Literatur

[1] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, vol. I, 3rd ed., New York 1968.

[2] R. Fischer, *Ergodische Eigenschaften komplexer Ziffernentwicklungen*, Sitzungsber. der Österr. Akad.d.Wiss., math.-naturw. Kl. Abt. II, 180 (1971), S. 49–68.

[3] W. Parry, *On the β-expansions of real numbers*, Acta Math. Hung. 11 (1960), S. 401–416.

[4] W. Philipp, *Mischungseigenschaften gewisser auf dem Torus definierter Endomorphismen*, Math. Zeitschr. 101 (1967), S. 369–374.

[5] — *Ein zentraler Grenzwertsatz mit Anwendungen auf die Zahlentheorie*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 8 (1967), S. 185–203.

[6] F. Schweiger, *Metrische Theorie einer Klasse zahlentheoretischer Transformationen*, Acta Arith. 15 (1968), S. 1–18; ibid. 17 (1969), S. 217–219.

[7] M. S. Waterman, *Some ergodic properties of multi-dimensional F-expansions*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 16 (1970), S. 77–103.

MATHEMATISCHES INSTITUT DER UNIVERSITÄT SALZBURG

Eingegangen 16. 12. 1971 (245)

ACTA ARITHMETICA
XXIII (1973)

Über verallgemeinerte Bernoullische Zahlen und die Klassenzahl reell-quadratischer Zahlkörper

von

HEINRICH LANG (Köln)

Es sei Ω ein reell-quadratischer Zahlkörper mit der Diskriminante $d > 0$. Die Zetafunktion einer absoluten Idealklasse $\mathfrak{K}$ von Ω werde mit $\zeta(s|\mathfrak{K})$ und die L-Funktion einer engeren Idealklasse $\mathfrak{K}_\infty$ von Ω mit $L(s|\mathfrak{K}_\infty)$ bezeichnet. Für natürliche Argumente $k \geqslant 2$ werde $\mathfrak{K}_k = \mathfrak{K}$ oder $\mathfrak{K}_k = \mathfrak{K}_\infty$ gesetzt, je nachdem k gerade oder ungerade ist. Dann sind die Werte

$$(1)\qquad B(k|\mathfrak{K}_k) = \begin{cases} \dfrac{4(2k)!\,d^k}{(2\pi)^{2k}\sqrt{d}}\,\zeta(k|\mathfrak{K}), & \text{falls } k \text{ gerade ist,} \\[2ex] \dfrac{4(2k)!\,d^k}{(2\pi)^{2k}\sqrt{d}}\,L(k|\mathfrak{K}_\infty), & \text{falls } k \text{ ungerade ist,} \end{cases}$$

rationale Zahlen [2], [4], [5], [9], [10], [11]. Es zeigt sich nun, daß man aus der genaueren Kenntnis der arithmetischen Struktur dieser rationalen Zahlen zu Aussagen über die Klassenzahl h von Ω gelangen kann.

Ist $2k+1 = p > 3$ eine Primzahl, so besteht für diese eine Partialbruchzerlegung von $B(k|\mathfrak{K}_k) = B\left(\frac{p-1}{2}\middle|\mathfrak{K}_{\frac{p-1}{2}}\right)$. Es gilt nämlich [6]:

Geht die Primzahl $p > 3$ nicht in der Diskriminante d von Ω auf, so ist $B\left(\frac{p-1}{2}\middle|\mathfrak{K}_{\frac{p-1}{2}}\right)$ eine für p ganze rationale Zahl. Ist dagegen $p > 3$ ein Primteiler der Diskriminante d von Ω, so hat man

$$(2)\qquad pB\left(\frac{p-1}{2}\middle|\mathfrak{K}_{\frac{p-1}{2}}\right) \equiv -(-1)^{\frac{p-1}{2}}\frac{N(\varepsilon)uv}{4}X_p(\mathfrak{K}_{\frac{p-1}{2}}) \bmod p \qquad (p>3,\ p\,|\,d).$$

Hierbei bedeutet $\varepsilon = \frac{1}{2}(u+v\sqrt{d}) > 1$ die Grundeinheit von Ω und X_p einen Geschlechtscharakter, der mit Hilfe des Kroneckersymbols folgendermaßen erklärt ist.

