XXII(1973)

Über Bernoullische Zahlen in reel-quadratischen Zahlkörpern

von

Heinrich Lang (Köln)

I. Einleitung. Es sei Ω ein reell-quadratischer Zahlkörper mit der Diskriminante $d_\Omega > 0$. Bezeichnet dann $\zeta(s|\mathfrak{A})$ die Zetafunktion einer absoluten Idealklasse $\mathfrak{A}$ von Ω und $L(s|\mathfrak{A}_+)$ die L-Funktion einer Idealklasse $\mathfrak{A}_+$ im engeren Sinne [10], so sind für natürliche Argumente $k \geqslant 2$ die Werte

(1.1)
$$B(k|\mathfrak{A}_k) = \begin{cases} \dfrac{4(4h)!\,d_\Omega^{2h}}{(2\pi)^{4h}\sqrt{d_\Omega}}\,\zeta(2h|\mathfrak{A}), & \text{falls } k = 2h \text{ gerade ist,} \\[2ex] \dfrac{4(4h+2)!\,d_\Omega^{2h+1}}{(2\pi)^{4h+2}\sqrt{d_\Omega}}\,L(2h+1|\mathfrak{A}_+), & \text{falls } k = 2h+1 \text{ ungerade ist,} \end{cases}$$

rationale Zahlen [2], [7], [8], [11], [13], [14]. Nach E. Hecke [6] sind diese rationalen Zahlen $B(k|\mathfrak{A}_k)$ – nach geeigneter Normierung – als ein Analogon der gewöhnlichen Bernoullischen Zahlen B_m anzusehen. So bleibt insbesondere die Frage zu beantworten, ob für diese *Bernoullischen Zahlen in reell-quadratischen Zahlkörpern* eine ähnliche Charakterisierung der Nenner und eine entsprechende Partialbruchzerlegung besteht, wie sie im Satz von v. Staudt und Clausen für die gewöhnlichen Bernoullischen Zahlen formuliert wird.

In [9] ist versucht worden, die möglichen Nenner von $B(2h|\mathfrak{A}_{2h})$ genauer zu beschreiben, wobei sich die dort durchgeführten Beweise ohne Schwierigkeiten auch auf die Untersuchung von $B(2h+1|\mathfrak{A}_{2h+1})$ übertragen lassen, und es wurde bewiesen: Ist G_{4h} Hauptnenner der Zahlen $\binom{4h}{m}B_{4h-m}B_m$, so ist $G_{4h}B(2h|\mathfrak{A}_{2h})$ eine ganz-rationale Zahl. Im folgenden soll untersucht werden, wann Primteiler der Diskriminante d_Ω und der Komponenten u, v der normpositiven Grundeinheit $\varepsilon_+ = \frac{1}{2}(u+v\sqrt{d_\Omega}) > 1$, $N(\varepsilon_+) = 1$, von Ω im Nenner von $B(k|\mathfrak{A}_k)$ auftreten. Für den Fall, daß $2k+1 = p$ eine Primzahl ist, gelangt man für diese Primzahl p sogar zu einer genauen Partialbruchzerlegung von $B(k|\mathfrak{A}_k)$.

II. Höhere Dedekindsche Summen. Bei der Bildung der oben in (1.1) eingeführten Werte $B(k|\mathfrak{A}_k)$ spielen die höheren Dedekindschen Summen eine wesentliche Rolle. Es seien daher zunächst ihre Grundeigenschaften referiert [1], [3], [9]. Die gewöhnlichen Bernoullischen Zahlen B_m sind durch die Potenzreihenentwicklung

$$\frac{x}{e^x-1} = \sum_{m=0}^{\infty} B_m \frac{x^m}{m!} \qquad (|x| < 2\pi)$$

gegeben. Mit ihnen definiert man die mit der Periode 1 periodischen Bernoullischen Funktionen $P_m(x)$ durch

$$P_m(x) = \sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} B_r (x-[x])^{m-r},$$

wobei im Fall $m = 1$ noch $P_1(0) = 0$ festgesetzt wird.

Sind d und $c \neq 0$ zwei teilerfremde ganz-rationale Zahlen, so werden die *höheren Dedekindschen Summen* vermöge

$$(2.1)\quad S_{2k}^{(m)}(d, c) = \sum_{j \bmod c} P_{2k-m}\left(\frac{j}{c}\right) P_m\left(\frac{dj}{c}\right) \qquad (k = 2, 3, 4, \ldots;\ 0 \leqslant m \leqslant 2k)$$

erklärt. Ersichtlich gilt für sie

$$(2.2)\qquad S_{2k}^{(m)}(d, c) = S_{2k}^{(m)}(d^*, c) \quad \text{für} \quad d \equiv d^* \bmod c.$$

In den Fällen $m = 0$ und $m = 2k$ läßt sich die Summation in (2.1) durchführen, und man hat

$$(2.3)\qquad S_{2k}^{(0)}(d, c) = S_{2k}^{(2k)}(d, c) = \operatorname{sgn} c \frac{B_{2k}}{c^{2k-1}}.$$

Für $c = 1$ folgt aus der Definition (2.1) sofort

$$(2.4)\qquad S_{2k}^{(m)}(0, 1) = B_{2k-m} B_m.$$

Ist auch noch $d \neq 0$, so gilt für $m = 2k-1$ das von T. M. Apostol [1] aufgestellte einfache Reziprozitätsgesetz

$$2k\left(dc^{2k-1} \operatorname{sgn} c S_{2k}^{(2k-1)}(d, c) + cd^{2k-1} \operatorname{sgn} d S_{2k}^{(2k-1)}(c, d)\right)$$
$$= (2k-1)B_{2k} + \sum_{r=0}^{2k} \binom{2k}{r} (-1)^r c^{2k-r} d^r B_{2k-r} B_r.$$

Wählt man darin speziell $c = d = 1$ und beachtet, daß

$$(2.5)\qquad B_m = 0 \quad \text{für} \quad m \geqslant 3 \text{ und } m \equiv 1 \bmod 2$$

ist, so erhält man mit Hilfe von (2.2) und (2.4) die schon L. Euler bekannte Relation

$$(2.6)\qquad \sum_{r=0}^{k} \binom{2k}{2r} B_{2k-2r} B_{2r} = -(2k-1) B_{2k} \qquad (k = 2, 3, 4, \ldots)$$

zwischen Bernoullischen Zahlen.

