n	$p_r(n)$	$p_t(n)$	n	$p_r(n)$	$p_t(n)$	n	$p_r(n)$	$p_t(n)$
1	1	1	35	12327	10167	69	3088740	2681279
2	2	2	36	15272	12942	70	3566804	3108267
3	3	3	37	17978	14885	71	4087969	3554347
4	5	5	38	22024	18575	72	4713747	4115608
5	6	5	39	26095	21755	73	5392784	4697207
6	11	11	40	31730	26901	74	6203668	5422553
7	12	9	41	37339	31187	75	7091218	6188422
8	20	19	42	45333	38522	76	8140291	7126355
9	25	20	43	53175	44585	77	9289145	8118342
10	37	32	44	64100	54528	78	10647924	9335761
11	43	32	45	75340	63512	79	12132165	10619865
12	70	65	46	90138	76763	80	13880556	12185788
13	78	58	47	105559	89136	81	15798937	13852620
14	114	95	48	126270	108049	82	18041667	15858850
15	143	113	49	147285	124771	83	20506256	18004329
16	196	168	50	175137	149845	84	23386871	20587753
17	232	178	51	204460	173883	85	26543897	23338831
18	330	281	52	241983	207554	86	30220533	26632830
19	386	299	53	281590	239945	87	34266683	30173383
20	530	448	54	332697	286056	88	38951788	34371349
21	641	510	55	386203	330001	89	44108110	38887675
22	836	691	56	454418	391324	90	50076165	44243117
23	1003	794	57	527211	451876	91	56634262	49996055
24	1340	1143	58	617874	532847	92	64202500	56786909
25	1581	1264	59	715221	614156	93	72539414	64121495
26	2037	1691	60	837115	723965	94	82115737	72712079
27	2461	1995	61	966468	831822	95	92670111	82010781
28	3127	2621	62	1127111	975601	96	104784531	92895883
29	3719	3012	63	1300819	1122546	97	118114305	104651421
30	4746	3998	64	1512537	1311830	98	133378317	118364000
31	5605	4567	65	1741713	1505621	99	150206552	133244744
32	7038	5921	66	2021752	1756710	100	169405505	150497338
33	8394	6908	67	2323521	2012560			
34	10376	8705	68	2690068	2340756			

References

[1] L. M. Chawla, M. O. LeVan and I. E. Maxfield, *On a restricted partition function and its tables* (to be published).

[2] G. H. Hardy and S. Ramanujan, *Asymptotic formulae in combinatory analysis*, Proc. London Math. Soc. 17 (2) (1918), pp. 75–115.

[3] S. Ramanujan, *Collected papers*, Nos. 25, 28, 30.

Received on 19. 8. 1971

ACTA ARITHMETICA
XXIII (1973)

Mischungsgeschwindigkeit für Ziffernentwicklungen nach reellen Matrizen

von

ROLAND FISCHER (Salzburg)

§ 1. Definitionen. $I = (0,1)^d$ sei der Einheitswürfel des $\boldsymbol{R}^d$, $\mathscr{F}$ die σ-Algebra der Borelschen Teilmengen von I, m das d-dimensionale Lebesgue-Maß auf I. A sei eine nichtsinguläre reelle $(d\times d)$-Matrix, Δ der Betrag ihrer Determinante.

Wir definieren:

(a) $T\colon I\to I$, $Tx = Ax \bmod 1$,

(b) Ist $x\in\boldsymbol{R}$, so sei $[x]$ die größte ganze Zahl $\leqslant x$ und für

$$x = (x_1, \ldots, x_d)\in\boldsymbol{R}^d \quad \text{sei} \quad [x] = ([x_1], \ldots, [x_d])\in\boldsymbol{Z}^d.$$

Weiter sei $M = A\cdot I\cap\boldsymbol{Z}^d$. Für $i = 1, 2, \ldots$ erklären wir Funktionen $k_i\colon I\to M$

$$k_1(x) = [Ax], \qquad k_i(x) = k_1(T^{i-1}x).$$

(c) Sind $a_1, a_2, \ldots, a_s\in M$, so sei

$$I(a_1, \ldots, a_s) = \{x\in I \mid k_i(x) = a_i,\ 1\leqslant i\leqslant s\},$$

sofern die rechte Menge nicht leer ist. Die Mengen $I(a_1, \ldots, a_s)$ heißen Zylinder s-ter Ordnung und bilden eine Partition von I, die wir mit $\mathscr{I}_s$ bezeichnen wollen.

