ACTA ARITHMETICA
XXII (1973)

ERRATA

Page, line	For	Read
450^{18}	$(A, B$	(A, B)
450^{19}	A, A', A'	A, A', A''

XXII (1973)

Über die reellen Nullstellen der Dirichletschen L-Reihen*

von

W. Haneke (Marburg/Lahn)

I. Einleitung. Im Jahre 1837 bewies Dirichlet ([3], S. 313–342, 411–496) den lange vermuteten Satz, daß jede arithmetische Progression

$$l+kn \;(n = 1, 2, \ldots) \quad \text{mit} \quad 0 < l < k,\ (l, k) = 1$$

unendlich viele Primzahlen enthält. Die Analyse seines Beweises ergibt drei Hauptgedanken: Die Einführung der Charaktere $\chi \bmod k$, die Betrachtung der funktionentheoretischen Eigenschaften der zugeordneten L-Reihen

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} \quad (s = \sigma + it)$$

und der Beweis der sogenannten Klassenzahlformel.

Mit Hilfe der $\varphi(k)$ Charaktere $\chi \bmod k$, die den Bedingungen

$$\chi(m) = \chi(n) \quad \text{für} \quad m \equiv n \pmod k,$$
$$\chi(mn) = \chi(m)\chi(n) \quad \text{für alle ganzen } m, n,$$
$$\chi(n) \neq 0 \Leftrightarrow (n, k) = 1$$

genügen, gelingt es, aus der Menge aller Primzahlen diejenigen auszusondern, die $\equiv l \pmod k$ sind. Dies zeigt die für alle $\sigma > 1$ gültige Identität

$$(1.1) \qquad \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi \bmod k} \bar{\chi}(l) \log L(s, \chi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{\substack{p \\ p^m \equiv l \pmod k}} p^{-ms}.$$

Dabei bezeichnet p eine beliebige Primzahl.

* Die vorliegende Arbeit wurde von der Math.-Nat. Fakultät der Universität Marburg als Habilitationsschrift angenommen. Herrn Prof. Dr. H.-E. Richert verdanke ich wertvolle Hinweise zur Gestaltung dieser Arbeit.

Mit (1.1) erkannte Dirichlet, daß sich sein arithmetisches Problem auf die nachstehenden funktionentheoretischen Eigenschaften der Funktionen $L(s, \chi)$ zurückführen läßt:

Die für $\sigma > 1$ konvergente Produktentwicklung

$$L(s, \chi) = \prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1} \quad \text{für alle } \chi \bmod k$$

und die Relation

$$L(1, \chi) \neq 0 \quad \text{für alle } \chi \bmod k, \ \neq \chi_0, \tag{1.2}$$

wo χ_0 den Hauptcharakter mod k bezeichnet.

Ist nun χ ein komplexer Charakter mod k, so ergibt sich unmittelbar aus (1.1), daß $L(s, \chi)$ an der Stelle $s = 1$ nicht verschwinden kann. Der entsprechende Schluß versagt jedoch im Falle eines reellen Charakters $\chi \neq \chi_0$. Diese Tatsache veranlaßte Dirichlet, seine Klassenzahlformel herzuleiten, um mit deren Hilfe (1.2) vollständig zu beweisen. Um diese Formel aufschreiben zu können, benötigt man zunächst einen eigentlichen Charakter: Ein Charakter $\chi \bmod k$ heißt eigentlich, wenn kein echter Teiler K von k existiert, so daß für

$$n \equiv n' \pmod K, \qquad (n, k) = (n', k) = 1$$

stets

$$\chi(n) = \chi(n')$$

ist. Nach ([9], S. 478, § 125) existiert nun zu jedem Charakter $\chi \bmod k$ ein eindeutig bestimmter eigentlicher Charakter $\chi^* \bmod k^*$ mit k^*/k und

$$L(s, \chi) = L(s, \chi^*) \prod_{p|k} \left(1 - \frac{\chi^*(p)}{p^s}\right).$$

Insbesondere haben $L(s, \chi)$ und $L(s, \chi^*)$ in der Halbebene $\sigma > 0$ dieselben Nullstellen.

Nun kann man einen reellen eigentlichen Charakter $\chi_1 \neq \chi_0 \bmod k$ folgendermaßen durch das Kroneckersymbol $\left(\frac{d}{n}\right)$ ausdrücken (vgl. [15], S. 594, Hilfssatz 1):

Eine passende Zahl

$$d \in \{k, -k\} \tag{1.3}$$

ist eine Fundamentaldiskriminante, d.h.

$$d \equiv 1 \pmod 4, \quad d \text{ quadratfrei}, \ |d| > 1 \tag{1.4}$$

oder

$$d \equiv 0 \pmod 4, \quad \frac{d}{4} \equiv 2 \text{ oder } 3 \pmod 4, \quad \frac{d}{4} \text{ quadratfrei} \tag{1.5}$$

und stellt χ_1 vermöge

$$\chi_1(n) = \left(\frac{d}{n}\right) \quad \text{für} \quad n = 1, 2, \ldots \tag{1.6}$$

dar.

Wegen (1.3) bis (1.5) ist insbesondere

$$k = |d| \geqslant 3. \tag{1.7}$$

Bezeichnet nun $h(d)$ die Klassenzahl der binären quadratischen Formen

$$ax^2 + bxy + cy^2 \text{ der Diskriminante } b^2 - 4ac = d,$$

so besagt Dirichlets Klassenzahlformel (vgl. [10], S. 152, Satz 209 und S. 141):

$$L(1, \chi_1) = \begin{cases} \dfrac{2\pi h(d)}{w\sqrt{k}} & \text{für} \quad d < 0, \\[2ex] \dfrac{(\log \varepsilon_d) h(d)}{\sqrt{k}} & \text{für} \quad d > 0 \end{cases} \tag{1.8}$$

mit

$$w = \begin{cases} 6 & \text{für} \quad d = -3, \\ 4 & \text{für} \quad d = -4, \\ 2 & \text{für} \quad d < -4, \end{cases}$$

$$\varepsilon_d = \tfrac{1}{2} \min \{t + u\sqrt{d} \colon t, u = 1, 2, \ldots; \ t^2 - du^2 = 4\} \quad \text{für} \quad d > 0. \tag{1.9}$$

Wegen $h(d) \geqslant 1$, $\varepsilon_d \geqslant (\sqrt{k} + 1)/2 > 1$ (vgl. (1.7)) folgt als Verschärfung von (1.2) sogar

$$L(1, \chi_1) \geqslant \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{k}} & \text{für} \quad d < 0, \\[2ex] \dfrac{\log \dfrac{\sqrt{k} + 1}{2}}{\sqrt{k}} & \text{für} \quad d > 0. \end{cases} \tag{1.10}$$