Sei jetzt auch noch $d \not\equiv 0 \bmod c$ angenommen. Dann besteht für die höheren Dedekindschen Summen die Darstellung

$$(2.7)\quad \operatorname{sgn} c S_{2k}^{(m)}(d, c) = \frac{B_{2k-m} B_m}{c^{2k-1}} + \frac{(2k-m)m}{c^{2k-1}} \sum_{\substack{\varrho^{|c|}=1 \\ \varrho \neq 1}} \varrho^{1-d} \frac{R_{2k-m-1}(\varrho^{-d}) R_{m-1}(\varrho)}{(\varrho^{-d}-1)^{2k-m}(\varrho-1)^m}$$

durch $|c|$-te Einheitswurzeln [3], [9]. Hierbei ist über alle von 1 verschiedenen $|c|$-ten Einheitswurzeln zu summieren, und es bedeuten $R_{m-1}(x)$ die von G. Frobenius [4] eingeführten *Eulerschen Polynome*. Diese besitzen ganz-rationale Koeffizienten, so daß es sich bei $R_{2k-m-1}(\varrho^{-d})$ und $R_{m-1}(\varrho)$ um ganze Zahlen aus dem $|c|$-ten Kreiskörper handelt.

Nun ist

$$\frac{|c|\varrho}{1-\varrho} = \sum_{r=1}^{|c|-1} r\varrho^{-r}$$

eine ganz-algebraische Zahl. Daher folgt für jede zu c teilerfremde ganzrationale Zahl t:

$$(2.8)\qquad \operatorname{sgn} c S_{2k}^{(m)}(d, c) - \frac{B_{2k-m} B_m}{c^{2k-1}} \text{ ist ganz für } t \qquad ((t, c) = 1).$$

Diese Aussage gilt wegen (2.4) auch noch für $d \equiv 0 \bmod c$. Denn in diesem Fall kommt nur $c = \pm 1$ in Frage, da c und d voraussetzungsgemäß prim zueinander sind.

Schreibt man allgemein $r \equiv s \bmod t^0$, wenn die Differenz $r-s$ der rationalen Zahlen r und s ganz für t ist, so kann man die Aussage (2.8) auch durch

$$(2.9)\qquad \operatorname{sgn} c S_{2k}^{(m)}(d, c) \equiv \frac{B_{2k-m} B_m}{c^{2k-1}} \bmod t^0, \qquad \text{falls } t \text{ teilerfremd zu } c \text{ ist,}$$

ausdrücken.

III. Die Zahlen $B(k|\mathfrak{A}_k)$. Sei $\mathfrak{A}$ eine absolute Idealklasse des reellquadratischen Zahlkörpers Ω mit der Diskriminante $d_\Omega > 0$, und sei $\mathfrak{g}$ ein ganzes Ideal aus der inversen Klasse $\mathfrak{A}^{-1}$ von $\mathfrak{A}$. Die Basis γ_1, γ_2 von $\mathfrak{g}$ sei in der kanonischen Form [5], p. 373,

$$(3.1)\qquad \gamma_1 = g_1 \frac{g_0 + \sqrt{d_\Omega}}{2}, \qquad \gamma_2 = g_1 g_2$$

gewählt. Dabei bedeuten g_0, g_1, g_2 nicht negative, ganz-rationale Zahlen, und es gilt

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{g}) = g_1^2 g_2. \tag{3.2}$$

Die unimodulare Darstellungsmatrix $\begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix}$ der Grundeinheit $\varepsilon > 1$ von Ω bezüglich der Basis (3.1) von $\mathfrak{g}$ ist bestimmt durch:

$$\varepsilon \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}, \qquad \text{wobei } a_0 d_0 - b_0 c_0 = N(\varepsilon) = \pm 1 \text{ ist.}$$

Dann gilt für den Wert $\zeta(2h|\mathfrak{A})$ der Zetafunktion der Idealklasse $\mathfrak{A}$ an der natürlichen geradzahligen Argumentstelle $2h \geqslant 2$ [2]:

$$\zeta(2h|\mathfrak{A}) = \frac{(2\pi)^{4h}\sqrt{d_\Omega}\, N(\gamma_2)^{2h-1}}{4(4h)!\, d_\Omega^{2h}\, \mathfrak{N}(\mathfrak{g})^{2h-1}} \sum_{m=0}^{4h} \binom{4h}{m} (-1)^m S_{4h}^{(m)}(d_0, c_0) \times \sum_{r=0}^{2h-1} \binom{m-1}{r} \binom{4h-1-m}{2h-1-r} N(\varepsilon^{r+1})\, S(\varepsilon^{2r+1-m}), \tag{3.3}$$

wobei $S_{4h}^{(m)}(d_0, c_0)$ die in (2.1) erklärten höheren Dedekindschen Summen und S die Spurbildung in Ω bedeuten.

Eine analoge Formel besteht für den Wert $L(2h+1|\mathfrak{A}_+)$ der L-Funktion einer Idealklasse $\mathfrak{A}_+$ im engeren Sinne an den ungeraden natürlichen Argumentstellen $2h+1 \geqslant 3$. Sei dazu $\mathfrak{g}$ ein ganzes Ideal aus der inversen Klasse $\mathfrak{A}_+^{-1}$ von $\mathfrak{A}_+$ mit der kanonischen Basis (3.1). $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ bezeichne die unimodulare Darstellungsmatrix der Grundeinheit $\varepsilon_+ > 1$ der norm-positiven Einheiten von Ω bezüglich der Basis (3.1) von $\mathfrak{g}$. Man hat also:

$$\varepsilon_+ \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}, \qquad \text{wobei } ad - bc = N(\varepsilon_+) = 1 \text{ ist.} \tag{3.4}$$

Dann gilt [2]:

$$L(2h+1|\mathfrak{A}_+) = \frac{(2\pi)^{4h+2}\sqrt{d_\Omega}\, N(\gamma_2)^{2h}}{4(4h+2)!\, d_\Omega^{2h+1}\, \mathfrak{N}(\mathfrak{g})^{2h}} \times \sum_{m=0}^{4h+2} \binom{4h+2}{m} (-1)^m S_{4h+2}^{(m)}(d, c) \sum_{r=0}^{2h} \binom{m-1}{r} \binom{4h+1-m}{2h-r} S(\varepsilon_+^{2r+1-m}). \tag{3.5}$$