(d) Wir definieren folgende Teilmengen von $\mathscr{I}_s$:

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}_s &= \{E\in\mathscr{I}_s \mid T^s E = I\},\\
\mathscr{C}_s &= \mathscr{I}_s\setminus\mathscr{A}_s,\\
\mathscr{D}_s &= \{I(a_1, \ldots, a_s)\in\mathscr{I}_s \mid I(a_1)\in\mathscr{C}_1, I(a_1, a_2)\in\mathscr{C}_2, \ldots, I(a_1, \ldots, a_s)\in\mathscr{C}_s\},\\
\mathscr{B}_s &= \{I(a_1, \ldots, a_s)\in\mathscr{A}_s \mid I(a_1, \ldots, a_{s-1})\in\mathscr{D}_{s-1}\}.
\end{aligned}$$

(e) Es sei

$$\beta_s = \operatorname{card}\mathscr{B}_s, \qquad \delta_s = \operatorname{card}\mathscr{D}_s, \qquad B_s = \bigcup_{E\in\mathscr{B}_s} E, \qquad D_s = \bigcup_{E\in\mathscr{D}_s} E.$$

Wir machen folgende Voraussetzung: Es gebe Konstante $M > 0$ und $K > 1$, sodaß

(1) $$\delta_n \Lambda^{-n} \leqslant M \cdot K^{-n} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

gelte.

Diese Voraussetzung ist bei den folgenden Beispielen stets erfüllt:

A. $I = (0, 1)$, $\Lambda = \beta > 1$. (Resttransformation bei β-adischen Ziffernentwicklungen, [3].)

B. $I = (0, 1)^2$, $A = \begin{pmatrix} r & q \\ -q & r \end{pmatrix}$, $\Lambda = r^2 + q^2 > 4(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2$ ([2]). (Resttransformation bei komplexen Ziffernentwicklungen.)

C. $I = (0, 1)^d$, A symmetrisch, alle Eigenwerte von A seien größer als $d \cdot 2^{d+1}$ ([4]).

§ 2. Ein Kuzminscher Satz. Wir setzen

(2) $$\varphi_0(x) = 1, \quad \varphi_i(x) = \Lambda^{-i} \sum_{Ty=x} \chi_{D_i}(y) \quad (i = 1, 2, \ldots; x \in I),$$

(3) $$\tau = \int_I \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i(x)\, dm = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} m(D_i),$$

(4) $$\sigma(x) = \tau^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i(x) \in L_1(I, m).$$

Dann ist $\sigma(x)$ Dichte eines zu m äquivalenten bezüglich T invarianten Wahrscheinlichkeitsmaßes μ (siehe [4]). Eine Funktion $h(x) \in L_1(I, m)$ ist aber genau dann Dichte eines bezüglich T invarianten Maßes, wenn $h(x)$ die Kuzminsche Gleichung

(5) $$h(x) = \sum_{Ty=x} h(y) \Lambda^{-1} \quad \text{f.ü.}$$

erfüllt ([2]). Wir wollen nun zeigen: $\sigma(x)$ ist Grenzwert einer Folge $(h_n(x))_{n \in N}$ von Funktionen, die man, durch die Kuzminsche Gleichung motiviert, folgendermaßen definiert:

(6) $$h_0(x) = 1, \quad h_n(x) = \sum_{Ty=x} h_{n-1}(y) \Lambda^{-1} = \sum_{T^n y=x} \Lambda^{-n}.$$

SATZ 1. *Es gibt Konstante $C_1 > 0$ und $\varrho > 1$, sodaß gilt:*

$$|h_n(x) - \sigma(x)| \leqslant C_1 \varrho^{-n} \quad (n = 1, 2, \ldots; x \in I).$$

Zum Beweis von Satz 1 benötigen wir die folgende quantitative Version eines Satzes der Erneuerungstheorie (siehe [1], Seite 330). Sie wurde schon von W. Philipp in [5] benützt.