Mit Hilfe der Abschätzung (1.10) konnte erstmalig A. Page [12] im Jahre 1933 für $L(s, \chi_1)$ einen größeren nullstellenfreien Bereich als Dirichlet nachweisen. Seine Hauptidee bestand darin, (1.10) mit einer oberen Abschätzung der Ableitung $L'(s, \chi_1)$ zu verbinden:

Mit

$$L'(s, \chi_1) \ll \log^2 k \quad \text{für} \quad 1 - \frac{c_1}{\log k} < s < 1 \tag{1.11}$$

erhielt er (vgl. (1.7)) $L(s, \chi_1) \neq 0$ für

$$(1.12)\qquad s > \begin{cases} 1 - \dfrac{c_2}{\sqrt{k}\,\log^2 k}, & \text{falls} \quad d < 0, \\[2ex] 1 - \dfrac{c_2}{\sqrt{k}\,\log k}, & \text{falls} \quad d > 0. \end{cases}$$

Dabei bezeichnen c_1, c_2, und später $c_3, c_4, \ldots$ geeignete positive absolute Konstanten, die sich mit einem endlichen Verfahren wirklich numerisch angeben lassen. Im folgenden nennen wir derartige absolute Konstanten effektiv. Die $\ll$-Konstante in (1.11) und alle weiteren $\ll$-und O-Konstanten dieser Arbeit sind absolut und effektiv.

C. L. Siegel [14] zeigte im Jahre 1935, daß (1.10) sich wesentlich verschärfen läßt, wenn k größer als eine im allgemeinen nicht effektive Konstante ist:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Zahl $k_0(\varepsilon) > 1$ mit

$$(1.13)\qquad L(1, \chi_1) > k^{-\varepsilon} \quad \text{für} \quad k > k_0(\varepsilon).$$

Der Nachteil dieses für die Analytische Zahlentheorie hochbedeutsamen Resultats besteht offenbar darin, daß es lediglich die Existenz einer Funktion $k_0(\varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$ mit der Eigenschaft (1.13) garantiert.

Mit (1.11) schließt man aus (1.13), daß eine Funktion $C(\varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$ mit

$$(1.14)\qquad L(s, \chi_1) \neq 0 \quad \text{für alle } s > 1 - \frac{C(\varepsilon)}{k^{\varepsilon}}, \ \varepsilon > 0$$

existiert. Bis heute sind alle Versuche fehlgeschlagen, $C(\varepsilon)$ auch nur für ein $\varepsilon < \frac{1}{2}$ wirklich anzugeben.

Die erste effektive Verschärfung von (1.12) erzielte H. Davenport [2] 33 Jahre nach Page: Es ist $L(s, \chi_1) \neq 0$ für

$$(1.15)\qquad s > \begin{cases} 1 - \dfrac{c_3}{\sqrt{k}\,\log_2 k}, & \text{falls} \quad d < 0, \\[2ex] 1 - \dfrac{c_3 \log k}{\sqrt{k}\,\log_2 k}, & \text{falls} \quad d > 0; \end{cases}$$

und, falls k eine Primzahl ist, sogar für

$$(1.16)\qquad s > \begin{cases} 1 - \dfrac{c_3}{\sqrt{k}}, & \text{falls} \quad d < 0, \\[2ex] 1 - \dfrac{c_3 \log k}{\sqrt{k}}, & \text{falls} \quad d > 0. \end{cases}$$

Dies gelang mit Hilfe der Abschätzung

$$(1.17)\qquad L'(s, \chi_1) \ll \frac{H(d)}{\log k} + \Big(\sum_{d|2k} \frac{\mu^2(d)}{d}\Big) \sum_{\substack{n < \log^3 k \\ p|n \Rightarrow 2<p,\, \chi_1(p)=1}} \frac{1}{n} \qquad (1 - k^{-1/4} \leqslant s \leqslant 1),$$

wo

$$(1.18)\qquad H(d) = \begin{cases} h(d) & \text{im Falle} \quad d < 0, \\ h(d) \log \varepsilon_d & \text{im Falle} \quad d > 0 \end{cases}$$

gesetzt ist: Für

$$k \geqslant c_4, \qquad H(d) \leqslant \log^3 k, \qquad 1 - k^{-1/4} \leqslant s \leqslant 1$$

stellt nämlich (1.17) eine Verschärfung von (1.11) dar.

Das Anliegen dieser Arbeit besteht nun darin, mit einer weiteren Verbesserung der Abschätzungen (1.11) und (1.17) aus (1.10) ein möglichst großes nullstellenfreies Intervall der reellen Geraden für die Funktion $L(s, \chi_1)$ herzuleiten. Unsere Ergebnisse lauten folgendermaßen:

Satz 1. *Es gilt*

$$(1.19)\qquad L'(s, \chi_1) \ll \log^2 (H(d) + 3) \quad \textit{für} \quad 0 \leqslant 1 - s \leqslant \frac{c_5}{\log^3 k}.$$

Außerdem lassen sich zu jedem $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ positive, absolute effektive Konstanten $c(\varepsilon), c'(\varepsilon)$ derart angeben, daß

$$(1.20)\qquad L'(s, \chi_1) \ll \Big(c(\varepsilon) \frac{\log(H(d) + 3)}{\log_2 k} + 1\Big)^2$$

für

$$k \geqslant c'(\varepsilon), \qquad \log (H(d) + 3) \leqslant \log^{\frac{1}{2} - \varepsilon} k, \qquad 0 \leqslant 1 - s \leqslant \frac{c_5}{\log^3 k}$$

gilt.

Satz 2. *Ist χ ein beliebiger reeller Charakter* mod k, $\neq \chi_0$, *so gilt*

$$L(s, \chi) \neq 0$$

für

$$(1.21)\qquad s > \begin{cases} 1 - \dfrac{c_6}{\sqrt{k}}, & \textit{falls } d < 0, \\[2ex] 1 - \dfrac{c_6 \log k}{\sqrt{k}}, & \textit{falls } d > 0. \end{cases}$$

Um Satz 1 mit (1.11) bzw. (1.17) zu vergleichen, merken wir zunächst die wegen (1.7) gültige Abschätzung

$$L(1, \chi_1) \ll \log k$$

an (vgl. [13], S. 140, Lemma 8.1). Wegen (1.8) und (1.18) folgt daraus sofort

$$\mathrm{H}(d) \ll \sqrt{k}\log k. \tag{1.22}$$

Daher ist schon (1.19) für alle s aus dem dort angegebenem Intervall eine Verschärfung von (1.11). Andererseits ist die rechte Seite von (1.17)

$$\geqslant \frac{H(d)}{\log k}+1 \gg \begin{cases} 1 & \text{stets}, \\ \left(\dfrac{\log\left(H(d)+3\right)}{\log_2 k}\right)^2 & \text{für} \quad \log\left(H(d)+3\right) > \log_2 k, \end{cases}$$