In Hinblick auf (3.3) und (3.5) werde für natürliches $k \geqslant 2$ die elementar-arithmetische Bildung

$$\mathfrak{B}(k|\mathfrak{A}_k) = \frac{N(\gamma_2)^{k-1}}{\mathfrak{N}(\mathfrak{g})^{k-1}} \sum_{m=0}^{2k} \binom{2k}{m} (-1)^m S_{2k}^{(m)}(d, c) \times \sum_{r=0}^{k-1} \binom{m-1}{r} \binom{2k-1-m}{k-1-r} S(\varepsilon_+^{2r+1-m}) \tag{3.6}$$

eingeführt, wobei $\mathfrak{A}_k = \mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{A}_k = \mathfrak{A}_+$ zu setzen ist, je nachdem k gerade oder ungerade ist. Beachtet man, daß sich die rechte Seite von (3.3) verdoppelt, wenn ε durch das Quadrat ε^2 ersetzt wird [9], so sieht man:

$$\mathfrak{B}(k|\mathfrak{A}_k) = \begin{cases} B(k|\mathfrak{A}_k) = \dfrac{4(2k)!\, d_\Omega^k}{(2\pi)^{2k}\sqrt{d_\Omega}} L(k|\mathfrak{A}_+), & \text{falls } k \equiv 1 \bmod 2 \text{ ist,} \\ B(k|\mathfrak{A}_k) = \dfrac{4(2k)!\, d_\Omega^k}{(2\pi)^{2k}\sqrt{d_\Omega}} \zeta(k|\mathfrak{A}), & \text{falls } k \equiv 0 \bmod 2 \\ & \text{und } \varepsilon = \varepsilon_+,\ N(\varepsilon) = 1 \text{ ist,} \\ 2B(k|\mathfrak{A}_k) = \dfrac{8(2k)!\, d_\Omega^k}{(2\pi)^{2k}\sqrt{d_\Omega}} \zeta(k|\mathfrak{A}), & \text{falls } k \equiv 0 \bmod 2 \\ & \text{und } \varepsilon^2 = \varepsilon_+,\ N(\varepsilon) = -1 \text{ ist.} \end{cases} \tag{3.7}$$

$\mathfrak{B}(k|\mathfrak{A}_k)$ unterscheidet sich also von $B(k|\mathfrak{A}_k)$ höchstens um den Faktor 2. Um Fallunterscheidungen zu vermeiden, erweist es sich oft als zweckmäßig $\mathfrak{B}(k|\mathfrak{A}_k)$ statt $B(k|\mathfrak{A}_k)$ zu untersuchen.

Für die durch (3.4) bestimmte Darstellungsmatrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ der normpositiven Grundeinheit $\varepsilon_+ = \frac{1}{2}(u + v\sqrt{d_\Omega}) > 1$ bezüglich der kanonischen Basis (3.1) von $\mathfrak{g}$ hat man explizit:

$$\frac{u+v\sqrt{d_\Omega}}{2} \begin{pmatrix} g_1 & \dfrac{g_0+\sqrt{d_\Omega}}{2} \\ & g_1 g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{u+vg_0}{2} & \dfrac{v(d_\Omega - g_0^2)}{4g_2} \\ vg_2 & \dfrac{u-vg_0}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 & \dfrac{g_0+\sqrt{d_\Omega}}{2} \\ & g_1 g_2 \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

Mit (2.5), (2.9), (3.2), (3.6) und (3.8) erhält man dann für jede zu $c = vg_2$ teilerfremde ganz-rationale Zahl t:

$$\mathfrak{B}(k|\mathfrak{A}_k) \equiv \frac{1}{v^{2k-1} g_2^k} \sum_{m=0}^{k} \binom{2k}{2m} B_{2k-2m} B_{2m} \times \sum_{r=0}^{k-1} \binom{2m-1}{r} \binom{2k-1-2m}{k-1-r} S(\varepsilon_+^{2r+1-2m}) \bmod t^0. \tag{3.9}$$

Es gilt der Satz von v. Staudt und Clausen:

$$-B_{2m} \equiv \sum_{\substack{p-1|2m \\ p \text{ Primzahl}}} \frac{1}{p} \bmod 1. \tag{3.10}$$

Daher geht eine Primzahl p höchstens quadratisch im reduzierten Nenner von $B_{2k-2m}B_{2m}$ auf, wenn $p-1|2m$, $p-1|2k-2m$ und $p \leqslant k+1$ gilt. Das kann aber nur eintreten, falls $p-1|2k$ und $p \leqslant k+1$ zutrifft. Ist $k+1 = q$ selbst eine Primzahl, so ist offenbar q ein Teiler von $\binom{2k}{k}$. Für eine beliebige Primzahl p hat man daher:

$$\begin{aligned}
&\binom{2k}{2m} B_{2k-2m}B_{2m} && \text{ist ganz für } p, \text{ falls } p > 2k+1 \text{ ist,} \\
&p\binom{2k}{2m} B_{2k-2m}B_{2m} && \text{ist ganz für } p, \text{ falls } p > k \text{ oder } p-1 \nmid 2k \text{ ist,} \\
&p^2\binom{2k}{2m} B_{2k-2m}B_{2m} && \text{ist ganz für } p.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Für $\varepsilon_+ = \frac{1}{2}(u+v\sqrt{d_\Omega})$ prüft man leicht nach:

$$S_p(\varepsilon_+^{2r+1-2m}) \equiv 0 \bmod \frac{u}{2}. \tag{3.12}$$

Das Ideal $\mathfrak{g}$ aus $\mathfrak{A}_k^{-1}$ läßt sich so wählen, daß $\mathfrak{g}$ prim zu uvd_Ω und damit auch $\mathfrak{N}(\mathfrak{g}) = g_1^2 g_2$ prim zu uvd_Ω ist. Beachtet man noch, daß auf Grund der Pellschen Gleichung

$$u^2 - v^2 d_\Omega = 4 \tag{3.13}$$

u und v nur 2 als gemeinsamen Teiler haben können sowie daß sich gemäß (3.7) $\mathfrak{B}(k|\mathfrak{A}_k)$ und $B(k|\mathfrak{A}_k)$ höchstens um den Faktor 2 unterscheiden, so erhält man aus (3.9) und (3.11) den

Satz I. *Ist $p \neq 2$ ein Primteiler der Komponente u der normpositiven Grundeinheit $\varepsilon_+ = \frac{1}{2}(u+v\sqrt{d_\Omega}) > 1$ von Ω, so ist $B(k|\mathfrak{A}_k)$ ganz für p, falls eine der drei Bedingungen*

$$p-1 \nmid 2k, \quad p^2|u \quad \text{oder} \quad p > k$$

erfüllt ist. Anderenfalls ist $pB(k|\mathfrak{A}_k)$ eine für p ganze rationale Zahl.

