ACTA ARITHMETICA
XXIII (1973)

Sur les fractions continues limitées

par

MICHEL MENDÈS FRANCE* (Talence)

§ 1. Généralités. Soit x un nombre rationnel. On sait qu'on peut le développer en fraction continue limitée et ceci de façon unique, sous la forme

$$x = a_0 + \frac{1|}{|a_1} + \frac{1|}{|a_2} + \ldots + \frac{1|}{|a_n} \tag{1}$$

où les entiers $a_0, a_1, \ldots, a_n$ vérifient les conditions

(i) $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ sont positifs non nuls,

(ii) $a_n \geqslant 2$.

On s'intéresse à la „profondeur" n (nombre de traits de fraction) de la fraction continue de x. On pose $n = \psi(x)$. La fonction ψ est ainsi définie sur $\boldsymbol{Q}/\boldsymbol{Z}$ et prend ses valeurs sur $\boldsymbol{N}$.

On aura aussi à considérer la fonction ψ^* définie par $\psi^*(x) = \psi(x)$ si $\psi(x)$ est pair et par $\psi^*(x) = 1+\psi(x)$ si $\psi(x)$ est impair. Ainsi, si $n = \psi(x)$ est impair, $\psi^*(x)$ représente la profondeur de la fraction continue de x écrite sous la forme

$$x = a_0 + \frac{1|}{|a_1} + \frac{1|}{|a_2} + \ldots + \frac{1|}{|a_{n-1}} + \frac{1|}{|a_n - 1} + \frac{1|}{|1} \tag{2}$$

(la condition (ii) étant alors omise). On définit les deux quantités

$$K(n) = \max_{0 \leqslant p \leqslant n-1} \psi\left(\frac{p}{n}\right), \quad K^*(n) = \max_{0 \leqslant p \leqslant n-1} \psi^*\left(\frac{p}{n}\right).$$

Le but essentiel de cet article est de démontrer le résultat suivant: *Pour tout entier $n > 0$, on a*

$$\sup_{x \in Q} \frac{\psi(nx)}{\psi(x)} = 1 + K^*(n).$$

* L'auteur tient à remercier très vivement le professeur Schinzel pour son aide et ses remarques très pertinentes.

Compte-tenu des estimations établies par Mikusiński dans [5], on en déduit

$$1+\alpha\log n<\sup_{x\in Q}\frac{\psi(nx)}{\psi(x)}<2(1+\alpha\log n)$$

où:

$$\alpha=\frac{1}{2}\left(\log\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-1}=1.039\ldots$$

Remarque. Comme $\psi^*(x)$ est pair, $1+K^*(n)$ est impair. Donnons quel-ques valeurs de $\theta(n)=\sup_{x\in Q}\frac{\psi(nx)}{\psi(x)}$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$\theta(n)$	1	3	3	3	5	3	5	5	5	5	5	5	7	5	5	5

Par ailleurs, si (u_n) est la suite de Fibonacci ($u_0=u_1=1$, $u_n=u_{n-1}+u_{n-2}$), on montre sans peine que $K(u_n)=n-1$. Ainsi $\theta(u_{2n})=\theta(u_{2n+1})=2n+1$. Pour illustrer combien $\theta(n)$ croît (en moyenne) lentement, signalons l'égalité $\theta(873850)=29$.

§ 2. Résultats obtenus. A vrai dire, nous démontrons un résultat légèrement plus précis que celui annoncé au premier paragraphe.

Soit $\varepsilon(n)\in\{0,1\}$ défini par $K(n)\equiv\varepsilon(n)(\mathrm{mod}\,2)$, de sorte que $K^*(n)=K(n)+\varepsilon(n)$.

Théorème. *Pour tout entier $n\geqslant 1$ et tout nombre rationnel x, on a l'inégalité*

$$\psi(nx)\leqslant\big(1+K(n)+\varepsilon(n)\big)\psi(x)-\varepsilon(n).$$

De plus, pour tout entier $s\geqslant 0$, il existe un nombre rationnel x pour lequel $\psi(x)=s$ et pour lequel l'égalité a lieu.