(1.20) verbessert also (1.17). Im Falle

$$\log\left(H(d)+3\right) \ll \log_2 k$$

folgt aus (1.20)

$$L'(1, \chi_1) \ll 1.$$

Dies läßt sich bis auf die $\ll$-Konstante nicht mehr weiter verschärfen. Denn nach W. Fluch [5] folgt schon aus der Voraussetzung

$$H(d) \ll \frac{\sqrt{k}}{\log k}$$

die Ungleichung,

$$L'(1, \chi_1) \gg 1.$$

Mit Satz 2 gewinnen wir ferner eine Verbesserung der Davenportschen Resultate (1.15) und (1.16). Die Bedingung (1.21) unterscheidet sich nämlich von (1.16) nur durch die möglicherweise von c_3 verschiedene Konstante c_6. H. Davenport muß jedoch zusätzlich fordern, daß k eine Primzahl ist, um (1.16) als nullstellenfreies Intervall für $L(s, \chi_1)$ nachzuweisen. Dagegen tritt im allgemeinen Fall (1.15) noch der Faktor $\log_2 k$ auf. Andererseits ist aber (1.21), abgesehen von der Konstanten c_6, die bestmögliche Folgerung aus (1.10): Dies erkennt man unmittelbar mit der Abschätzung (2.58) aus Hilfssatz 19. Eine wesentliche effektive Verschärfung von Satz 2 läßt sich also nur dann gewinnen, wenn es gelingt, die Klassenzahl $h(d)$ durch eine effektiv berechenbare, mit k streng monoton wachsende Funktion nach unten abzuschätzen.

Hilfssatz 20 und speziell (2.70) zeigen, daß (1.14) und Satz 2 für höchstens eine reelle Nullstelle β_1 einer Funktion $L(s, \chi_1)$ mit reellem Charakter $\chi_1 \neq \chi_0$ eine nichttriviale Aussage machen. Für die von dieser möglicherweise existierenden "Ausnahmenullstelle" β_1 verschiedenen Nullstellen $\beta+i\gamma$ der Funktionen $L(s, \chi)$ ($\chi \bmod k$) läßt sich $1-\beta$ erheblich besser und einfacher als $1-\beta_1$ abschätzen.

Dieses Phänomen spiegelt sich in der Verteilung der Primzahlen $p \equiv l \pmod k$ ($(l, k) = 1$) wider [13], S. 136, Satz 7.3:

Mit absoluten, effektiven Konstanten A_1, A_2, A_3 gilt

$$\sum_{\substack{p<x \\ p\equiv l \pmod k}} \log p = \frac{x}{\varphi(k)} - E + O\left(xe^{-A_1\sqrt{\log x}}\right) \quad \text{für} \quad 1 \leqslant k \leqslant e^{A_2\sqrt{\log x}},$$

$$E = \begin{cases} \dfrac{\chi_1(l)}{\varphi(k)}\,\dfrac{x^{\beta_1}}{\beta_1}, & \text{falls ein reelles } \beta_1 > 1-\dfrac{A_2}{\log k} \\ & \text{Nullstelle einer Funktion } L(s, \chi_1) \text{ ist}, \\ 0 & \text{sonst}. \end{cases}$$

Die zahlentheoretische Bedeutung eines solchen Primzahlsatzes hängt offenbar hauptsächlich von der Qualität einer oberen Abschätzung des Ausnahmewerts β_1 ab; insbesondere erkennt man die Auswirkungen bei der Behandlung zahlreicher additiver Probleme der Analytischen Zahlentheorie, die die Frage nach der Darstellungsmöglichkeit einer natürlichen Zahl als Summe einer oder mehrerer Primzahlen und einer Zahl aus einer vorgegebenen Menge aufwerfen (vgl. [8], [11], [12], [13], [15]).

II. Hilfsmittel. Unser Beweis zerfällt in einen arithmetischen und einen analytischen Teil. Zunächst wollen wir die arithmetischen Hilfssätze zusammenstellen.

Um einen Anschluß an die Dirichletsche Klassenzahlformel zu gewinnen, betrachten wir bei vorgegebener Fundamentaldiskriminante d alle quadratischen Formen

$$F = F(x, y) = ax^2+bxy+cy^2 = \{a, b, c\} \quad \text{mit } b^2-4ac = d \tag{2.1}$$
$$\text{und } a > 0 \text{ im Falle } d < 0.$$

Äquivalenz zweier Formen

$$F = \{a, b, c\}, \quad F' = \{a', b', c'\}$$

bedeutet wie üblich: Es gibt ganze Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ mit

$$\alpha\delta-\beta\gamma = 1,$$
$$F'(x, y) = F(\alpha x+\beta y, \gamma x+\delta y).$$

Mit Hilfe der unimodularen Matrix

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

schreiben wir statt dessen auch kurz

$$F' = \mathcal{M}F. \tag{2.2}$$

Um die durch (2.2) erklärten $h(d)$ Klassen äquivalenter quadratischer Formen zu überschauen, macht man zunächst ein System sogenannter reduzierter Formen ausfindig, so daß jede Form der Gestalt (2.1) einer dieser Formen äquivalent ist:

Im Falle $d<0$ heißt $F=\{a,b,c\}$ reduziert, wenn

$$(2.3)\qquad -a<b\leqslant a<c \quad\text{oder}\quad 0\leqslant b\leqslant a=c$$

ist, und im Falle $d>0$ nennt man unter den Voraussetzungen

$$(2.4)\qquad 0<\sqrt{d}-b<2\,|a|<\sqrt{d}+b$$

F reduziert.

Mit diesen Vereinbarungen gilt nach ([10], S. 135, Satz 198)

Hilfssatz 1. *Im Falle $d<0$ ist die Anzahl aller reduzierten Formen gleich $h(d)$.*

Im Falle $d>0$ ist dies leider nicht mehr richtig; vielmehr folgt dann nach H. Davenport ([2], S. 204, Hilfssatz 1) aus tiefliegenden Ergebnissen von Gauß ([6]; art. 183–198).

Hilfssatz 2. *Im Falle $d>0$ ist die Anzahl aller reduzierten Formen*

$$\ll h(d)\log\varepsilon_d.$$

Die Gaußschen Beweise derjenigen Sätze, die dieser Abschätzung zugrundeliegen, sind von Dirichlet vereinfacht worden (vgl. [4], § 72 – § 85); sie sind aber auch in seiner Darstellung für unsere Zwecke zu langwierig. Wir wollen daher Hilfssatz 2 auf einem kürzeren Wege beweisen. Dies gelingt mit den nachstehenden Hilfssätzen aus der Theorie der binären quadratischen Formen und der Theorie der Kettenbrüche, bei deren Formulierung wir stets $d>0$ voraussetzen.