LEMMA. *(p_n) $(n \in N)$ sei eine Folge nicht negativer reeller Zahlen mit*

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1, \quad p_k \leqslant C_2 \alpha^{-k} \quad (\alpha > 1);$$

$P(z) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k z^k$ sei nicht Potenzreihe in z^t mit $t > 1$.

(a_n) $(n \in N_0)$ sei eine Folge reeller Zahlen mit $|a_k| \leqslant C_3 \alpha^{-k}$.

Wir definieren eine Folge (u_n) $(n \in N_0)$:

$$u_0 = a_0, \quad u_n = p_1 u_{n-1} + \ldots + p_n u_0 + a_n.$$

Dann gilt: Es gibt Konstante $C_4 > 0$ und $\beta > 1$, sodaß

$$\left| u_n - \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right| < C_4 \beta^{-n}$$

gilt, wobei

$$m = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p_k = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} p_k \Big)$$

ist. C_4 hängt von der Folge (p_n) sowie von C_3 ab.

Beweis. Wir setzen $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} p_k$ und bilden die folgenden Potenzreihen:

$$U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k z^k, \quad A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad R(z) = \sum_{k=0}^{\infty} r_k z^k.$$

Dann gilt:

$$U(z) = \frac{A(z)}{1 - P(z)} \quad \text{sowie:} \quad 1 - P(z) = (1 - z) R(z).$$

$R(z)$ stellt offenbar für $|z| < \alpha$ eine holomorphe Funktion dar. Außerdem hat $R(z)$ keine Nullstelle z_0 mit $|z_0| \leqslant 1$. Denn ist $|z_0| < 1$, so ist $|P(z_0)| < 1$ und daher $1 - P(z_0) \neq 0$. $z_0 = 1$ kann nicht Nullstelle sein, da $R(1) = m > 0$ ist. Wäre aber $z_0 = e^{i\vartheta}$, $0 < \vartheta < 2\pi$, eine Nullstelle von $R(z)$, dann wäre $P(z_0) = 1$. Da $p_k \geqslant 0$ ist, kann dies nur gelten, wenn $\cos \vartheta k = 1$ für alle k mit $p_k \neq 0$ gilt. Dann wäre aber $P(z)$ eine Potenzreihe in z^t mit $t = 2\pi/\vartheta > 1$.

Falls $R(z)$ überhaupt eine Nullstelle hat, dann gibt es eine mit kleinstem Betrag $|z_0| = \gamma > 1$ $(\gamma \leqslant \alpha)$. Die Funktion $(R(z))^{-1}$ ist dann holomorph für $|z| < \gamma$, das heißt

$$(R(z))^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k, \quad |b_k| \leqslant C_5 \gamma^{-k}.$$

Wir vermerken, daß $\sum_{k=0}^{\infty} b_k = (R(1))^{-1} = m^{-1}$ ist. Weiter gilt:

$$(1-P(z))^{-1} = (1-z)^{-1}(R(z))^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{i=0}^{k} b_i\Big) z^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k,$$

wobei $|c_k - m^{-1}| \leqslant C_6\gamma^{-k}$.

Es ist nun

$$U(z) = A(z)\Big(\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k\Big) = A(z)\Big(m^{-1}\sum_{k=0}^{\infty} z_k + \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k\Big) \quad \text{mit} \quad |d_k| \leqslant C_6\gamma^{-k}.$$

Durch Koeffizientenvergleich sieht man:

$$u_n = m^{-1}\sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} d_k a_{n-k},$$

woraus die Behauptung des Lemmas mit $1 < \beta < \gamma^2$ und einer geeigneten Konstanten C_4 folgt.