Es besteht die Formel

$$\binom{2k-2}{k-1} = \sum_{r=0}^{k-1} \binom{n-1}{r}\binom{2k-1-n}{k-1-r} \quad \text{für} \quad n = 0, 1, 2, \ldots, 2k. \tag{3.14}$$

Die darin auftretende Summe ist invariant bei Vertauschung von n und $2k-n$. Daher braucht diese Formel (3.14) nur für $0 \leqslant n \leqslant k$ bewiesen zu werden. Im Fall $n = 0$ besagt sie:

$$\binom{2k-2}{k-1} = \sum_{r=0}^{k-1} (-1)^r \binom{2k-1}{k-1-r}.$$

Es gilt aber sogar allgemeiner

$$\binom{2k-2}{n} = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{2k-1}{n-r},$$

wie man durch vollständige Induktion nach n erkennt.

Für $1 \leqslant n \leqslant k$ ersieht man die Gültigkeit von (3.14) durch Koeffizientenvergleich von

$$\begin{aligned}
\binom{2k-2}{k-1} \frac{(k-1)!^2}{(2k-1-n)!} x^{2k-1-n} &= \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} x^{2k-2} \\
&= \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n-1}{r} \frac{d^r}{dx^r} x^{k-1} \frac{d^{n-1-r}}{dx^{n-1-r}} x^{k-1} \\
&= \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n-1}{r}\binom{k-1}{r}\binom{k-1}{n-1-r} r!\,(n-1-r)!\, x^{2k-1-n} \\
&= \frac{(k-1)!^2}{(2k-1-n)!} \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n-1}{r}\binom{2k-1-n}{k-1-r} x^{2k-1-n}.
\end{aligned}$$

Sei nun $p > k$ ein ungerader Primteiler der Diskriminante d_Ω. Mit Hilfe der Pellschen Gleichung (3.13) findet man dann

$$S_p(\varepsilon_+^{2r+1-2m}) \equiv u \bmod p.$$

Ist diese Primzahl p nicht gleichzeitig ein Teiler von v, und ist wieder $\mathfrak{g}$ prim zu uvd_Ω gewählt, so folgt aus (3.9), (3.14) sowie der Eulerschen Formel (2.6):

$$\mathfrak{B}(k|\mathfrak{A}_k) \equiv \frac{-u}{v^{2k-1}g_2^k}\binom{2k-2}{k-1}(2k-1)B_{2k} \bmod p^0 \qquad (p|d_\Omega,\ p > k,\ (p,v) = 1). \tag{3.15}$$

Nach dem Satz von v. Staudt und Clausen (3.10) handelt es sich also um eine für p ganze Zahl, wenn nicht $p-1|2k$ gilt. Im Fall $p-1|2k$ hat man nach dem kleinen Fermatschen Satze $v^{2k} \equiv 1 \bmod p$, so daß man für (3.15) auch schreiben kann:

$$\mathfrak{B}(k|\mathfrak{A}_k) \equiv \frac{-uv}{g_2^k}\binom{2k-2}{k-1}(2k-1)B_{2k} \bmod p^0 \qquad (p|d_\Omega,\ p > k,\ (p,v) = 1). \tag{3.16}$$

Es zeigt sich nun, daß für die Gültigkeit von (3.16) die Bedingung $(p, v) = 1$ überflüssig ist. Um dies einzusehen, muß allerdings weiter ausgeholt werden.

Für die durch (3.4) gegebene Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ kann wegen $ad - bc = 1$ der Fall $d = 0$ nur für $c = \pm 1$ eintreten. Nach (3.8) ist dann aber $c = vg_2 = 1$, und daher auch $v = 1$, so daß in diesem Fall die Bedingung $(p, v) = (p, 1) = 1$ keine Einschränkung bedeutet.

Sei jetzt $d \neq 0$. In [9] ist mit Hilfe von allgemeinen Reziprozitätsgesetzen für die höheren Dedekindschen Summen $S_{2k}^{(m)}(d, c)$ gezeigt worden, daß für $\mathfrak{B}(k|\mathfrak{A}_k)$ auch die folgende Darstellung besteht (1):

$$(3.17)\qquad \mathfrak{B}(k|\mathfrak{A}_k) = \frac{-2}{\mathfrak{N}(\mathfrak{g})^{k-1}}\Big\{\sum_{m=0}^{2k}\binom{2k}{m}(-1)^m S_{2k}^{(m)}(c, d) \times$$

$$\times \sum_{r=0}^{k-1}\binom{m-1}{r}\binom{2k-1-m}{k-1-r}(\varepsilon_+\gamma_2)^{k-m+r}\gamma_1^{m-1-r}(\varepsilon_+'\gamma_2')^{k-1-r}\gamma_1'^{r} -$$

$$-\sum_{m=0}^{2k}\binom{2k}{m}(-1)^m B_{2k-m}B_m\sum_{r=0}^{k-1}\binom{m-1}{r}\binom{2k-1-m}{k-1-r}\gamma_2^{k-m+r}\gamma_1^{m-1-r}\gamma_2'^{k-1-r}\gamma_1'^{r}\Big\}.$$

Hierin bedeutet der Strich $'$ die Anwendung des nicht identischen Automorphismus von Ω. Im Gegensatz zur Darstellung (3.6) treten hier die höheren Dedekindschen Summen $S_{2k}^{(m)}(c, d)$ auf, deren Nenner gemäß (2.8) bzw. (2.9) im Wesentlichen durch die zu $c = vg_2$ teilerfremde Zahl d bestimmt wird.