Hilfssatz 3 (vgl. [10], S. 139, Satz 202). *Zu vorgegebenem $F=\{a,b,c\}$ haben alle unimodularen Matrizen $\mathcal{M}$ mit*

$$F=\mathcal{M}F$$

die Gestalt

$$\mathcal{M}=\begin{pmatrix}\dfrac{t-bu}{2} & -cu\\ au & \dfrac{t+bu}{2}\end{pmatrix},$$

wo t,u eine beliebige Lösung der Pellschen Gleichung

$$t^2-du^2=4$$

ist.

Hilfssatz 4. *Ist $\{a,b,c\}$ reduziert, so gilt $b>0$ und $ac<0$.*

Beweis. Wegen

$$\sqrt{d}-b<\sqrt{d}+b,\qquad d>0$$

ist $b>0$, und daraus folgt wegen $\sqrt{d}-b>0$

$$b^2<d=b^2-4ac,$$

also

$$ac<0.$$

Hilfssatz 5. *Mit ganzen t,u sei*

$$(2.5)\qquad t^2-du^2=4,\qquad u<0<t.$$

Ist dann $\{a,b,c\}$ reduziert und $a<0$; so gilt

$$au\geqslant\frac{t+bu}{2}>0.$$

Beweis. Wegen (2.4), $a<0$ und Hilfssatz 4 gilt

$$d=b^2+4|a|c,\qquad \sqrt{d}-b<2|a|;\qquad b,c>0.$$

Daraus folgt

$$(2.6)\qquad b^2+4\,|a|\,c<(b+2\,|a|)^2=b^2+4b\,|a|+4a^2$$

oder

$$|a|\,b-|a|\,c+a^2>0.$$

Die linke Seite dieser Ungleichung ist also eine positive ganze Zahl und daher $\geqslant 1$. Die Ungleichung (2.6) läßt sich somit wegen (2.5) zu

$$t^2=du^2+4\leqslant u^2(d+4)\leqslant u^2(b+2\,|a|)^2,$$

also

$$(b+2\,|a|)\,|u|\geqslant t>0$$

verschärfen. Andererseits folgt aus (2.5) und Hilfssatz 4

$$t>\sqrt{d}\,|u|>|bu|$$

und damit die Behauptung.

Für eine Form $F=\{a,b,c\}$ mit der Diskriminante d gilt stets $a\neq 0$. Aus $a=0$ würde nämlich $d=b^2$ folgen, und dies wäre mit keiner der Bedingungen (1.4), (1.5) verträglich.

Daher ist es sinnvoll, im Falle $d>0$ der Form F die beiden Wurzeln

$$\omega_F=\frac{-b-\sqrt{d}}{2a},\qquad \omega_F'=\frac{-b+\sqrt{d}}{2a}$$

der Gleichung $F(x,1)=0$ zuzuordnen.

Hiermit bereiten wir den entscheidenden Schritt zum Beweis von Hilfssatz 2 vor, nämlich das Studium einer Kettenbruchentwicklung der Zahlen

$$|\omega_F|.$$

Hilfssatz 6 (vgl. [1], S. 113, Nr. 9). *Ist für eine unimodulare Matrix* $\mathscr{M}$

$$F = \mathscr{M} F^* \quad \textit{und etwa} \quad \mathscr{M} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

so gilt

$$\omega_F = \frac{\alpha\omega_{F^*}+\beta}{\gamma\omega_{F^*}+\delta}.$$

Hilfssatz 7. *F ist genau dann reduziert, wenn die Ungleichungen*

(2.7) $$|\omega_F| > 1 > |\omega_F'|$$

und

(2.8) $$\omega_F \omega_F' < 0$$

gelten.

Beweis. Für $F = \{a, b, c\}$ ist (2.7) mit

(2.9) $$|\sqrt{d}-b| < 2|a| < |\sqrt{d}+b|$$

äquivalent. Andererseits ist

$$\omega_F\omega_F' = \frac{b^2-d}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Ist also F reduziert, so folgen mit Hilfssatz 4 und (2.9) auch (2.7) und (2.8). Sind umgekehrt (2.7) und (2.8) erfüllt, so ergibt sich

$$\frac{c}{a} < 0, \qquad ca < 0$$

und daher

$$\sqrt{d} = (b^2+4|ac|)^{1/2} > |b|.$$

Also ist

$$|\sqrt{d}\pm b| = \sqrt{d}\pm b > 0,$$

und mit (2.9) folgt (2.4), d.h. F ist reduziert.

Hilfssatz 8. *Für $F = \{a, b, c\}$ werde $F^- = \{-a, b, -c\}$ gesetzt. Sind nun F_1, F_2 beliebige Formen der Diskriminante d, so folgt aus*

(2.10) $$\omega_{F_1} = \theta\omega_{F_2} \qquad (\theta \in \{1, -1\}):$$

$$F_1 = \begin{cases} F_2, & \textit{falls} \quad \theta = 1, \\ F_2^-, & \textit{falls} \quad \theta = -1. \end{cases}$$

Beweis. Aus (2.10) folgt

$$\theta\frac{b_1+\sqrt{d}}{2a_1} = \frac{b_2+\sqrt{d}}{2a_2}$$

und daraus unmittelbar

$$a_1 = \theta a_2, \qquad b_1 = b_2.$$

Andererseits ist

$$d = b_1^2-4a_1c_1 = b_2^2-4a_2c_2,$$

und damit hat man auch

$$c_1 = \theta c_2.$$

Hilfssatz 9. *Jeder Form F werde die Form*

$$F^* = \begin{pmatrix} a_F & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} F \qquad \textit{mit} \qquad a_F = [|\omega_F|]\,\mathrm{sgn}(\omega_F)$$

zugeordnet. Mit $F = \{a, b, c\}$ ist dann auch $F^* = \{a^*, b^*, c^*\}$ reduziert, und es gilt außerdem

(2.11) $$c^* = a,$$

(2.12) $$|\omega_F| = |a_F| + \frac{1}{|\omega_{F^*}|}.$$

Beweis. Die Matrix

$$\begin{pmatrix} a_F & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ist unimodular, nach Hilfssatz 6 gilt also

(2.13) $$\omega_F = a_F - \frac{1}{\omega_{F^*}}.$$

Nach (2.2) ergibt sich (2.11) aus $c^* = F(-1, 0) = a$.