$p^* = (-1)^{\frac{p-1}{2}} p$ ist eine Primdiskriminante eines quadratischen Zahlkörpers, die d teilt. Sei $d = p^* d^*$. Für ein beliebiges Primideal $\mathfrak{q}$ von Ω gilt dann

$$X_p(\mathfrak{q}) = \begin{cases} \left(\dfrac{p^*}{\mathfrak{N}(\mathfrak{q})}\right) & \text{für} \quad p \nmid \mathfrak{N}(\mathfrak{q}), \\ \left(\dfrac{d^*}{\mathfrak{N}(\mathfrak{q})}\right) & \text{für} \quad p \mid \mathfrak{N}(\mathfrak{q}). \end{cases} \tag{3}$$

Durch die multiplikative Eigenschaft der Charaktere ist damit $X_p(\mathfrak{a})$ für alle Ideale $\mathfrak{a}$ von Ω festgelegt.

Für die Zahl $1+\sqrt{d}$ mit negativer Norm, $N(1+\sqrt{d}) = 1-d < 0$, findet man

$$X_p((1+\sqrt{d})) = \left(\frac{p^*}{d-1}\right) = \left(\frac{d-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}. \tag{4}$$

Daraus folgt, daß für $\dfrac{p-1}{2} \equiv 0 \bmod 2$ der Wert $X_p(\mathfrak{a})$ nur von der absoluten Klasseneinteilung der Ideale von Ω abhängt, so daß die Festsetzung

$$X_p(\mathfrak{K}_{\frac{p-1}{2}}) = X_p(\mathfrak{a}), \quad \text{falls } \mathfrak{a} \text{ aus } \mathfrak{K}_{\frac{p-1}{2}} \text{ ist,}$$

sinnvoll ist.

Man betrachte jetzt die mit dem Charakter X_p gebildete L-Reihe

$$L(s|X_p) = \sum_{\mathfrak{a}\,\text{ganz}} \frac{X_p(\mathfrak{a})}{\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^s}.$$

Dazu erweist es sich als zweckmäßig, die Fälle $p \equiv 1 \bmod 4$ und $p \equiv 3 \bmod 4$ zu unterscheiden.

Da X_p im Fall $\dfrac{p-1}{2} \equiv 0 \bmod 2$, d.h. $p \equiv 1 \bmod 4$, nur von der absoluten Klasseneinteilung von Ω abhängt, hat man

$$L(s|X_p) = \sum_{\mathfrak{K}} X_p(\mathfrak{K})\, \zeta(s|\mathfrak{K}) \qquad (p|d,\ p \equiv 1 \bmod 4), \tag{5}$$

wobei über alle absoluten Idealklassen $\mathfrak{K}$ von Ω zu summieren ist. Nun ist X_p^2 der Hauptcharakter. Also folgt aus (1), (2) und (5) die Kongruenz

$$-\frac{N(\varepsilon)uv}{4} h \equiv p \frac{4(p-1)!\, d^{\frac{p-1}{2}}}{(2\pi)^{p-1}\sqrt{d}} L\left(\frac{p-1}{2} \,|\, X_p\right) \bmod p \tag{6}$$
$$(p|d,\ p \equiv 1 \bmod 4)$$

für die absolute Klassenzahl h von Ω.