Corollaire. *Pour tout entier $n\geqslant 1$ et tout x rationnel, on a*

$$\psi(nx)\geqslant\frac{\psi(x)-1+\varepsilon(n)}{K(n)+1+\varepsilon(n)}-1.$$

Ce corollaire permet par exemple de prouver que si (u_n) est la suite de Fibonacci et si λ_n est une suite d'entiers positifs tels que $\operatorname{Log}\lambda_n=o(n)$, alors $\psi\left(\frac{u_{n+1}}{\lambda_n u_n}\right)$ et $\psi\left(\lambda_n\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ tendent vers l'infini. Plus précisément, si $0<\beta<\operatorname{Log}\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, on a

$$\psi\left(\lambda_n\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)>\beta\frac{n}{\operatorname{Log}\lambda_n},\qquad \psi\left(\frac{1}{\lambda_n}\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)>\beta\frac{n}{\operatorname{Log}\lambda_n}.$$

On remarquera qu'il existe des suites d'entiers λ_n pour lesquelles $\operatorname{Log}\lambda_n=O(n)$ et pour lesquelles $\psi\left(\lambda_n\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ (resp. $\psi\left(\frac{1}{\lambda_n}\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$) reste borné. Il suffit de choisir $\lambda_n=u_n$ (resp. $\lambda_n=u_{n+1}$).

§ 3. Démonstrations. On adopte les notations classiques de la théorie des fractions continues. Ainsi par exemple, l'égalité (1) s'écrit sous la forme

$$x=[a_0,a_1,\ldots,a_n].$$

Si $m\leqslant n=\psi(x)$ (resp. $\psi^*(x)$), on pose

$$\frac{p_m}{q_m}=[a_0,a_1,\ldots,a_m]$$

de sorte que $x=p_n/q_n$.

La démonstration du théorème repose essentiellement sur le lemme suivant:

Lemme. *Soient i et n deux entiers tels que $1\leqslant i\leqslant n-1$ et $(i,n)=1$. Soit*

$$\frac{i}{n}=[0,a_1,\ldots,a_s]$$

le développement en fraction continue de $\frac{i}{n}$ où $s=\psi^*\left(\frac{i}{n}\right)$ est pair (alors $a_s\geqslant 1$). Soit q_{s-1} ($<n$) le dénominateur de la fraction $[0,a_1,\ldots,a_{s-1}]$. Alors, x étant une variable réelle (ou complexe), on a l'identité suivante:

$$\frac{i}{n}+\frac{1}{n^2x}=\left[0,a_1,\ldots,a_s,x-\frac{q_{s-1}}{n}\right].$$

Corollaire. *Si $(i,n)=\delta\geqslant 1$, on a*

$$\frac{i}{n}+\frac{1}{n^2x}=\left[0,a_1,\ldots,a_s,\delta^2x-\delta\frac{q_{s-1}}{n}\right].$$

Ce corollaire découle immédiatement du lemme car si $(i,n)=\delta$, on a $\frac{i}{n}=\frac{j}{m}$ où $j=\frac{i}{\delta}$ et $m=\frac{n}{\delta}$. Dès lors:

$$\frac{i}{n}+\frac{1}{n^2x}=\frac{j}{m}+\frac{1}{m^2\delta^2x}=\left[0,a_1,\ldots,a_s,\delta^2x-\frac{q_{s-1}}{m}\right].$$

C.Q.F.D.

Démontrons le lemme. Posons $\beta = x - \frac{q_{s-1}}{n}$. Soit $\xi = [0, a_1, \ldots$ $\ldots, a_s, \beta]$. La théorie classique des fractions continues nous apprend que

$$\xi = \frac{p_s\beta + p_{s-1}}{q_s\beta + q_{s-1}} = \frac{p_s}{q_s} + \frac{(-1)^s}{q_s(q_s\beta + q_{s-1})}.$$

Mais on a supposé s pair. Par ailleurs, comme $(i, n) = 1$, on a $p_s = i$ et $q_s = n$. Donc

$$\xi = \frac{i}{n} + \frac{1}{n\left(n\left(x - \frac{q_{s-1}}{n}\right) + q_{s-1}\right)} = \frac{i}{n} + \frac{1}{n^2x}.$$

C.Q.F.D.

Démonstration du théorème. Soit x un nombre rationnel tel que $\psi(x) = k$. Soit par ailleurs n un entier $\geqslant 2$. On peut écrire x sous la forme

$$x = [a_0, na_1 + i_1, na_2 + i_2, \ldots, na_k + i_k]$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_k$ sont des entiers positifs ou nuls et où les entiers $i_1, i_2, \ldots, i_k$ vérifient $0 \leqslant i_g \leqslant n-1$ et $na_g + i_g \neq 0$ pour $g = 1, 2, \ldots, k$. Nous cherchons une borne supérieure précise de $\psi(nx)$. Nous verrons ultérieurement que pour réaliser cela, nous pouvons nous astreindre à étudier les x tels que $a_g \geqslant 2$ pour $g = 1, 2, \ldots, k$ (condition C_1).