Nun sei F reduziert, nach Hilfssatz 7 (2.7) also $|\omega_F| > 1$. Mit $\theta = \mathrm{sgn}(\omega_F)$ folgt dann

$$1 < |\omega_F| = [|\omega_F|] - \frac{1}{\theta\omega_{F^*}} < [|\omega_F|]+1,$$

insbesondere also

(2.14) $$0 < \frac{-1}{\theta\omega_{F^*}} < 1.$$

Ferner ergibt sich mit (2.7), (2.8) und (2.14)

$$-1 < \theta\omega_F' = \theta a_F + \frac{1}{-\theta\omega_{F^*}'} < 0, \qquad \theta\omega_{F^*}' = \frac{1}{\theta a_F - \theta\omega_F'}$$

und damit wegen $\theta a_F \geqslant 1$, $\mathrm{sgn}(\theta\omega_F') = -\mathrm{sgn}(\theta\omega_F) = -1$

(2.15) $$0 < \theta\omega_{F^*}' < 1.$$

Nach (2.14) und (2.15) sind (2.7) und (2.8) mit F^* an Stelle von F erfüllt. Nach Hilfssatz 7 ist also F^* reduziert.

Schließlich folgt aus der Definition von θ mit (2.13) und (2.14) sofort (2.12).

Hilfssatz 10. *$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ sei eine unimodulare Matrix mit*

$$\gamma \geqslant \delta > 0, \tag{2.16}$$

und für ein $\zeta > 1$ sei

$$x = \frac{\alpha\zeta+\beta}{\gamma\zeta+\delta}.$$

Dann gibt es ganze Zahlen $A_0, \ldots, A_n$ mit $A_1, \ldots, A_n > 0$, $n \equiv 1 \pmod 2$, so daß die Kettenbruchentwicklungen

$$x = A_0 + \frac{1}{A_1+} \cdots \frac{1}{A_n+}\,\frac{1}{\zeta},$$

$$\frac{\alpha}{\gamma} = A_0 + \frac{1}{A_1+} \cdots \frac{1}{A_n},$$

$$\frac{\beta}{\delta} = A_0 + \frac{1}{A_1+} \cdots \frac{1}{A_{n-1}}$$

gelten.

Beweis. Im Falle $\gamma > \delta$ wird dies in ([7], S. 140–141, Nr. 10.10) bewiesen. Im Falle $\gamma = \delta$ ist wegen $\gamma, \delta > 0$, $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$

$$\gamma = \delta = 1, \qquad \alpha = \beta + 1,$$

und daraus folgt mit $A_0 = \beta$, $A_1 = 1$, $n = 1$:

$$x = \frac{(\beta+1)\zeta+\beta}{\zeta+1} = \beta + \frac{\zeta}{\zeta+1} = \beta + \frac{1}{1+1/\zeta} = A_0 + \frac{1}{A_1 + 1/\zeta},$$

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \beta + 1 = A_0 + \frac{1}{a_1},$$

$$\frac{\beta}{\delta} = \beta = A_0$$

also ebenfalls die Behauptung.

Hilfssatz 11 (vgl. [7], S. 142, Theorem 175). *Es seien die einfachen Kettenbrüche*

$$z = A_0 + \frac{1}{A_1+}\,\frac{1}{A_2+} \cdots,$$

$$\zeta = B_0 + \frac{1}{B_1+}\,\frac{1}{B_2+} \cdots$$

gegeben. Gilt dann für eine unimodulare Matrix $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$

$$z = \frac{\alpha\zeta+\beta}{\gamma\zeta+\delta},$$

so gibt es ganze $\varkappa, \lambda \geqslant 0$ mit

$$A_{\varkappa+\nu} = B_{\lambda+\nu} \quad \text{für} \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots$$

Hilfssatz 12. *Die Menge aller zu einer beliebigen reduzierten Form äquivalenten reduzierten Formen enthält höchstens $O(\log \varepsilon_d)$ Elemente.*

Beweis. Wir konstruieren zu einer vorgegebenen reduzierten Form F eine Menge R_F reduzierter Formen mit den folgenden Eigenschaften:

(2.17) Jede zu F äquivalente reduzierte Form $\tilde{F}$ gehört zu R_F.

(2.18) R_F enthält höchstens $O(\log \varepsilon_d)$ Elemente.

Dazu definieren wir gemäß Hilfssatz 9 induktiv

$$F_0 = F, \qquad F_\nu = F^*_{\nu-1} \quad (\nu \geqslant 1). \tag{2.19}$$

Die Formen F_ν sind dann reduziert, und nach (2.12) hat man die einfachen Kettenbruchentwicklungen

$$|\omega_{F_\nu}| = A_\nu + \frac{1}{A_{\nu+1}+}\,\frac{1}{A_{\nu+2}+} \cdots \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2.20}$$

mit

$$A_\nu \geqslant 1 \quad \text{für alle } \nu \geqslant 0. \tag{2.21}$$

Setzt man

$$F_\nu = \{a_\nu, b_\nu, c_\nu\}, \tag{2.22}$$

so gilt nach (2.11)

$$c_\nu = a_{\nu-1} \quad (\nu \geqslant 1),$$

und nach Hilfssatz 4 ist stets $a_\nu c_\nu < 0$. Damit haben wir

$$a_\nu a_{\nu-1} < 0 \quad \text{für} \quad \nu = 1, 2, \ldots \tag{2.23}$$

Nun gibt es höchstens endlich viele reduzierte Formen, denn aus (2.4) folgt

$$0 < b < \sqrt{d}, \qquad 2|a| < 2\sqrt{d},$$

und durch $a, b, b^2 - 4ac = d$ ist c eindeutig bestimmt.

Also existiert eine natürliche Zahl r mit

$$F_r = F; \quad F_j \neq F \quad \text{für} \quad 1 \leqslant j < r, \tag{2.24}$$

$$r \equiv 0 \pmod 2. \tag{2.25}$$

Wir zeigen nun, daß

(2.26) $$R_F = \{F_0, \dots, F_{r-1}\} \cup \{F_0^-, \dots, F_{r-1}^-\}$$

die Eigenschaften (2.17) und (2.18) besitzt (vgl. Hilfssatz 8).

Zunächst sei $\tilde{F}$ eine reduzierte zu F äquivalente Form. Analog zu (2.20) erhalten wir eine einfache Kettenbruchentwicklung

(2.27) $$|\omega_{\tilde{F}}| = B_0 + \frac{1}{B_1+}\frac{1}{B_2+}\dots$$

mit einer Periode $\tilde{r}$, also

(2.28) $$B_j = B_{j+\tilde{r}} \quad \text{für} \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Nach Hilfssatz 6 gilt mit einer passenden unimodularen Matrix $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$

$$\omega_F = \frac{\alpha\omega_{\tilde{F}} + \beta}{\gamma\omega_{\tilde{F}} + \delta},$$

nach Hilfssatz 11 gibt es also ganze $\varkappa, \lambda \geqslant 0$ mit

$$A_{\varkappa+\nu} = B_{\lambda+\nu} \quad \text{für} \quad \nu = 0, 1, 2, \dots$$

Aus (2.28) folgt nun

$$B_\mu = B_{\lambda+\mu+\lambda(\tilde{r}-1)} = A_{\varkappa+\mu+\lambda(\tilde{r}-1)} = A_{N+\mu} \quad \text{für} \quad \mu = 1, 2, \dots$$

und die von μ unabhängige Zahl $N = \varkappa + \lambda(\tilde{r}-1) \geqslant 0$.