Im Fall $p \equiv 3 \bmod 4$ folgt aus $p|d$, daß die Norm $N(\varepsilon)$ der Grundeinheit $\varepsilon > 1$ von Ω notwendig positiv ist [3], p. 303. Die engere Klassenzahl h_0 ist dann das Doppelte der absoluten Klassenzahl h, $h_0 = 2h$. Außerdem ist gemäß (4)

$$X_p((1+\sqrt{d})) = -1.$$

Der zu X_p gehörige Führer ist also p_∞. Dann besteht die Gleichung [2], [8]:

$$L(s|X_p) = \tfrac{1}{2} \sum_{\mathfrak{K}_\infty} X_p(\mathfrak{K}_\infty) L(s|\mathfrak{K}_\infty) \qquad (p|d,\ p \equiv 3 \bmod 4), \tag{7}$$

wobei über alle engeren Idealklassen $\mathfrak{K}_\infty$ von Ω zu summieren ist. Wie oben folgt aus $X_p^2 = 1$ und (1), (2) sowie (7) die Kongruenz

$$\frac{N(\varepsilon)uv}{4} \frac{h_0}{2} \equiv p \frac{4(p-1)!\, d^{\frac{p-1}{2}}}{(2\pi)^{p-1}\sqrt{d}} L\left(\frac{p-1}{2} \,|\, X_p\right) \bmod p \tag{8}$$
$$(p > 3,\ p|d,\ p \equiv 3 \bmod 4)$$

für die engere Klassenzahl h_0 von Ω.

Da $h_0 = 2h$ ist, erhält man aus (6) und (8) unabhängig von der eben durchgeführten Fallunterscheidung:

$$-\frac{N(\varepsilon)uv}{4} h \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} p \frac{4(p-1)!\, d^{\frac{p-1}{2}}}{(2\pi)^{p-1}\sqrt{d}} L\left(\frac{p-1}{2} \,|\, X_p\right) \bmod p \tag{9}$$
$$(p > 3,\ p|d).$$

Um den Wert $L\left(\dfrac{p-1}{2} \,|\, X_p\right)$ genauer beschreiben zu können, beachte man, daß nach Dirichlet die Zerlegung

$$L(s|X_p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{p^*}{n}\right)}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{d^*}{n}\right)}{n^s} \tag{10}$$

in ein Produkt zweier rationaler L-Reihen besteht. Hierdurch wird man zu verallgemeinerten Bernoullischen Zahlen geführt, die folgendermaßen erklärt sind [7]:

Sei χ ein Restklassencharakter vom Führer f. Dann werden die zu dem Charakter χ gehörigen Bernoullischen Zahlen $B_\chi^{(k)}$ durch die erzeugende Funktion

$$\sum_{j=1}^{f} \chi(j) \frac{te^{jt}}{e^{ft}-1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_\chi^{(k)} \frac{t^k}{k!}$$

definiert. Diese verallgemeinerten Bernoullischen Zahlen liegen in dem durch die Werte von χ bestimmten Einheitswurzelkörper. Wenn $f = 1$, also wenn χ der Hauptcharakter ist, stimmen sie mit den gewöhnlichen Bernoullischen Zahlen überein.

Sei $\chi(-1) = (-1)^r$ mit $r = 0$ oder $r = 1$. Für $k \equiv r \bmod 2$ treten die verallgemeinerten Bernoullischen Zahlen $B_\chi^{(k)}$ als Werte von Dirichletschen L-Reihen auf. Es gilt [7]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^k} = (-1)^{\frac{k-r}{2}+1} \frac{\tau(\chi)(2\pi)^k}{i^r 2 f^k k!} B_{\bar{\chi}}^{(k)} \qquad (k \geqslant 1,\ k \equiv r \bmod 2), \tag{11}$$

wobei $\bar{\chi}$ den zu χ konjugiert-komplexen Charakter und $\tau(\chi)$ die χ zugeordnete Gaußsche Summe bedeutet.

