n) - \mu(B)| \leqslant \varepsilon$;*

2° *pour chaque indice $n \in P$, $u_n \in B$.*

Preuve. Il existe une partie Q de N de densité d, supérieure à $\varrho(B) - \varepsilon$ telle que pour chaque $n \in Q$; $u_n \in B$.

Si $\mu(B) \geqslant d-\varepsilon$, prenons $P = Q$.

Si $\mu(B) < d-\varepsilon$, prenons pour P une partie de Q, de densité $\dfrac{\mu(B)}{d}$ par rapport à Q. (Nous pouvons, par exemple, construire P ainsi: le $n$ième élément de Q appartient à P si

$$\left[n\frac{\mu(B)}{d}\right] = \left[(n-1)\frac{\mu(B)}{d}\right]+1,$$

où $[x]$ désigne la partie entière de x réel.) ■

Lemme D. *Soit $\mu \in \mathscr{M}$, $\mu \leqslant \varrho^+$. Soit $\mathfrak{B} = \{B_0 = X, B_1, \ldots, B_k\}$, un ensemble fini de parties de X, $\mathscr{R}$-μ-mesurables. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie P de N et un entier N tels que si $n \geqslant N$*

$$(*) \qquad |\tau(P, B_i, n) - \mu(B_i)| \leqslant \varepsilon \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Preuve. Considérons la partition de X associée à $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{E} = \{E_1, E_2, \ldots \ldots, E_k\}$ chaque $B_j \in \mathfrak{B}$ est union d'au plus k éléments de $\mathfrak{E}$. Nous déduisons du lemme C:

Pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, il existe une partie P de N et un entier N_i tels que:

$$\begin{cases} n \geqslant N_i \Rightarrow |\tau(P_i, E_i, n) - \mu(E_i)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{k}, \\ n \in P_i \Rightarrow u_n \in E_i. \end{cases}$$

La relation $(*)$ est vérifiée pour P réunion (disjointe) des P_i et N maximum des N_i. ■

Nous allons maintenant démontrer la réciproque du lemme A;

Lemme E. *Toute mesure de $\mathscr{M}$ majorée par ϱ^+ appartient à $\mathscr{A}$.*

Preuve. Considérons $\mathscr{S} = \{B_0 = X, B_1, \ldots\}$ une suite de boréliens $\mathscr{R}$-μ-mesurables constituant une famille suffisante. (On rappelle qu'une famille suffisante est une famille telle que, P étant une partie de N, si pour tout élément de la famille B, $\tau(P, B)$ existe et vaut $\mu(B)$, alors P est μ-répartie.)

Il résulte du lemme D que, pour tout entier i, il existe une partie Q_i de N et un entier N_i tels que, pour tout $k \leqslant i$ et pour tout $n \geqslant N_i$

$$|\tau(Q_i, B_k, n) - \mu(B_k)| \leqslant \frac{1}{i}.$$

Soit $\mu \in \mathscr{M}$, $\mu \leqslant \varrho^+$, nous allons construire une partie P de N qui est μ-répartie.

Pour cela, introduisons la suite croissante d'entiers (M_r) définie par récurrence par:

$$M_0 = \operatorname{Max}\{N_0, N_1\},$$
$$M_r = \operatorname{Max}\{N_r, N_{r+1}, rM_{r-1}\}, \qquad r \geqslant 1,$$

et définissons P par

$$P = \bigcup_r \{[M_r, M_{r+1}[\cap Q_r\}.$$

(Les N_i et Q_j étant définis dans le paragraphe ci-avant.)

Montrons que P est μ-répartie. Il suffit de montrer que, pour tout k, $\tau(P, B_k)$ existe et vaut $\mu(B)$.

Soit $B_k \in \mathscr{S}$ et $r \geqslant 1$, $r \geqslant k$. Montrons que pour $M_r \leqslant n < M_{r+1}$ nous avons:

$$(1) \qquad |\tau(P, B_k, n) - \mu(B_k)| \leqslant 4/r.$$

Or:

$$\pi(P, B_k, n) = \pi(Q_{r+1}, B_k, n) - \pi(Q_{r+1}, B_k, M_r) + \\ + \pi(Q_r, B_k, M_r) - \pi(Q_r, B_k, M_{r-1}) + \pi(P, B_k, M_{r-1}).$$

Soit en divisant par n

$$\tau(P, B_k, n) = \tau(Q_{r+1}, B_k, n) - [\tau(Q_{r+1}, B_k, M_r) - \tau(Q_r, B_k, M_r)]\frac{M_r}{n} - \\ - [\pi(Q_r, B_k, M_{r-1}) - \pi(P, B_k, M_{r-1})]\frac{1}{n}.$$

Or:

$$(2) \qquad |\tau(Q_{r+1}, B_k, n) - \mu(B_k)| \leqslant 1/r$$

puisque $n \geqslant M_r \geqslant N_{r+1}$.