Mit (2.20) und (2.27) folgt daraus

$$|\omega_{\tilde{F}}| = |\omega_{F_N}|,$$

nach Hilfssatz 8 gilt also

$$\tilde{F} \in \{F_N, F_N^-\}.$$

Nach (2.24) gibt es aber ein $j \in [0, r)$ mit

$$F_j = F_N.$$

Dies besagt nach (2.26):

$$\tilde{F} \in R_F.$$

Damit haben wir (2.17) nachgewiesen.

Zum Beweis von (2.18) definieren wir

(2.29) $$\begin{aligned} &P_0 = A_0, \; P_1 = A_1A_0 + 1; \quad P_\nu = A_\nu P_{\nu-1} + P_{\nu-2} \quad (\nu \geqslant 2),\\ &Q_0 = 1, \quad Q_1 = A_1; \quad Q_\nu = A_\nu Q_{\nu-1} + Q_{\nu-2} \quad (\nu \geqslant 2).\end{aligned}$$

Nach [7], S. 131, Theorem 150, ist dann

(2.30) $$P_\nu Q_{\nu-1} - P_{\nu-1}Q_\nu = (-1)^{\nu-1} \quad (\nu = 1, 2, \dots).$$

Andererseits folgt aus (2.24)

$$A_j = A_{j+r} \quad \text{für} \quad j = 0, 1, 2, \dots,$$

also

$$\omega = |\omega_F| = A_0 + \frac{1}{A_1+}\dots\frac{1}{A_{r-1}+}\frac{1}{\omega}$$

und daher nach [7], S. 130, Theorem 149, mit (2.25), (2.29) und (2.30)

$$\omega = \frac{P_{r-1}\omega + P_{r-2}}{Q_{r-1}\omega + Q_{r-2}}, \quad P_{r-1}Q_{r-2} - P_{r-2}Q_{r-1} = 1.$$

Nach Hilfssatz 6 und Hilfssatz 8 erfüllt also die unimodulare Matrix

$$\mathscr{M} = \begin{pmatrix}P_{r-1} & P_{r-2}\\ Q_{r-1} & Q_{r-2}\end{pmatrix}$$

die Voraussetzung $F = \mathscr{M}F$ aus Hilfssatz 3.

Für

(2.31) $$t' = |P_{r-1} + Q_{r-2}|, \quad u' = \left|\frac{1}{b}(Q_{r-2} - P_{r-1})\right|$$

gilt somit

(2.32) $$t'^2 - du'^2 = 4.$$

Wir zeigen nun, daß

(2.33) $$\frac{t' + u'\sqrt{d}}{2} = \varepsilon_d$$

ist. Dazu seien ganze t, u mit

(2.34) $$t^2 - du^2 = 4, \quad t > 0 > u$$

gegeben. Nach Hilfssatz 3 ist dann

(2.35) $$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dfrac{t-bu}{2} & -cu\\ au & \dfrac{t+bu}{2}\end{pmatrix}$$

unimodular, und es gilt

$$F = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} F.$$

Da R_F und R_{F_1} gleichviele Elemente besitzen (vgl. (2.24) und (2.26)) und nach (2.22) und (2.23) aus $a_0 > 0$ die Ungleichung $a_1 < 0$ folgt, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$a_0 < 0$$

voraussetzen. Nach Hilfssatz 5 gilt dann

$$\gamma \geqslant \delta > 0,$$

und dies ist die Bedingung (2.16) aus Hilfssatz 10.

Ferner ergibt sich mit Hilfssatz 6

$$\omega = \frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$$

also nunmehr mit Hilfssatz 10 und (2.29) bei passendem $n \equiv 1 \pmod 2$

$$\omega = A_0 + \frac{1}{A_1+}\cdots\frac{1}{A_n+}\frac{1}{\omega}, \tag{2.36}$$

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{P_n}{Q_n}, \quad \frac{\beta}{\delta} = \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} \tag{2.37}$$

da sich die Irrationalzahl ω nur auf eine Weise in einen einfachen unendlichen Kettenbruch entwickeln läßt.

Insbesondere erhält man mit (2.36)

$$A_\nu = A_{\nu+n+1} \quad \text{für} \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.38}$$

Wegen (2.30) ist $(P_\nu, Q_\nu) = 1$ für alle $\nu \geqslant 0$. Wegen $\gamma, \delta > 0$ folgt also aus (2.37)

$$\alpha = P_n, \quad \delta = Q_{n-1}$$

und damit nach (2.35)

$$t = P_n + Q_{n-1}, \quad bu = Q_{n-1} - P_n. \tag{2.39}$$

Weiter folgt aus (2.38) und (2.20)

$$|\omega_{F_\nu}| = |\omega_{F_{\nu+n+1}}| \quad \text{für} \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots,$$

also nach Hilfssatz 8

$$F_\nu = F_{\nu+n+1} \quad \text{oder} \quad F_\nu = F^-_{\nu+n+1}.$$

Wegen $n+1 \equiv 0 \pmod 2$ und (2.22), (2.23) ist aber

$$\operatorname{sgn}(a_\nu) = \operatorname{sgn}(a_{\nu+n+1}) \quad \text{für} \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots,$$

also muß (vgl. Hilfssatz 8)

$$F_\nu = F_{\nu+n+1} \quad \text{für} \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots$$

gelten. Nach (2.24) folgt daraus

$$n+1 \equiv 0 \pmod r,$$

insbesondere also

$$n \geqslant r-1. \tag{2.40}$$

Andererseits erhält man mit vollständiger Induktion unmittelbar aus (2.21) und (2.29)

$$0 \leqslant P_\nu \pm Q_{\nu-1} \leqslant P_{\nu+1} \pm Q_\nu \quad \text{für} \quad \nu = 1, 2, \ldots \tag{2.41}$$

und

$$Q_0, Q_1 \geqslant 1; \quad Q_\nu \geqslant 2Q_{\nu-2} \quad \text{für} \quad \nu = 2, 3, \ldots \tag{2.42}$$

Mit (2.31), (2.39), (2.40) und (2.41) gewinnen wir die Abschätzungen

$$|t| \geqslant t', \quad |u| \geqslant u'. \tag{2.43}$$

Auf Grund der Definition von ε_d (vgl. (1.9)) erkennt man nun mit (2.32), (2.34) und (2.43) die Identität (2.33).