Oben war schon das Ideal $\mathfrak{g}$ aus $\mathfrak{A}_k^{-1}$ prim zu uvd_Ω gewählt. Sei $p \neq 2$ ein Primteiler von v. Dann ist $\mathfrak{N}(\mathfrak{g}) = g_1^2 g_2$ und damit auch $\gamma_2 = g_1 g_2$ teilerfremd zu p. Es kann erreicht werden, daß das Basiselement γ_1 ebenfalls prim zu p ist. Hat man schon $(\gamma_1, p) = 1$, so ist nichts zu zeigen. Ist dagegen $(\gamma_1, p) \neq 1$, so sind die beiden folgenden Fälle zu unterscheiden:

a) p ist träge in Ω. Dann ist (p) ein Primideal, und es folgt aus $(\gamma_1, p) \neq 1$ notwendig $p|\gamma_1$ und daraus wegen $p \nmid \gamma_2$, daß $\gamma_1 + \gamma_2$ prim zu p ist. Man ersetze daher γ_1 durch $\gamma_1 + \gamma_2 = \frac{1}{2}g_1(g_0^* + \sqrt{d_\Omega})$ mit $g_0^* = g_0 + 2g_2$.

b) p ist nicht träge in Ω. Dann ist $(p) = \mathfrak{p}\mathfrak{p}'$ das Produkt zweier Primideale $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$ von Ω (mit $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}'$ für $p|d_\Omega$). Sei etwa $\mathfrak{p}|\gamma_1$. Aus $p \neq 2$ und $\mathfrak{p} \nmid \gamma_2$ folgt, daß $\gamma_1 + \gamma_2$ und $\gamma_1 + 2\gamma_2$ prim zu $\mathfrak{p}$ sind. Hat man schon $\mathfrak{p}' \nmid \gamma_1 + \gamma_2$, so ist $\gamma_1 + \gamma_2$ auch prim zu $(p) = \mathfrak{p}\mathfrak{p}'$, und man ersetze γ_1 durch $\gamma_1 + \gamma_2$. Gilt dagegen $\mathfrak{p}'|\gamma_1 + \gamma_2$, so ist wegen $\mathfrak{p}' \nmid \gamma_2$ sicher $\mathfrak{p}'$ kein Teiler von $\gamma_1 + 2\gamma_2$. Es ist also $\gamma_1 + 2\gamma_2$ prim zu $(p) = \mathfrak{p}\mathfrak{p}'$, und man ersetze jetzt γ_1 durch $\gamma_1 + 2\gamma_2 = \frac{1}{2}g_1(g_0^* + \sqrt{d_\Omega})$ mit $g_0^* = g_0 + 4g_2$.

(1) Der Beweis für diese Darstellung ist in [9] allerdings nur für gerades k erbracht worden. Er läßt sich aber ohne Schwierigkeiten auch auf den Fall $k \equiv 1 \bmod 2$ übertragen.

Es kann also ohne Einschränkung angenommen werden, daß γ_1 und γ_2 prim zu p sind und in der Form (3.1) dargestellt werden.

Der Primteiler p von v geht nicht in der Komponente d der durch (3.4) bzw. (3.8) gegebenen Matrix auf, da d teilerfremd zu $c = vg_2$ ist. Mit (2.5) und (2.9) bekommt man daher aus (3.17):

$$(3.18)\qquad \mathfrak{B}(k|\mathfrak{A}_k) \equiv \frac{-2g_2^k g_1}{d^{2k-1}}\sum_{m=0}^{k}\binom{2k}{2m}\frac{1}{(g_1 g_2)^{2m}}B_{2k-2m}B_{2m} \times$$

$$\times \sum_{r=0}^{k-1}\binom{2m-1}{r}\binom{2k-1-2m}{k-1-r}\gamma_1^{2m-1-r}\gamma_1'^{r}(\varepsilon_+^{2r+1-m} - d^{2k-1}) \bmod p^0.$$

Nach (3.8) gilt $d = \frac{1}{2}(u - vg_0)$. Es ist also wegen $\varepsilon_+\varepsilon_+' = 1$

$$\varepsilon_+^{2r-1-2m} - d^{2k-1} \equiv \left(\frac{u + v\sqrt{d_\Omega}}{2}\right)^{2r+1}\left(\frac{u - v\sqrt{d_\Omega}}{2}\right)^{2m} - \left(\frac{u - vg_0}{2}\right)^{2k-1}$$

$$\equiv \left(\frac{u}{2}\right)^{2r+1+2m} - \left(\frac{u}{2}\right)^{2k-1} \equiv 0 \bmod p^e,$$

wenn die Potenz p^e von p in v aufgeht. Hierbei wurde ausgenutzt, daß auf Grund der Pellschen Gleichung (3.13) gilt: $\frac{1}{4}u^2 \equiv 1 \bmod p^e$ für $p^e|v$. Mit (3.18) und der Folgerung (3.11) aus dem Satz von v. Staudt und Clausen erhält man wie oben den zu Satz I analogen

Satz II. *Ist $p \neq 2$ ein Primteiler der Komponente v der normpositiven Grundeinheit $\varepsilon_+ = \frac{1}{2}(u + v\sqrt{d_\Omega}) > 1$ von Ω, so ist $B(k|\mathfrak{A}_k)$ ganz für p, falls eine der drei Bedingungen*

$$p - 1 \nmid 2k, \qquad p^2|v \qquad \text{oder} \qquad p > k$$

erfüllt ist. Anderenfalls ist $pB(k|\mathfrak{A}_k)$ eine für p ganze rationale Zahl.

Mit dem Beweis dieses Satzes II ist auch die oben aufgestellte Frage beantwortet, ob die Bedingung $(p, v) = 1$ für die Gültigkeit der Kongruenz (3.16) notwendig ist. Geht nämlich der Primteiler $p > k$ von d_Ω in v auf, so ist nach dem Satz von v. Staudt und Clausen sicher vB_{2k} eine für p ganze rationale Zahl. Für diese Primzahl p besagt (3.16) also gerade, daß $\mathfrak{B}(k|\mathfrak{A}_k)$ eine für p ganze Zahl sei. Das ist aber nach Satz II richtig; denn es ist $p > k \geq 2$ und es gilt (3.7).