Die durch die Kroneckersymbole $\left(\frac{p^*}{n}\right)$ und $\left(\frac{d^*}{n}\right)$ gegebenen reellen Restklassencharaktere seien mit χ_{p^*} und χ_{d^*} bezeichnet:

$$\chi_{p^*}(n) = \left(\frac{p^*}{n}\right), \qquad \chi_{d^*}(n) = \left(\frac{d^*}{n}\right) \qquad \left(p^* = (-1)^{\frac{p-1}{2}} p,\ d = p^* d^*\right). \tag{12}$$

Die Führer dieser Charaktere sind $p = |p^*|$ und $d/p = |d^*|$. An der Stelle -1 haben sie den Wert

$$\chi_{p^*}(-1) = \chi_{d^*}(-1) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} = \operatorname{sgn} p^* = \operatorname{sgn} d^*,$$

und ihre zugehörigen Gaußschen Summen sind

$$\tau(\chi_{p^*}) = i^r \sqrt{p} \qquad \text{und} \qquad \tau(\chi_{d^*}) = i^r \sqrt{|d^*|}.$$

Die Gleichungen (10) und (11) ergeben also die Darstellung

$$L\left(\frac{p-1}{2} \,\Big|\, X_p\right) = \frac{(2\pi)^{p-1}\sqrt{d}}{4\left(\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right)^2 d^{\frac{p-1}{2}}} B_{\chi_{p^*}}^{\left(\frac{p-1}{2}\right)} B_{\chi_{d^*}}^{\left(\frac{p-1}{2}\right)} \qquad (p \geqslant 3) \tag{13}$$

von $L\left(\frac{p-1}{2} \,|\, X_p\right)$ durch verallgemeinerte Bernoullische Zahlen. Aus der von H. W. Leopoldt [7] bewiesenen Partialbruchzerlegung dieser Zahlen weiß man:

$$p B_{\chi_{p^*}}^{\left(\frac{p-1}{2}\right)} \equiv -1 \bmod p, \tag{14}$$

während $B_{\chi_{d^*}}^{\left(\frac{p-1}{2}\right)}$ ganz für p ist. Beachtet man noch

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}} (p-1)! \equiv \left(\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right)^2 \bmod p,$$

so bekommt man aus (9), (13) und (14) den

Satz. *Es sei Ω ein reell-quadratischer Zahlkörper mit der Diskriminante $d > 0$ und der Grundeinheit $\varepsilon = \frac{1}{2}(u + v\sqrt{d}) > 1$. Sei weiter $p > 3$ ein Primteiler der Diskriminante d, und es sei $d^* = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \frac{d}{p}$ gesetzt. Dann besteht für die absolute Klassenzahl h von Ω die Kongruenz*

$$\frac{N(\varepsilon)uv}{4} h \equiv B_{\chi_{d^*}}^{\left(\frac{p-1}{2}\right)} \bmod p \qquad (p > 3,\ p \mid d), \tag{15}$$

wobei $B_{\chi_{d^*}}^{\left(\frac{p-1}{2}\right)}$ die zu dem durch (12) *gegebenen Charakter χ_{d^*} gehörige verallgemeinerte $\frac{p-1}{2}$-te Bernoullische Zahl bedeutet.*

Unter der schärferen Voraussetzung $p > d/p$ findet man dieses Resultat schon in [1], wo es aus der Klassenzahlformel für reell-quadratische Zahlkörper mit Hilfe von Sätzen über den p-adischen Logarithmus gewonnen wurde.

Wegen der Gültigkeit der Pellschen Gleichung $u^2 - v^2 d = 4N(\varepsilon)$ geht der Primteiler $p > 3$ von d sicher nicht in u auf. Beachtet man noch die Tatsache

$$h < \sqrt{d},$$

für die man in [12] einen kurzen Beweis findet, so ergibt sich als unmittelbare Folgerung aus obigem Satz ein Spezialfall eines von I. Sh. Slavutsky [12] gefundenen Resultats, nämlich der

Satz. *Ist $p > 3$ ein Primteiler der Diskriminante d des reell-quadratischen Zahlkörpers Ω, und ist $p > d/p$, so geht p genau dann in der Komponente v der Grundeinheit $\varepsilon = \frac{1}{2}(u + v\sqrt{d}) > 1$ von Ω auf, wenn die Kongruenz*

$$B_{\chi_{d^*}}^{\left(\frac{p-1}{2}\right)} \equiv 0 \bmod p$$

erfüllt ist.