Aus (2.25), (2.31), (2.33), (2.41) und (2.42) folgt schließlich

$$2^{(r-2)/2} \leqslant Q_{r-2} \leqslant t' \leqslant 2\varepsilon_d,$$

also

$$r \ll \log \varepsilon_d.$$

Damit haben wir auch (2.18) bewiesen.

Mit der Einteilung aller Formen der Diskriminante d in $h(d)$ Äquivalenzklassen gewinnt man nun eine Zerlegung der Menge der reduzierten Formen in $h(d)$ Teilmengen, die jeweils nach Hilfssatz 12 höchstens $O(\log \varepsilon_d)$ Elemente enthalten.

Damit ist aber Hilfssatz 2 vollständig bewiesen.

Im folgenden ist d wieder eine beliebige Fundamentaldiskriminante.

Hilfssatz 13 (vgl. [10], S. 52, Satz 97). *Es sei ν eine natürliche, zu d teilerfremde Zahl. Dann ist die Lösungszahl von*

$$x^2 \equiv d \pmod{4\nu}$$

gleich

$$2 \sum_{\substack{1 \leqslant n | \nu \\ \mu(n) \neq 0}} \left(\frac{d}{n}\right).$$

Als abschließenden und wichtigsten unserer arithmetischen Hilfssätze beweisen wir

Hilfssatz 14. *Mit den Abkürzungen* (1.18), $k = |d|$, $\chi_1(n) = (d/n)$ $(n > 0)$ *gilt*

$$\sum_{\substack{\nu \leqslant \sqrt{k}/2 \\ p|\nu \Rightarrow \chi_1(p) = 1}} 1 \ll H(d).$$

Beweis. Mit $\chi_1(p) = 1$ für alle $p|\nu$ $(\nu \geqslant 1)$ folgt

$$\left(\frac{d}{m}\right) = 1 \quad \text{für alle } m|\nu.$$

Nach Hilfssatz 13 existiert also eine ganze Zahl b_1 mit

(2.44) $$-2\nu < b_1 \leqslant 2\nu,$$

(2.45) $$b_1^2 \equiv d \pmod{4\nu}.$$

Außerdem gilt

(2.46) $$(b_1, \nu) = 1,$$

denn andernfalls wäre $(d, \nu) > 1$, und dann gäbe es im Widerspruch zur Voraussetzung ein $p|\nu$ mit $\chi_1(p) = 0$.

Aus (2.45) folgt

$$(2\nu \pm b_1)^2 \equiv b_1^2 \equiv d \pmod{4\nu}$$

und aus (2.44) und (2.46)

$$-\nu < 2\nu - b_1 < \nu \quad \text{im Falle } b_1 \geqslant \nu,$$

$$-\nu < 2\nu + b_1 < \nu \quad \text{im Falle } b_1 \leqslant -\nu.$$

Daher gibt es eine ganze Zahl b mit

(2.47) $$|b| < \nu,$$

(2.48) $$b^2 \equiv d \pmod{4\nu}.$$

Im Falle $d > 0$ sei b' die eindeutig durch

(2.49) $$b'^2 \equiv b^2 \pmod{4\nu},$$

(2.50) $$\sqrt{d} - 2\nu < b' < \sqrt{d}$$

bestimmte Zahl.

Wir setzen nun außerdem

(2.51) $$\nu \leqslant \sqrt{k}/2$$

voraus und stellen eine umkehrbar eindeutige Zuordnung der Zahl ν zu einer reduzierten Form F^ν her. Wir setzen

$$F^\nu = \begin{cases} \left\{\nu, b, \dfrac{b^2-d}{4\nu}\right\} & \text{im Falle } d < 0, \\ \left\{\nu, b', \dfrac{b'^2-d}{4\nu}\right\} & \text{im Falle } d > 0. \end{cases}$$

Offenbar ist die Zuordnung $\nu \to F^\nu$ eineindeutig.

F^ν ist wirklich eine Form der Diskriminante d, denn die Zahlen ν, b, b' sind nach Konstruktion und die Zahlen $\dfrac{b^2-d}{4\nu}$, $\dfrac{b'^2-d}{4\nu}$ wegen (2.48) und (2.49) ganz; als Diskriminante ergibt sich d wegen

$$x^2 - 4\nu\frac{x^2-d}{4\nu} = d \quad \text{für} \quad x = b, b'.$$

F^ν ist aber auch reduziert (vgl. (2.3) und (2.4)): Im Falle $d < 0$ folgt dies aus (2.47) und (2.51) und im Falle $d > 0$ aus (2.50) und (2.51). Mit den Hilfssätzen 1 und 2 erhält man nun unmittelbar die Behauptung.

Wir beginnen nun mit der Formulierung der analytischen Hilfssätze. Dabei ist χ_1 stets ein reeller eigentlicher Charakter mod k und d ist gemäß (1.3) bis (1.6) gewählt.

Hilfssatz 15. *Die Reihe*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

sei in $\sigma > \sigma_0 > -\infty$ absolut konvergent. Für jedes $w = u+iv$ gilt dann bei positivem y

(2.52) $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-w} e^{-ny} = \frac{1}{2\pi i}\int_{(b)} \Gamma(s-w) y^{w-s} f(s)\, ds,$$

wenn $b > \max(\sigma_0, u)$ ist.

Dabei bezeichnet (b) die Integration längs der vertikalen Geraden

$$(b - i\infty, b + i\infty).$$

Beweis. Nach [13], S. 380, erhält man dies mit Hilfe der Identität

(2.53) $$\frac{1}{2\pi i}\int_{(b_1)} \Gamma(s) y^{-s}\, ds = e^{-y} \quad (b_1, y > 0).$$

Setzt man (2.53) für $b_1 > \max(\sigma_0 - u, 0)$ und ny an Stelle von y in die linke Seite von (2.52) ein, so wird sie auf Grund der absoluten Konvergenz der entstehenden Summen und Integrale

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{(b_1)} \Gamma(s) y^{-s} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s-w}\right) ds.$$

Hieraus folgt nun mit der Substitution $s + w = s_1$ die Behauptun g.