Ist $k < p \leq 2k-1$, so ist die Primzahl p offenbar Teiler von $\binom{2k-2}{k-1} \times (2k-1)$. Mit der Partialbruchzerlegung (3.10) der Bernoullischen Zahlen folgt daher aus (3.16) und dem Satz II der

SATZ III. *Ist $p>k$ eine in d_Ω aufgehende Primzahl, so ist $B(k|\mathfrak{A}_k)$ ganz für p, falls $p\neq 2k+1$ gilt. Ist dagegen $2k+1=p$ ein Primteiler von d_Ω, so ist $pB(k|\mathfrak{A}_k)$ eine für p ganze rationale Zahl.*

Sei nun der Fall, daß $2k+1=p$ eine Primzahl sei, weiter verfolgt. Ist dann p ein Teiler der Diskriminante d_Ω, so hat man gemäß (3.10) und (3.16):

$$\mathfrak{B}(k|\mathfrak{A}_k)\equiv\frac{uv}{g_2^k}\binom{2k-2}{k-1}(2k-1)\frac{1}{p}\bmod p^0. \tag{3.19}$$

Nach dem Satz von Wilson ist dabei

$$\binom{2k-2}{k-1}(2k-1)=\frac{(2k-1)!}{(k-1)!^2}\equiv-\frac{(-1)^k}{4}\bmod p. \tag{3.20}$$

Außerdem folgt mit (3.2) aus dem kleinen Fermatschen Satz und dem Eulerschen Kriterium für das Legendresche Symbol

$$\frac{1}{g_2^k}\equiv g_1^{2k}g_2^k\equiv\mathfrak{N}(\mathfrak{g})^{\frac{p-1}{2}}\equiv\left(\frac{\mathfrak{N}(\mathfrak{g})}{p}\right)\bmod p\qquad(p=2k+1). \tag{3.21}$$

Wählt man das Ideal $\mathfrak{g}$ aus $\mathfrak{A}_k^{-1}$ auch noch prim zu 2, so gilt nach dem quadratischen Reziprozitätsgesetz und dem ersten Ergänzungssatz

(3.22)

$$\left(\frac{\mathfrak{N}(\mathfrak{g})}{p}\right)=\left(\frac{p}{\mathfrak{N}(\mathfrak{g})}\right)(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{\mathfrak{N}(\mathfrak{g})-1}{2}}=\left(\frac{p}{\mathfrak{N}(\mathfrak{g})}\right)\left(\frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{\mathfrak{N}(\mathfrak{g})}\right)=\left(\frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}p}{\mathfrak{N}(\mathfrak{g})}\right).$$

Aus (3.19) bis (3.22) resultiert dann

$$\mathfrak{B}(k|\mathfrak{A}_k)\equiv-(-1)^{\frac{p-1}{2}}\frac{uv}{4}\left(\frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}p}{\mathfrak{N}(\mathfrak{g})}\right)\frac{1}{p}\bmod p^0. \tag{3.23}$$

Ist $k=\dfrac{p-1}{2}$ ungerade und $p|d_\Omega$, so ist die Norm $N(\varepsilon)$ der Grundeinheit $\varepsilon=\frac12(u_0+v_0\sqrt{d_\Omega})>1$ positiv [5], p. 303. Es gilt dann also $\varepsilon_+=\varepsilon$ und somit

$$uv=N(\varepsilon)u_0v_0\qquad(k\equiv1\bmod2). \tag{3.24}$$

Ist dagegen $k=\dfrac{p-1}{2}$ gerade, so sind zwei Fälle zu unterscheiden: Entweder hat man auch hier $N(\varepsilon)=1$ und $\varepsilon_+=\varepsilon$, also ebenfalls

$$uv=N(\varepsilon)u_0v_0\qquad(k\equiv0\bmod2,\ \varepsilon_+=\varepsilon), \tag{3.25}$$

oder es ist $N(\varepsilon)=-1$ und $\varepsilon_+=\varepsilon^2$. Dann gilt $\frac12(u+v\sqrt{d_\Omega})=\frac14(u_0+v_0\sqrt{d_\Omega})^2$. Mit Hilfe der Pellschen Gleichung $u_0^2-v_0^2d_\Omega=4N(\varepsilon)$ bekommt man wegen $p|d_\Omega$ daraus

$$uv\equiv\tfrac12(u_0^2+v_0^2d_\Omega)u_0v_0\equiv2N(\varepsilon)u_0v_0\bmod p\quad(k\equiv0\bmod2,\ \varepsilon_+=\varepsilon^2). \tag{3.26}$$

Aus (3.7), (3.23), (3.24), (3.25) und (3.26) erhält man endlich

$$B(k|\mathfrak{A}_k)\equiv-(-1)^{\frac{p-1}{2}}\frac{N(\varepsilon)u_0v_0}{4}\left(\frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}p}{\mathfrak{N}(\mathfrak{g})}\right)\frac{1}{p}\bmod p^0 \tag{3.27}$$

$$(2k+1=p|d_\Omega).$$

Das Ideal $\mathfrak{g}$ liegt in $\mathfrak{A}_k^{-1}$. Da $(\mathfrak{N}(\mathfrak{g}))=\mathfrak{g}\mathfrak{g}'$ gilt, liegt das zu $\mathfrak{g}$ konjugierte Ideal $\mathfrak{g}'$ in der Klasse $\mathfrak{A}_k$ selber. Daher kann man für das in (3.27) auftretende Ideal $\mathfrak{g}$ annehmen, daß es selbst schon in $\mathfrak{A}_k$ liegt. $(-1)^{\frac{p-1}{2}}p$ ist eine Primdiskriminante und Teiler von d_Ω. Setzt man $d_\Omega=(-1)^{\frac{p-1}{2}}p\Delta$, so wird bekanntlich durch die allgemeine Zuordnung

$$\mathfrak{g}\to\chi_p(\mathfrak{g})=\begin{cases}\left(\dfrac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}p}{\mathfrak{N}(\mathfrak{g})}\right), & \text{falls } p\nmid\mathfrak{N}(\mathfrak{g}),\\[2ex] \left(\dfrac{\Delta}{\mathfrak{N}(\mathfrak{g})}\right), & \text{falls } p|\mathfrak{N}(\mathfrak{g})\end{cases} \tag{3.28}$$

ein Geschlechtscharakter definiert. Im Fall $p\equiv1\bmod4$ hängt dieser Charakter $\chi_p(\mathfrak{g})$ nur von der absoluten Klasseneinteilung der Ideale von Ω ab. Denn $1+\sqrt{d_\Omega}$ besitzt offenbar negative Norm, und man hat unter der Voraussetzung $p\equiv1\bmod4$:

$$\chi_p(1+\sqrt{d_\Omega})=\left(\frac{p}{d_\Omega-1}\right)=\left(\frac{d_\Omega-1}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}}=1.$$