Beweis von Satz 1. Für $x \in I$ ist $\Delta^n h_n(x)$ die Anzahl der T^n-Urbilder von x und $\Delta^n \varphi_n(x)$ die Anzahl der T^n-Urbilder von x, die in D_n liegen. Die Mengen $B_1, B_2, \ldots, B_n, D_n$ bilden eine Partition von I. Jedes $x \in I$ hat genau β_1 T-Urbilder in B_1, β_2 T^2-Urbilder in $B_2, \ldots, \beta_n$ T^n-Urbilder in B_n sowie $\Delta^n\varphi_n(x)$ T^n-Urbilder in D_n. Daraus folgt:

$$\Delta^n h_n(x) = \beta_1 \cdot \Delta^{n-1} h_{n-1}(x) + \beta_2 \cdot \Delta^{n-2} h_{n-2}(x) + \ldots + \beta_n h_0(x) + \Delta^n \varphi_n(x)$$

und damit

$$h_n(x) = \beta_1 \Delta^{-1} h_{n-1}(x) + \beta_2 \Delta^{-2} h_{n-2}(x) + \ldots + \beta_n \Delta^{-n} h_0(x) + \varphi_n(x). \tag{7}$$

Dabei gilt:

$$\beta_1 \Delta^{-1} > 0, \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \Delta^{-i} = 1, \qquad \varphi_n(x) \leqslant \delta_n \Delta^{-n} \leqslant M \cdot K^{-n},$$

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} \beta_i \Delta^{-i} \leqslant \delta_n \Delta^{-n} \leqslant M \cdot K^{-n}.$$

Wir können das Lemma anwenden und Satz 1 ist bewiesen.

FOLGERUNG. *Für alle* $E \in \mathscr{F}$ *gilt:*

$$|m(T^{-n}E) - \mu(E)| \leqslant C_1 \cdot m(E)\varrho^{-n}. \tag{8}$$

Dies folgt aus

$$\int_E h_n(x)\,dm = m(T^{-n}E)$$

(siehe [2]).

§ 3. Mischungsgeschwindigkeit. Die Zylinder aus $\mathscr{A}_s$ wollen wir eigentliche Zylinder s-ter Ordnung nennen. Für jedes $E \in \mathscr{F}$ sei $E^{(s)}$ die Vereinigung aller eigentlichen Zylinder mit Ordnung $\leqslant s$, die in E enthalten sind. Weiter sei

$$\psi_E(x) = m(E \setminus E^{(s)}), \qquad s-1 < x \leqslant s.$$

SATZ 2. *Für alle* $E, F \in \mathscr{F}$ *gilt:*

$$\mu(E \cap T^{-n}F) = \mu(E)\mu(F) + O\big(\psi_E(n/2) + \varrho^{-n/2}\big), \tag{9}$$

wobei die Konstante in O nur von T abhängt. Ist E ein Zylinder, dann gilt

$$\psi_E(x) \leqslant M \cdot K^{-x} \qquad (x > 0). \tag{10}$$

Wir beweisen zunächst einige Hilfssätze.

LEMMA 1. *Es sei* $I_s \in \mathscr{A}_s$, $F \in \mathscr{F}$. *Dann gilt:*

$$|m(I_s \cap T^{-n}F) - m(I_s)\mu(F)| \leqslant C_1 m(I_s) m(F)\varrho^{-(n-s)}, \qquad s \leqslant n. \tag{11}$$

Beweis. (11) folgt unmittelbar aus (8) unter Beachtung von

$$m(I_s) = \Delta^{-s}, \qquad m(I_s \cap T^{-n}F) = \Delta^{-s} m(T^{-(n-s)}E).$$

LEMMA 2. *Für alle* $E, F \in \mathscr{F}$ *gilt*

$$m(E \cap T^{-n}F) = m(E)\mu(F) + O\big(\psi_E(n/2) + \varrho^{-n/2}\big), \tag{12}$$

wobei die O-Konstante nur von T abhängt.