De même

$$|\tau(Q_{r+1}, B_k, M_r) - \mu(B_k)| \leqslant 1/r, \qquad |\tau(Q_r, B_k, M_r) - \mu(B_k)| \leqslant 1/r,$$

d'où:

$$(3) \qquad |\tau(Q_{r+1}, B_k, M_r) - \tau(Q_r, B_k, M_r)| \leqslant 2/r.$$

De plus:

$$|\pi(P, B_k, M_{r-1}) - \pi(Q_r, B_k, M_{r-1})|$$

est majoré par M_{r-1} et puisque $n \geqslant M_r \geqslant rM_{r-1}$:

$$(4) \qquad \frac{1}{n}|\pi(P, B_k, M_{r-1}) - \pi(Q_r, B_k, M_{r-1})| \leqslant \frac{1}{r}.$$

(1) est une conséquence de (2), (3) et (4) et entraine: $\tau(P, B_k)$ existe et vaut $\mu(B_k)$.

La suite P est bien μ-répartie. ■

Le lemme A et le lemme E prouvent donc que $\mathscr{A}$ est l'ensemble des mesures de $\mathscr{M}$ qui minorent ϱ^+.

§ 2. μ_0 est une mesure de $\mathscr{M}$. μ_0 est une mesure externe construite par le procédé classique. C'est une fonction sous-additive dont la restriction à la tribu des mesurables est une mesure. Nous prouverons que cette tribu contient les compacts et que par conséquent c'est $\mathscr{B}$.

LEMME F. *Soient B' et B'' deux boréliens tels que $\overline{B}'\cap\overline{B}''=\emptyset$ alors $\varrho^+(B'\cup B'')\geqslant\varrho^+(B')+\varrho^+(B'')$.*

Preuve. X est normal et par conséquent il existe deux ouverts disjoints U' et U'' contenant respectivement $\overline{B}'$ et $\overline{B}''$. Alors

$$\varrho^+(B'\cup B'')=\inf\{\varrho(U)\colon\ U\ \text{ouvert},\ U\supset(\overline{B}'\cup\overline{B}''),\ U\subset(U'\cup U'')\}.$$

ϱ étant sur-additive, pour U ouvert contenant $(\overline{B}'\cup\overline{B}'')$ et inclus dans $(U'\cup U'')$, nous avons:

$$U=(U\cap U')\cup(U\cap U''),$$

et

$$\varrho(U)\geqslant\varrho(U\cap U')+\varrho(U\cap U'')\geqslant\varrho^+(B')+\varrho^+(B'')$$

d'où nous déduisons le lemme F. ■

LEMME G. *Soient B' et B'' deux boréliens tels que $\overline{B}'\cap\overline{B}''=\emptyset$ alors $\mu_0(B'\cup B'')=\mu_0(B')+\mu_0(B'')$.*

Preuve. Il suffit de montrer que $\mu_0(B'\cup B'')\geqslant\mu_0(B')+\mu_0(B'')$. Pour $\varepsilon>0$, il existe une suite B_n de boréliens tels que:

$$\Big(\bigcup_n B_n\Big)\supset B'\cup B''\quad\text{et}\quad\sum_{n=1}^{\infty}\varrho^+(B_n)\leqslant\mu_0(B'\cup B'')+\varepsilon.$$

Soient, comme dans la démonstration du lemme F, deux ouverts disjoints U' et U'' contenant respectivement $\overline{B}'$ et $\overline{B}''$.