Literatur

[1] N. C. Ankeny, E. Artin, and S. Chowla, *The class-number of real quadratic number fields*, Ann. of Math. 56 (1952), S. 479–493.

[2] K. Barner, *Über die Werte der Ringklassen-L-Funktionen reell-quadratischer Zahlkörper an natürlichen Argumentstellen*, J. Number Theory, 1 (1) (1969), S. 28–64.

[3] H. Hasse, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, Berlin-Göttingen-Heidelberg-New York 1964.

[4] H. Klingen, *Über die Werte der Dedekindschen Zetafunktion*, Math. Ann. 145 (1962), S. 265–272.

[5] H. Lang, *Über eine Gattung elementar-arithmetischer Klasseninvarianten reell-quadratischer Zahlkörper*, J. Reine Angew. Math. 233 (1968), S. 123–175.

[6] H. Lang, *Über Bernoullische Zahlen in reell-quadratischen Zahlkörpern*, Acta Arith. 22 (1973), S. 423–437.

[7] H. W. Leopoldt, *Eine Verallgemeinerung der Bernoullischen Zahlen*, Abh. math. Sem. Univ. Hamburg 22 (1958), S. 131–140.

[8] C. Meyer, *Die Berechnung der Klassenzahl abelscher Körper über quadratischen Zahlkörpern*, Berlin 1957.

[9] — *Über die Bildung von elementar-arithmetischen Klasseninvarianten in reell-quadratischen Zahlkörpern. Algebraische Zahlentheorie.* Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, Berichte Heft 2 (1966), S. 165–215.

[10] C. L. Siegel, *Bernoullische Polynome und quadratische Zahlkörper*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. (1968), S. 7–38.

[11] — *Berechnung von Zetafunktionen an ganzzahligen Stellen*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. (1969), S. 87–102.

[12] I. Sh. Slavutsky, *On Mordell's theorem*, Acta Arith. 11 (1965), S. 57–66.

MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Eingegangen 11. 2. 1972 (264)

ACTA ARITHMETICA
XXIII (1973)

Propriétés arithmétiques des valeurs de fonctions méromorphes algébriquement indépendantes

par

MICHEL WALDSCHMIDT (Talence)

L'étude des valeurs algébriques de fonctions méromorphes algébriquement indépendantes, commencée par Schneider et poursuivie par Lang et Ramachandra, permet d'obtenir des propriétés de transcendance, concernant en particulier les fonctions exponentielles et elliptiques. Nous continuerons cette étude, et nous rechercherons une généralisation permettant d'obtenir des propriétés d'indépendance algébrique de fonctions méromorphes, complexes ou p-adiques, d'une ou plusieurs variables. Nous appliquerons ces résultats aux sous-groupes à un ou plusieurs paramètres de variétés de groupes, linéaires ou abéliennes. Nous obtiendrons également de nouveaux énoncés de transcendance concernant en particulier les fonctions zêta de Weierstrass.

§ 1. INTRODUCTION. VALEURS ALGÉBRIQUES DE FONCTIONS MÉROMORPHES

Pour généraliser les théorèmes de transcendance ou d'indépendance algébrique concernant la fonction exponentielle, et obtenir des résultats sur les valeurs algébriques ou algébriquement dépendantes de fonctions méromorphes, il est utile d'expliciter les propriétés particulières de la fonction exponentielle qui ont été utilisées. Il s'agit essentiellement du théorème d'addition algébrique: $\exp(x+y) = \exp x\cdot\exp y$ (par exemple dans la solution par Schneider du septième problème de Hilbert sur la transcendance de a^b), ou bien de l'existence d'une équation différentielle: $(\exp x)' = \exp x$ (par exemple dans la méthode de Gel'fond pour la résolution du même problème), ou encore de ces deux propriétés simultanément. On peut alors envisager une extension de la méthode pour rechercher une majoration du nombre de points où deux fonctions algébriquement indépendantes prennent simultanément des valeurs algébriques. Ceci a été fait par Schneider pour la méthode de Gel'fond, dans le cas où les fonctions considérées satisfont une équation différentielle à coefficients al-