Pour $g = 1, 2, \ldots, k$, on pose

(3) $$nx_g = [na_g + i_g, na_{g+1} + i_{g+1}, \ldots, na_k + i_k],$$

de sorte que

(4) $$x = [a_0, nx_1] = [a_0, na_1 + i_1, nx_2] = \ldots$$

et que $x_g \geqslant 2$.

D'après (4), nous avons

$$nx = \left[na_0, a_1 + \frac{i_1}{n} + \frac{1}{n^2x_2}\right].$$

Posons $j_1 = i_1$ et supposons que $(j_1, n) = 1$. Dans la suite de la démonstration, interviendront des entiers $j_2, j_3, \ldots, j_k$. Dans un premier temps, on supposera que $(j_g, n) = 1$ pour $g = 1, 2, 3, \ldots, k$ (condition C_2) et puis on montrera que si cela n'est pas le cas, la borne obtenue pour $\psi(nx)$ reste admissible.

Soit

(5) $$\frac{j_g}{n} = [0, a_1^g, a_2^g, \ldots, a_{s_g}^g], \quad s_g \equiv 0 \pmod 2$$

le développement en fraction continue de j_g/n. D'après le lemme, on obtient ainsi

(6) $$nx = \left[na_0, a_1, a_1^1, \ldots, a_{s_1}^1, x_2 - \frac{q^2}{n}\right]$$

où l'entier q^2 vérifie $0 < q^2 < n$ (q^2 est le dénominateur de $[0, a_1^1, \ldots, a_{s_1-1}^1]$). Dans (6), remplaçons x_2 par $a_2 + \frac{i_2}{n} + \frac{1}{n^2x_3}$. Alors

$$x_2 - \frac{q^2}{n} = a_2 + \frac{i_2 - q^2}{n} + \frac{1}{n^2x_3}.$$

L'entier $i_2 - q^2$ vérifie $-n \leqslant i_2 - q^2 < n$. On pose $\delta_2 = 0$ si $0 \leqslant i_2 - q^2 < n$ et $\delta_2 = 1$ si $-n \leqslant i_2 - q^2 < 0$. On définit aussi $j_2 = i_2 - q^2 + n\delta_2$ de sorte que

$$x_2 - \frac{q^2}{n} = a_2 - \delta_2 + \frac{j_2}{n} + \frac{1}{n^2x_3}.$$

D'après la condition C_1, $a_2 - \delta_2 \geqslant 1$ et d'après la condition C_2, $(j_2, n) = 1$. Le lemme nous permet alors d'écrire

(7) $$nx = \left[na_0, a_1, a_1^1, \ldots, a_{s_1}^1, a_2 - \delta_2, a_1^2, \ldots, a_{s_2}^2, x_3 - \frac{q^3}{n}\right].$$

Comme précédemment, on remplace x_3 par $a_3 + \frac{i_3}{n} + \frac{1}{n^2x_4}$. Le processus se développe identiquement. Il se termine au moment où l'on substitue à x_k le rationnel $a_k + \frac{i_k}{n}$. On obtient ainsi le développement de nx écrit sous forme symbolique

(8)
$$nx = \left[na_0, a_1, \left[\frac{j_1}{n}\right]^*, a_2 - \delta_2, \left[\frac{j_2}{n}\right]^*, \ldots, a_{k-1} - \delta_{k-1}, \left[\frac{j_{k-1}}{n}\right]^*, a_k - \delta_k, \left[\frac{j_k}{n}\right]\right],$$

expression dans laquelle $[\xi]^*$ signifie qu'il faut écrire le développement en fraction continue de profondeur paire de ξ et où $[\xi]$ désigne la fraction continue ordinaire de ξ, (on omet le 0, premier terme du développement de ξ). Cette expression permet donc d'écrire explicitement le développement de nx. De plus elle montre que

(9)
$$\psi(nx) = \left(1 + \psi^*\left(\frac{j_1}{n}\right)\right) + \left(1 + \psi^*\left(\frac{j_2}{n}\right)\right) + \ldots + \left(1 + \psi^*\left(\frac{j_{k-1}}{n}\right)\right) + \left(1 + \psi\left(\frac{j_k}{n}\right)\right).$$

Donc

$$\psi(nx) \leqslant (1+K^*(n))k - \varepsilon(n). \tag{10}$$

Ceci est bien l'inégalité annoncée dans le théorème. De plus, il est clair que l'on peut choisir $j_1, j_2, \ldots, j_k$ de façon à ce que $\psi^*\left(\frac{j_g}{n}\right) = K^*(n)$ pour $g = 1, 2, \ldots, k$. Il nous reste à montrer en quoi les conditions C_1 et C_2 ne sont pas restrictives.