Beweis. Aus (11) folgt

$$m(E^{(s)} \cap T^{-n}F) = m(E^{(s)})\mu(F) + O(\varrho^{-(n-s)}),$$

da $E^{(s)}$ eine disjunkte Vereinigung eigentlicher Zylinder ist. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} m(E \cap T^{-n}F) &= m(E^{(s)} \cap T^{-n}F) + O(\psi_E(s)) \\ &= m(E^{(s)})\mu(F) + O\big(\psi(s) + \varrho^{-(n-s)}\big) = m(E)\mu(F) + O\big(\psi(s) + \varrho^{-(n-s)}\big). \end{aligned}$$

Dies gilt für alle $s \leqslant n$. Wir setzen $s = n/2$, womit (12) bewiesen ist.

LEMMA 3. *Es sei* $\mathscr{D}_n = \{I_n^{(1)}, \ldots, I_n^{(m)}\}$. *Dann gilt*

$$\psi_{I_n^{(i)}}(s) \leqslant M \cdot a_{n,s}^{(i)} K^{-s}, \tag{13}$$

$$\psi_{T^m I_n^{(i)}}(s) \leqslant M \cdot a_{n,s+n}^{(i)} \cdot \Big(\frac{\Delta}{K}\Big)^n \cdot K^{-s}, \tag{14}$$

wobei

$$\sum_{i=1}^{m} a_{n,s}^{(i)} = 1.$$

Beweis. Aus (1) folgt

$$m(D_s) \leqslant M \cdot K^{-s}.$$

Damit ist (13) für $s \leqslant n$ bewiesen. Ist $s > n$, dann ist $D_s \subseteq D_n$ und jeder Zylinder von $\mathscr{D}_n$ ist bis auf einen Teil durch eigentliche Zylinder ausgefüllt. Die Summe der Reste ist gerade $m(D_s) \leqslant M \cdot K^{-s}$. Die $a_{n,s}^{(\nu)}$ geben an, wie sich diese Reste auf die einzelnen Zylinder von $\mathscr{D}_n$ verteilen; damit gilt offenbar

$$\sum_{i=1}^{m} a_{n,s}^{(i)} = 1.$$

Nun zur Behauptung (14): Aus (13) folgt

$$\psi_{I_n^{(i)}}(s+n) \leqslant M \cdot a_{n,s+n}^{(i)} \cdot K^{-s-n}.$$

Eine Ausfüllung von $I_n^{(i)}$ durch eigentliche Zylinder der Ordnung $n+1, n+2, \ldots, n+s$ ergibt eine Ausfüllung von $T^n I_n^{(i)}$ durch eigentliche Zylinder der Ordnung $1, 2, \ldots, s$. Das Volumen des Restes wird dabei mit Δ^n multipliziert; daraus folgt (14).

Lemma 4. *Ist E ein Zylinder, dann gilt*

$$\psi_E(s) \leqslant M \cdot K^{-s}. \tag{15}$$

Beweis. Ist E ein eigentlicher Zylinder n-ter Ordnung, dann ist $m(E) = \Delta^{-n}$ und

$$\psi_E(s) < m(E) = \Delta^{-n} < M \cdot K^{-s}, \quad s < n$$
$$\psi_E(s) = 0, \quad s \geqslant n.$$

Ist $E \in \mathscr{D}_n$, dann folgt (15) aus (13). Es bleibt noch folgender Fall:

$$E = I(a_1, \ldots, a_n) \in \mathscr{C}_n, \quad I(a_1, \ldots, a_g) \in \mathscr{A}_g \quad (g < n).$$

Wir wählen g maximal. Man sieht leicht ein, daß dann

$$I(a_{g+1}, \ldots, a_n) \in \mathscr{D}_{n-g}$$

gilt. Aus (13) folgt

$$\psi_{I(a_{g+1}, \ldots, a_n)}(s-g) \leqslant M \cdot K^{-(s-g)}.$$

Aus der Definition der Zylinder folgt

$$T^{-g} I(a_{g+1}, \ldots, a_n) \cap I(a_1, \ldots, a_g) = I(a_1, \ldots, a_n)$$

und jede Ausfüllung von $I(a_{g+1}, \ldots, a_n)$ durch eigentliche Zylinder bis zur Ordnung $s-g$ liefert eine Ausfüllung von $I(a_1, \ldots, a_n)$ durch eigentliche