Daher kann man festsetzen:

$$\chi_p(\mathfrak{A}_{\frac{p-1}{2}})=\chi_p(\mathfrak{g}),\quad\text{falls }\mathfrak{g}\text{ aus }\mathfrak{A}_{\frac{p-1}{2}}\text{ ist}, \tag{3.29}$$

und man erhält den

SATZ IV. *Sei $p>3$ eine Primzahl und Teiler der Diskriminante d_Ω des reell-quadratischen Zahlkörpers Ω, und es bezeichne $\varepsilon=\frac12(u_0+v_0\sqrt{d_\Omega})>1$ die Grundeinheit von Ω. Dann besteht für diese Primzahl die Partialbruchzerlegung*

$$B\left(\frac{p-1}{2}\Big|\mathfrak{A}_{\frac{p-1}{2}}\right)\equiv-(-1)^{\frac{p-1}{2}}\frac{N(\varepsilon)u_0v_0}{4}\chi_p(\mathfrak{A}_{\frac{p-1}{2}})\frac{1}{p}\bmod p^0\qquad(p|d_\Omega).$$

Dieses Ergebnis läßt sich noch erweitern, und zwar soll jetzt gezeigt werden, daß $B\left(\frac{p-1}{2}\,|\,\mathfrak{A}_{\frac{p-1}{2}}\right)$ ganz für die Primzahl $p>3$ ist, wenn diese nicht in der Diskriminante d_Ω aufgeht. Dazu wird von der Kongruenz (3.9) ausgegangen. Mit dem Satz von v. Staudt und Clausen (3.10) bekommt man für nicht in $c=vg_2$ aufgehende Primzahlen $p=2k+1$:

$$\mathfrak{B}(k|\mathfrak{A}_k)\equiv\frac{-1}{pv^{2k-1}g_2^k}\left\{\sum_{r=0}^{k-1}\binom{-1}{r}\binom{2k-1}{k-1-r}S(\varepsilon_+^{2r+1})+\right.$$
$$\left.+\sum_{r=0}^{k-1}\binom{2k-1}{r}\binom{-1}{k-1-r}S(\varepsilon_+^{2r+1-2k})\right\}$$
$$\equiv\frac{-2}{pv^{2k-1}g_2^k}\sum_{r=0}^{k-1}(-1)^r\binom{2k-1}{k-1-r}S(\varepsilon_+^{2r+1})\bmod p^0. \tag{3.30}$$

Die hierin auftretende Summe läßt sich als polynomischer Ausdruck in $\frac{1}{2}S(\varepsilon_+)=u/2$ schreiben. Man setze für den Quotienten der Basis (3.1) $\omega=\gamma_1/\gamma_2$. Durch mehrfache Anwendung der partiellen Integration findet man

$$\int(x-\omega)^{k-1}(x-\omega')^{k-1}dx$$
$$=\frac{(k-1)!^2}{(2k-1)!}\sum_{r=0}^{k-1}(-1)^r\binom{2k-1}{k-1-r}(x-\omega)^{k-1-r}(x-\omega')^{k+r}. \tag{3.31}$$

Aus (3.4) bekommt man leicht

$$\varepsilon_+^{-1}\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{pmatrix}.$$

Zusammen mit (3.4) erhält man daraus:

$$\begin{aligned}\varepsilon_+&=c\omega+d, & \varepsilon_+'&=\varepsilon_+^{-1}=c\omega'+d,\\ \varepsilon_+&=-c\omega'+a, & \varepsilon_+'&=\varepsilon_+^{-1}=-c\omega+a.\end{aligned}\qquad(\omega=\gamma_1/\gamma_2) \tag{3.32}$$

Daher folgt aus (3.31):

$$\int_{-d/c}^{a/c}(x-\omega)^{k-1}(x-\omega')^{k-1}dx$$
$$=\frac{(k-1)!^2}{(2k-1)!\,c^{2k-1}}\sum_{r=0}^{k-1}(-1)^r\binom{2k-1}{k-1-r}(\varepsilon_+^{2r+1}+\varepsilon_+'^{2r+1})$$
$$=\frac{(k-1)!^2}{(2k-1)!\,c^{2k-1}}\sum_{r=0}^{k-1}(-1)^r\binom{2k-1}{k-1-r}S(\varepsilon_+^{2r+1}). \tag{3.33}$$

Andererseits gilt

$$\int(x-\omega)^{k-1}(x-\omega')^{k-1}dx=\int\left(\left(x-\frac{\omega+\omega'}{2}\right)^2-\left(\frac{\omega-\omega'}{2}\right)^2\right)^{k-1}dx$$
$$=\sum_{r=0}^{k-1}\binom{k-1}{r}\frac{1}{2r+1}\left(x-\frac{\omega+\omega'}{2}\right)^{2r+1}\left(-\left(\frac{\omega-\omega'}{2}\right)^2\right)^{k-1-r},$$

woraus mit den aus (3.32) unmittelbar einzusehenden Gleichungen

$$2a-c(\omega+\omega')=\varepsilon_++\varepsilon_+'=u,\qquad 2d+c(\omega+\omega')=\varepsilon_++\varepsilon_+'=u$$

und

$$-c^2(\omega-\omega')^2=-(\varepsilon_+-\varepsilon_+')^2=-v^2d_\Omega=4-u^2$$

die Darstellung

$$\int_{-d/c}^{a/c}(x-\omega)^{k-1}(x-\omega')^{k-1}dx$$
$$=\frac{2}{c^{2k-1}}\sum_{r=0}^{k-1}\binom{k-1}{r}\frac{1}{2r+1}\left(\frac{u}{2}\right)^{2r+1}\left(1-\frac{u^2}{4}\right)^{k-1-r} \tag{3.34}$$

für das Integral (3.33) resultiert.

Führt man das Polynom

$$F_k(x)=\sum_{r=0}^{k-1}\binom{k-1}{r}\frac{1}{2r+1}x^r(1-x)^{k-r} \tag{3.35}$$

ein, so ist gemäß (3.30), (3.33), (3.34) und (3.35):

$$\mathfrak{B}(k|\mathfrak{A}_k)\equiv\frac{16\,(2k-1)!}{(k-1)!^2v^{2k+1}d_\Omega g_2^k}\,\frac{\frac{u}{2}F_k\left(\frac{u^2}{4}\right)}{p}\bmod p^0\qquad(p=2k+1). \tag{3.36}$$

Für das Polynom (3.35) hat C. L. Siegel [13] bewiesen:

$$F_k(x)\equiv1-x^k\bmod p\qquad\text{für}\qquad p=2k+1.$$

Nach dem kleinen Fermatschen Satz ist daher

$$\frac{u}{2}F_k\left(\frac{u^2}{4}\right)\equiv0\bmod p\qquad(p=2k+1). \tag{3.37}$$

$\mathfrak{B}(k|\mathfrak{A}_k)$ ist also ganz für die Primzahl $p=2k+1$, wenn diese nicht in $vd_\Omega g_2$ aufgeht. Wählt man nun das in die Darstellung (3.6) für $\mathfrak{B}(k|\mathfrak{A}_k)$ eingehende Ideal $\mathfrak{g}$ auch noch prim zur vorgegebenen Primzahl p, so ist $\mathfrak{N}(\mathfrak{g})=g_1^2g_2$ und dann erst recht g_2 zu p teilerfremd.