Condition C_1. Supposons que pour un indice g, on ait $a_g = 1$. La formule (8) reste valable, un des termes étant $a_g - \delta_g = 1-\delta_g$. Si $\delta_g = 0$, rien n'est changé au développement (8). Si $\delta_g = 1$, alors un des termes devient 0 et la fraction continue (8) „perd deux étages" car

$$\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{0+\cfrac{1}{c}}}} = \cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+c}}.$$

Supposons maintenant que $a_g = 0$. Appelons t la profondeur de nx écrit formellement selon la formule (8). En d'autres termes,

$$t = \left(1+\psi^*\left(\frac{j_1}{n}\right)\right) + \ldots + \left(1+\psi^*\left(\frac{j_{k-1}}{n}\right)\right) + \left(1+\psi\left(\frac{j_k}{n}\right)\right).$$

Si $\delta_g = 0$ ($a_g - \delta_g = 0$), la fraction continue (8) „perd deux étages" comme précédemment. Supposons alors que $\delta_g = +1$ ($a_g - \delta_g = -1$). Ainsi nx s'écrit sous la forme

$$nx = [a_0, \ldots, a_{\nu-1}, -1, a_{\nu+1}, \ldots, a_t] \tag{11}$$

où les a_j sont des entiers. Mais ceci s'écrit aussi

$$nx = [a_0, \ldots, a_{\nu-1}-2, +1, a_{\nu+1}-2, \ldots, a_t]$$

de sorte que si tous les termes (autre que a_0) sont non négatifs, on a encore $\psi(nx) \leqslant t$. L'inégalité (10) reste inchangée. Remarquons que $a_{\nu-1}$ et $a_{\nu+1}$ sont tous deux égaux à 1 au moins (car deux éléments qui encadrent $a_g - \delta_g$ ont cette propriété). Supposons alors que $a_{\nu-1}-2 = -1$ ou $a_{\nu+1}-2 = -1$ (ce sont les deux seuls cas qui restent à étudier). Dans les deux formules

$$[\ldots, a_{\nu-2}, +1, -1, a_{\nu+1}, \ldots] = [\ldots, a_{\nu-2}+1-a_{\nu+1}-, +a_{\nu+2}, \ldots],$$
$$[\ldots, a_{\nu-1}, -1, +1, a_{\nu+2}, a_{\nu+3}, \ldots] = [\ldots, a_{\nu-1}-1-a_{\nu+2}-, +a_{\nu+3}, \ldots]$$

les membres de droites ont $t-3$ étages. (Le symbole $[\ldots, a-, b, c, \ldots]$ signifie $\ldots + \frac{1|}{|a} - \frac{1|}{|b} + \frac{1|}{|c} + \ldots$). Dans les deux cas, les membres de droites sont de la forme

$$[\ldots, a, b-, c, d, \ldots].$$

Si $b = -b' < 0$, on écrit:

$$[\ldots, a-, b', c, d, \ldots]$$

de sorte que les deux formes sont analogues (si $b = 0$, deux étages à nouveau disparaissent).

Notons que si $\xi = [0, a, \beta, \ldots]$, alors $1-\xi = [0, 1, a-1, \beta, \ldots]$ si $a > 1$ et $1-\xi = [0, 1+\beta, \ldots]$ si $a = 1$. Donc $\psi(-\xi) \leqslant 1+\psi(\xi)$. Appliquée à $\xi = [0, c, d, \ldots]$ et à $\xi = [0, b', c, d, \ldots]$, l'inégalité montre que $\psi(nx) \leqslant 1+t-3 < t$. Ainsi, l'inégalité (10) reste vérifiée même si l'on abandonne la condition C_1.

Dans ce raisonnement, on a supposé que $a_g - \delta_g = -1$ pour un seul indice g. Ainsi dans (11), tous les éléments $a_1, \ldots, a_{\nu-1}, a_{\nu+1}, \ldots, a_t$ sont positifs. Si cela n'était pas le cas, disons $a_{g_1} - \delta_{g_1} = \ldots = a_{g_r} - \delta_{g_r} = -1$ ($g_1 < g_2 < \ldots < g_r$), on raisonnerait comme précédemment en commençant par l'élément $a_{g_r} - \delta_{g_r}$ puis en remontant la chaîne.