Posons:

$$B_n'=B_n\cap U'\quad\text{et}\quad B_n''=B_n\cap U''.$$

Nous avons:

$$\mu_0(B'\cup B'')+\varepsilon\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\varrho^+(B_n)\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\varrho^+(B_n'\cup B_n'')$$
$$\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\varrho^+(B_n')+\sum_{n=1}^{\infty}\varrho^+(B_n'')\geqslant\mu_0(B')+\mu_0(B'').$$

Nous en déduisons $\mu_0(B'\cup B'')=\mu_0(B')+\mu_0(B'')$. ■

LEMME H. *Soit B un borélien de X dont la frontière $\mathrm{Fr}(B)$ est telle que:*

$$\mu_0\big(\mathrm{Fr}(B)\big)=0.$$

Alors B est μ_0-mesurable.

Preuve. Soit M un borélien. Posons $M'=M\cap B$ et $M''=M-M'$. Nous prouverons que $\mu_0(M)=\mu_0(M')+\mu_0(M'')$, μ_0 étant sous-additive, il suffit de montrer:

$$\mu_0(M)\geqslant\mu_0(M')+\mu_0(M'').$$

Soit $\varepsilon>0$. Il existe un ouvert U contenant $\mathrm{Fr}(B)$ tel que $\mu_0(U)\leqslant\varepsilon/2$.

Posons $N'=M'-U$ et $N''=M''-U$.

Nous avons $\overline{N}'\cap\overline{N}''=\emptyset$ et par conséquent d'après le lemme E

$$\mu_0(M-U)=\mu_0(N')+\mu_0(N'')$$

et

$$\mu_0(M)\geqslant\mu_0(M-U)=\mu_0(N')+\mu_0(N'').\tag{1}$$

μ_0 étant sous-additive, nous avons

$$\mu_0(N')+\mu_0(U)\geqslant\mu_0(N'\cup U)\geqslant\mu_0(M')$$

et

$$\mu_0(N'')+\mu_0(U)\geqslant\mu_0(N''\cup U)\geqslant\mu_0(M'')$$

c'est-à-dire

$$\mu_0(N')\geqslant\mu_0(M')-\varepsilon/2,\tag{2}$$

$$\mu_0(N'')\geqslant\mu_0(M'')-\varepsilon/2,\tag{3}$$

de (1), (2), (3) nous déduisons $\mu_0(M)\geqslant\mu_0(M')+\mu_0(M'')+\varepsilon$ ce qui prouve le lemme H. ■

LEMME I. *Tout compact K est μ_0 mesurable.*

Preuve. Il suffit de démontrer que tout compact est intersection dénombrable de boréliens B tels que $\mu_0(\mathrm{Fr}\,B)=0$.

Tout compact est intersection dénombrable d'ouverts. Il suffit de montrer que si A est un ouvert contenant K, il contient un ouvert U contenant K tel que $\mu_0(\mathrm{Fr}\,U)=0$.

Il existe une fonction continue f valant 0 sur le complémentaire de A et 1 sur K. Pour α réel, $0<\alpha<1$, posons $U_\alpha=f^{-1}(]\alpha,+\infty[)$ U_α est un ouvert dont la frontière est incluse dans le fermé $F_\alpha=f^{-1}(\{\alpha\})$.

Les F_α sont des fermés disjoints et d'après le lemme G la famille $\{\mu_0(F_\alpha)\colon\ \alpha\in\,]0,1[\}$ est une famille sommable. L'ensemble des α pour lesquels $\mu_0(F_\alpha)$ est positif est dénombrable. Il s'ensuit qu'il existe α tel que $\mu\big(\mathrm{Fr}(U_\alpha)\big)=0$, d'où nous déduisons le lemme I. ■

Les compacts engendrant les boréliens, la tribu des μ_0-mesurables est celle des boréliens $\mathscr{B}$ et μ_0 appartient donc à $\mathscr{M}$, ce qui achève la démonstration.

References

[1] J. Lesca, *Suites équiréparties dans un espace localement compact*, Enseignement Math. 17 (3–4) (1971), p. 311–328.

[2] M. Mendès France, *Suites et sous-suites équiréparties modulo* 1, Journées Arithmétiques Françaises, Université de Provence, (1971).

[3] R. Salem et C. Pisot, *Distribution* mod 1 *of the powers of real numbers larger than* 1, Compositio Math. 16 (1, 2), (1964), p. 166.

[4] R. Scoville, *Some Measure Algebras on the integers*, Pacific Journal of Math. 34 (3) (1970), p. 769–779.

U.E.R. DE MATHÉMATIQUES ET D'INFORMATIQUE
UNIVERSITÉ DE BORDEAUX
Talence, France

Reçu le 27. 4. 1972 (278)