Aus (3.7), (3.36), (3.37) und dem Satz II erhält man daher schließlich den

Satz V. *Ist $p > 3$ eine nicht in der Diskriminante d_Ω aufgehende Primzahl, so stellt* $B\left(\frac{p-1}{2}\,|\,\mathfrak{A}_{\frac{p-1}{2}}\right)$ *eine für p ganze rationale Zahl dar.*

IV. Beispiele. Der im Satz IV ausgesprochene Sachverhalt sei nun an einigen Beispielen illustriert. Sei dazu $\Omega = P(\sqrt{65})$ der reell-quadratische Zahlkörper mit der Diskriminante $65 = 5\cdot 13$. Seine Grundeinheit ist $\varepsilon = \frac{1}{2}(16+2\sqrt{65}) > 1$ mit $N(\varepsilon) = -1$. Ω besitzt die absolute Klassenzahl 2. Die Einheitsklasse $\mathfrak{E}$ werde durch das Einheitsideal $\mathfrak{n} = \{\frac{1}{2}(1+\sqrt{65}), 1\}$ vertreten. Ein Repräsentant der anderen Klasse $\mathfrak{A}$ ist $\mathfrak{g} = \{\frac{1}{2}(5+\sqrt{65}), 5\}$ mit $\mathfrak{N}(\mathfrak{g}) = 5$. Dann ist $\chi_5(\mathfrak{E}) = \chi_{13}(\mathfrak{E}) = 1$, und gemäß (3.28) und (3.29) hat man $\chi_5(\mathfrak{A}) = \chi_{13}(\mathfrak{A}) = \left(\frac{13}{5}\right) = -1$. Nach Satz IV hat man:

$$\begin{aligned} &B(2|\,\mathfrak{E}) \equiv \frac{3}{5} \bmod 5^0, \qquad B(2|\,\mathfrak{A}) \equiv -\frac{3}{5} \bmod 5^0,\\ &B(6|\,\mathfrak{E}) \equiv \frac{8}{13} \bmod 13^0, \qquad B(6|\,\mathfrak{A}) \equiv -\frac{8}{13} \bmod 13^0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Die genauen Werte dieser hier aufgeführten Zahlen $B(k|\,\mathfrak{A}_k)$ sind bekannt. Sie wurden mit Hilfe der Barnerschen Formel (3.3) auf einer elektronischen Rechenanlage bestimmt. In Übereinstimmung mit (4.1) entnimmt man aus [8]:

$$B(2|\,\mathfrak{E}) = \frac{208}{5} = \frac{3}{5} + 41, \qquad B(2|\,\mathfrak{A}) = \frac{112}{5} = -\frac{3}{5} + 23.$$

Die Werte $B(6|\,\mathfrak{E})$ und $B(6|\,\mathfrak{A})$ sind aus einer unveröffentlichten Tabelle entnommen, die M. Pohst [12] anläßlich einer Diplomarbeit aufgestellt hat, und zwar gilt:

$$B(6|\,\mathfrak{E}) = \frac{307960755168}{5\cdot 13} = \frac{8}{13} + \frac{23689288856}{5}$$

und

$$B(6|\,\mathfrak{A}) = \frac{9646408992}{5\cdot 13} = -\frac{8}{13} + \frac{742031464}{5}.$$

Literaturverzeichnis

[1] T. M. Apostol, *Generalized Dedekind sums and transformation formulae of certain Lambert series*, Duke Math. J. 17 (1950), S. 217–220.

[2] K. Barner, *Über die Werte der Ringklassen-L-Funktionen reell-quadratischer Zahlkörper an natürlichen Argumentstellen*, J. Number Theory, 1, (1) (1969), S. 28–64.

[3] L. Carlitz, *Some theorems on generalized Dedekind sums*, Pacific J. Math. 3 (1953), S. 513–522.

[4] G. Frobenius, *Über die Bernoullischen Zahlen und die Eulerschen Polynome*, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wissenschaften (1910), S. 809–847; Mathematische Werke, Bd. III, Berlin–Heidelberg–New York 1968, S. 440–478.

[5] H. Hasse, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, Berlin–Göttingen–Heidelberg–New York 1964.

[6] E. Hecke, *Analytische Funktionen und algebraische Zahlen*, Teil 2. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 3 (1924), S. 213–236; Mathematische Werke, Göttingen 1959, S. 381–404.

[7] H. Klingen, *Über die Werte der Dedekindschen Zetafunktion*, Math. Annalen 145 (1962), S. 265–272.

[8] H. Lang, *Über eine Gattung elementar-arithmetischer Klasseninvarianten reell-quadratischer Zahlkörper*, J. Reine Angew. Math. 233 (1968), S. 123–175.

[9] — *Über Anwendungen höherer Dedekindscher Summen auf die Struktur elementar-arithmetischer Klasseninvarianten reell-quadratischer Zahlkörper*, J. Reine Angew. Math. 254 (1972), S. 17–32.

[10] C. Meyer, *Die Berechnung der Kassenzahl abelscher Körper über quadratischen Zahlkörpern*, Berlin 1957.

[11] — *Über die Bildung von elementar-arithmetischen Klasseninvarianten in reell-quadratischen Zahlkörpern*. Algebraische Zahlentheorie, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, Berichte, Heft 2 (1966), S. 165–215.

[12] M. Pohst, *Über die Werte der Zetafunktion an geraden Argumenten in reell-quadratischen und total reellen kubischen Zahlkörpern*, Diplomarbeit, Köln 1971.

[13] C. L. Siegel, *Bernoullische Polynome und quadratische Zahlkörper*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. (1968), S. 7–38.

[14] — *Berechnung von Zetafunktionen an ganzzahligen Stellen*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. (1969), S. 87–102.

MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Eingegangen 11. 2. 1972 (263)