Zylinder bis zur Ordnung s. Das Volumen des Restes wird dabei durch Δ^g dividiert und wir erhalten:

$$\psi_E(s) \leqslant M \cdot \Delta^{-g} \cdot K^{-(s-g)} \leqslant M \cdot K^{-s} \quad (\text{da } K \leqslant \Delta \text{ ist}).$$

Beweis von Satz 2. Wir zeigen zunächst:

$$\psi_{E \cap T^n I_n^{(i)}}(s) \leqslant \psi_E(s) + M \cdot a_{n,s+n}^{(i)} \cdot \left(\frac{\Delta}{K}\right)^n \cdot K^{-s} \quad (I_n^{(i)} \in \mathscr{D}_n). \tag{16}$$

Es sei $F = T^n I_n^{(i)}$. Dann folgt aus (14):

$$m\big((E \cap F) \setminus (E^{(s)} \cap F^{(s)})\big) \leqslant \psi_E(s) + \psi_F(s) \leqslant \psi_E(s) + M \cdot a_{n,s+n}^{(i)} \cdot \left(\frac{\Delta}{K}\right)^n \cdot K^{-s}.$$

Es ist aber $E^{(s)} \cap F^{(s)} \subseteq (E \cap F)^{(s)}$, da $E^{(s)}$ und $F^{(s)}$ disjunkte Vereinigungen von Zylindern sind und der Durchschnitt zweier Zylinder entweder leer oder einer der beiden Zylinder ist. Damit ist (16) bewiesen.

Nun rechnen wir $(E, F \in \mathscr{F})$:

$$\begin{aligned}
\mu(E \cap T^{-n} F) &= \int_E \chi_F(T^n x)\,\sigma(x)\,dm = \sum_{i=0}^{\infty} \Delta^{-i} \int_E \chi_F(T^n x)\,\varphi_i(x)\,dm \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \Delta^{-i} \sum_{I_i^{(j)} \in \mathscr{D}_i} \int_E \chi_F(T^n x) \cdot \chi_{T^i I_i^{(j)}}(x)\,dm \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \Delta^{-i} \sum_{I_i^{(j)} \in \mathscr{D}_i} m(E \cap T^i I_i^{(j)} \cap T^{-n} F) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \Delta^{-i} \sum_{I_i^{(j)} \in \mathscr{D}_i} \big[m(E \cap T^i I_i^{(j)})\,\mu(F) + \\
&\qquad + O\big(\psi_E(n/2) + M \cdot a_{i,[n/2]+i}^{(j)} + (\Delta/K)^i \cdot K^{-n/2} + \varrho^{-n/2}\big)\big] \\
&= \mu(F) \cdot \int_E \sigma(x)\,dm + \sum_{i=0}^{\infty} \delta_i \Delta^{-i} \cdot O\big(\psi_E(n/2)\big) + \\
&\quad + M \sum_{i=0}^{\infty} (\Delta/K)^i \Delta^{-i} \sum_{I_i^{(j)} \in \mathscr{D}_i} a_{i,[n/2]+i}^{(j)} \cdot O(K^{-n/2}) + \sum_{i=0}^{\infty} \delta_i \Delta^{-i} \cdot O(\varrho^{-n/2}) \\
&= \mu(E)\,\mu(F) + O\big(\psi_E(n/2) + \varrho^{-n/2}\big) + M \cdot \sum_{i=0}^{\infty} K^{-i} \cdot O(K^{-n/2}) \\
&= \mu(E)\,\mu(F) + O\big(\psi_E(n/2) + \varrho^{-n/2}\big).
\end{aligned}$$

Literatur

[1] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, vol. I, 3rd ed., New York 1968.

[2] R. Fischer, *Ergodische Eigenschaften komplexer Ziffernentwicklungen*, Sitzungsber. der Österr. Akad.d.Wiss., math.-naturw. Kl. Abt. II, 180 (1971), S. 49–68.