Condition C_2. Supposons maintenant que pour un indice g, on ait $(j_g, n) = d > 1$, et plus précisément, supposons que $(j_1, n) = (j_2, n) = \ldots = (j_{g-1}, n) = 1$. Alors d'après notre algorithme et d'après le corollaire du lemme, on a

$$nx = \left[na_0, a_1, \left[\frac{j_1}{n}\right]^*, a_2-\delta_2, \left[\frac{j_2}{n}\right]^*, \ldots, a_g-\delta_g, \left[\frac{j_g}{n}\right]^*, d^2x_{g+1} - d\frac{q^{g+1}}{n}\right]. \tag{12}$$

Puis on pose $x_{g+1} = a_{g+1} + \frac{i_{g+1}}{n} + \frac{1}{n^2 x_{g+2}}$ de sorte que

$$d^2 x_{g+1} - d\frac{q^{g+1}}{n} = d^2 a_{g+1} + \frac{di_{g+1} - q^{g+1}}{m} + \frac{1}{m^2 x_{g+2}}$$

où $m = \frac{n}{d}$. On voit alors que le processus se continue comme auparavant, à la différence près que n est remplacé par un diviseur m. Comme alors $K(m) \leqslant K(n)$, on voit que l'inégalité (10) persiste. Ceci achève la démonstration du théorème.

Démonstration du corollaire. Il s'agit de prouver l'inégalité

$$\psi(nx) \geqslant \frac{\psi(x)-1+\varepsilon(n)}{K(n)+1+\varepsilon(n)} - 1.$$

Soit h la fonction définie sur les réels positifs par $h(1) = 0$, $h(x) = +1$ si $0 < x < 1$ et $h(x) = -1$ si $x > 1$. Remarquons que $\psi(x) = \psi\left(\frac{1}{x}\right) + h(x)$. D'après le théorème, on a

$$\psi(x) \leqslant \big(1+K(n)+\varepsilon(n)\big)\psi\left(\frac{x}{n}\right) - \varepsilon(n)$$

pour tout x rationnel positif. Par suite

$$\psi\left(\frac{1}{x}\right) + h(x) \leqslant \big(1+K(n)+\varepsilon(n)\big)\left(\psi\left(\frac{n}{x}\right) + h\left(\frac{x}{n}\right)\right) - \varepsilon(n).$$

Remplaçons x par $\frac{1}{x}$.

$$\psi(x) + h\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant \big(1+K(n)+\varepsilon(n)\big)\left(\psi(nx) + h\left(\frac{1}{nx}\right)\right) - \varepsilon(n).$$

On en déduit

$$\psi(nx) \geqslant \frac{\psi(x) + h\left(\frac{1}{x}\right) + \varepsilon(n)}{K(n)+1+\varepsilon(n)} - h\left(\frac{1}{nx}\right),$$

d'où l'inégalité annoncée.

§ 4. Remarques finales. Un certain nombre de travaux ont trait à la fonction ψ ou à des fonctions analogues. Nous avons dressé la liste de ces articles (voir ci-dessous). A cela, il faut ajouter un résultat d'Yves Pourchet (non publié) qui répond à une de mes questions:

Soient $\lambda \neq 0$ et x deux nombres rationnels tels que $\sup_{n\in N} \psi(\lambda x^n) < \infty$. Alors ou bien x est entier, ou bien $\frac{1}{x}$ est entier.

En fait, Pourchet démontre plus précisément que si x n'est ni entier, ni inverse d'entier, alors $\psi(\lambda x^n)$ tend vers l'infini.

Additif: Récemment, H. Cohen a résolu le problème analogue relatif à la longueur de la période du développement en fraction continue d'un nombre quadratique réel (C. R. A. S., Paris, 1973, à paraître).

Bibliographie

[1] J. D. Dixon, *The number of steps in the Euclidean algorithm*, Journal of Number Theory 2 (1970), p. 414–422.

[2] — *A simple estimate for the number of steps in the Euclidean algorithm*, Amer. Math. Monthly 78 (1971), p. 374–376.

[3] H. Heilbronn, *On the average length of a class of finite continued fractions*, Abhandlungen aus Zahlentheorie und Analysis, Berlin 1968, p. 87–96 (édité par Turán en souvenir de Landau).

[4] G. Lamé, *Note sur la limite du nombre des divisions dans la recherche du plus grand commun diviseur entre deux entiers*, C.R.A.S., Paris, 19 (1844), p. 867–870.

[5] J. Mikusiński, *Sur certaines fractions continues finies*, Ann. Polon. Math. 1 (1954), p. 203–206.

[6] A. Schinzel, *On some problems of the arithmetical theory of continued fractions*, Acta Arith. 6 (1961), p. 393–413.

[7] — *On some problems of the arithmetical theory of continued fractions II*, Acta Arith. 7 (1962), p. 287–298.

U.E.R. DE MATHÉMATIQUES ET D'INFORMATIQUE
UNIVERSITÉ DE BORDEAUX 1
33–Talence, France

Reçu le 26. 4. 1972 (276)