[3] W. Parry, *On the β-expansions of real numbers*, Acta Math. Hung. 11 (1960), S. 401–416.

[4] W. Philipp, *Mischungseigenschaften gewisser auf dem Torus definierter Endomorphismen*, Math. Zeitschr. 101 (1967), S. 369–374.

[5] — *Ein zentraler Grenzwertsatz mit Anwendungen auf die Zahlentheorie*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 8 (1967), S. 185–203.

[6] F. Schweiger, *Metrische Theorie einer Klasse zahlentheoretischer Transformationen*, Acta Arith. 15 (1968), S. 1–18; ibid. 17 (1969), S. 217–219.

[7] M. S. Waterman, *Some ergodic properties of multi-dimensional F-expansions*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 16 (1970), S. 77–103.

MATHEMATISCHES INSTITUT DER UNIVERSITÄT SALZBURG

Eingegangen 16. 12. 1971 (245)

ACTA ARITHMETICA
XXIII (1973)

Über verallgemeinerte Bernoullische Zahlen und die Klassenzahl reell-quadratischer Zahlkörper

von

HEINRICH LANG (Köln)

Es sei Ω ein reell-quadratischer Zahlkörper mit der Diskriminante $d > 0$. Die Zetafunktion einer absoluten Idealklasse $\mathfrak{K}$ von Ω werde mit $\zeta(s|\mathfrak{K})$ und die L-Funktion einer engeren Idealklasse $\mathfrak{K}_\infty$ von Ω mit $L(s|\mathfrak{K}_\infty)$ bezeichnet. Für natürliche Argumente $k \geqslant 2$ werde $\mathfrak{K}_k = \mathfrak{K}$ oder $\mathfrak{K}_k = \mathfrak{K}_\infty$ gesetzt, je nachdem k gerade oder ungerade ist. Dann sind die Werte

$$B(k|\mathfrak{K}_k) = \begin{cases} \dfrac{4(2k)!\,d^k}{(2\pi)^{2k}\sqrt{d}}\,\zeta(k|\mathfrak{K}), & \text{falls } k \text{ gerade ist},\\[2ex] \dfrac{4(2k)!\,d^k}{(2\pi)^{2k}\sqrt{d}}\,L(k|\mathfrak{K}_\infty), & \text{falls } k \text{ ungerade ist}, \end{cases} \tag{1}$$

rationale Zahlen [2], [4], [5], [9], [10], [11]. Es zeigt sich nun, daß man aus der genaueren Kenntnis der arithmetischen Struktur dieser rationalen Zahlen zu Aussagen über die Klassenzahl h von Ω gelangen kann.

Ist $2k+1 = p > 3$ eine Primzahl, so besteht für diese eine Partialbruchzerlegung von $B(k|\mathfrak{K}_k) = B\left(\frac{p-1}{2}\Big|\mathfrak{K}_{\frac{p-1}{2}}\right)$. Es gilt nämlich [6]:

Geht die Primzahl $p > 3$ nicht in der Diskriminante d von Ω auf, so ist $B\left(\frac{p-1}{2}\Big|\mathfrak{K}_{\frac{p-1}{2}}\right)$ eine für p ganze rationale Zahl. Ist dagegen $p > 3$ ein Primteiler der Diskriminante d von Ω, so hat man

$$pB\left(\frac{p-1}{2}\Big|\mathfrak{K}_{\frac{p-1}{2}}\right) \equiv -(-1)^{\frac{p-1}{2}}\frac{N(\varepsilon)uv}{4}X_p\big(\mathfrak{K}_{\frac{p-1}{2}}\big) \bmod p \qquad (p > 3,\ p|d). \tag{2}$$

Hierbei bedeutet $\varepsilon = \frac{1}{2}(u+v\sqrt{d}) > 1$ die Grundeinheit von Ω und X_p einen Geschlechtscharakter, der mit Hilfe des Kroneckersymbols folgendermaßen erklärt ist.