Hilfssatz 16. *In $\sigma \geqslant 1 - c_7/\log k$ gilt*

$$L'(s, \chi_1) \ll \frac{|s|}{\sigma}\log^2 k.$$

Beweis. Wegen $\chi_1 \neq \chi_0$ gilt nach [13], S. 140, (8.4), für $\sigma > 0$

$$(2.54)\quad L'(s, \chi_1) = \sum_{n<k} \frac{-\chi_1(n)}{n^s} \log n + O\Big(\int_k^\infty k(1+|s|\log\xi)\,\xi^{-\sigma-1}\,d\xi\Big).$$

Bei genügend kleinem c_7 folgt aus $\sigma \geqslant 1 - c_7/\log k$ die Abschätzung

$$n^{1-\sigma} \ll 1 \quad \text{für} \quad n \leqslant k$$

und daher (vgl. (1.7))

$$\Big|\sum_{n<k} \frac{-\chi_1(n)}{n^s}\log n\Big| \leqslant \sum_{n<k} n^{-\sigma}\log k \ll (\log k)\sum_{n<k}\frac{1}{n} \ll \log^2 k,$$

$$\int_k^\infty \xi^{-\sigma-1}\log\xi\,d\xi = \frac{\partial}{\partial x}\frac{k^{-x}}{x}\Big|_{x=\sigma} \ll \frac{\log k}{k}.$$

Setzt man dies in (2.54) ein, so ergibt sich wegen $|s| \geqslant \sigma$ die Behauptung.

Hilfssatz 17. *Für* $1 \geqslant s \geqslant 1 - c_7/(2\log k)$ *gilt*

$$L''(s, \chi_1) \ll \log^3 k.$$

Beweis. Ist ein $s \geqslant 1 - c_7/(2\log k)$ gegeben, so wenden wir die Cauchysche Koeffizientenabschätzung auf

$$f(z) = L'(\sigma + z, \chi_1)$$

an: $f(z)$ ist in $|z| \leqslant c_7/(2\log k)$ holomorph und genügt dort nach Hilfssatz 16 der Abschätzung

$$f(z) \ll \log^2 k,$$

also ist

$$f'(0) = L''(s, \chi_1) \ll \log^3 k.$$

Hilfssatz 18. *Ist χ ein beliebiger Charakter* mod k, *so gilt*

$$(2.55)\quad L(s,\chi) \ll \big(k(|t|+1)\big)^{1/2} \quad \textit{für alle } s \textit{ mit } \sigma \geqslant \tfrac{1}{2},\ |s-1| \geqslant c_8.$$

Beweis. Nach [13], S. 115, Satz 5.4, gilt

$$L(s,\chi) < (k|t|)^{1/2} \quad \text{für} \quad \sigma \geqslant \tfrac{1}{2},\ |t| \geqslant 2$$

und

$$L(s,\chi) \ll \frac{\varphi(k)/k}{|s-1|} + k^{1/2} \quad \text{für} \quad \sigma \geqslant \tfrac{1}{2},\ |t| \leqslant 11.$$

Damit ergibt sich sofort (2.55).

Hilfssatz 19. *Es sei*

$$(2.56)\quad H(d) < c_9\sqrt{k}/\log k$$

bei genügend kleinem c_9. Dann gibt es eine reelle Zahl β_1 mit

$$(2.57)\quad L(\beta_1, \chi_1) = 0,$$

und

$$(2.58)\quad 0 < 1 - \beta_1 \ll \frac{H(d)}{\sqrt{k}} \ll L(1, \chi_1).$$

Beweis. Wir betrachten in Anlehnung an die Beweisskizze aus [13], S. 148 (8.26) und S. 141, 142, die Funktion

$$Z(s) = \zeta(s)L(s, \chi_1),$$

die bis auf einen einfachen Pol bei $s = 1$ mit dem Residuum

$$(2.59)\quad \lambda = L(1, \chi_1)$$

in der ganzen Ebene holomorph ist. Für $\sigma > 1$ gilt offenbar

$$(2.60)\quad Z(s) = \sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s} \quad \text{mit} \quad a_n = \sum_{d|n}\chi_1(d),$$

und aus der Multiplikativität des reellen Charakters χ_1 folgt sofort

$$(2.61)\quad a_1 = 1, \quad a_n \geqslant 0 \quad \text{für} \quad n = 1, 2, \ldots$$

Da nun

$$(2.62)\quad f(s) = Z(s) - \frac{\lambda}{s-1}$$

eine ganze Funktion ist, gilt auf Grund der Cauchyschen Koeffizientenabschätzung

$$(2.63)\quad f(s) = \sum_{0\leqslant\nu<N} A_\nu(s-2)^\nu + O\big(M(\tfrac{3}{4})^N\big) \quad \text{für} \quad N = 1, 2, \ldots,\ |s-2| \leqslant 3/2$$

mit

$$M = \max_{|s-2|=2} |f(s)|,$$

$$A_\nu = \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(2) \quad (\nu \geqslant 0).$$

Nach (2.60) ist aber

$$A_\nu = \frac{(-1)^\nu}{\nu!}\sum_{n=1}^\infty a_n n^{-2}\log^\nu n - (-1)^\nu\lambda,$$

und aus (2.61) folgt

$$(2.64)\quad A_0 \geqslant 1 - \lambda, \quad (-1)^\nu A_\nu \geqslant -\lambda \quad \text{für} \quad \nu = 1, 2, \ldots$$

Die Voraussetzung (2.56) ergibt in Verbindung mit (2.59) und (1.8)

$$0 < \lambda \leqslant \frac{\pi H(d)}{\sqrt{k}} < \pi c_9/\log k. \tag{2.65}$$

Mit Hilfssatz 18 folgt daher (vgl. (2.62))

$$M \leqslant \sqrt{k}. \tag{2.66}$$

Bei genügend kleinem

$$c_{10} = 4\pi c_9 \tag{2.67}$$

sei nun

$$0 < 1-s \leqslant c_{10}/\log k =: \lambda', \qquad N = \left[\frac{\log k}{\sqrt{c_{10}}}\right]. \tag{2.68}$$

Aus (2.63), (2.64), (2.65) und (2.66) folgt dann

$$f(s) \geqslant 1-\lambda-\lambda \sum_{1\leqslant\nu<N} |s-2|^\nu + O\left(\sqrt{k}(\tfrac{3}{4})^N\right) > \frac{1}{2} - \lambda\frac{(2-s)^N-1}{1-s}$$
$$\geqslant \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{s-1} - \frac{2\lambda}{1-s},$$

also nach (2.62)

$$Z(s) > \frac{1}{2} - \frac{2\lambda}{1-s}. \tag{2.69}$$

Nach (2.65), (2.67) und (2.68) ist $4\lambda < \lambda'$. Wir können also ein β mit

$$4\lambda \leqslant 1-\beta < \min(\lambda', 5\lambda)$$

wählen. Wäre nun

$$L(s, \chi_1) \neq 0 \quad \text{für alle } s \in [\beta, 1),$$

so müßte

$$Z(s) < 0 \quad \text{für} \quad \beta \leqslant s < 1$$

gelten. Denn nach (1.8) ist $L(1, \chi_1) > 0$, und man hat

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + O(1) \quad \text{für} \quad |s-1| \leqslant \tfrac{1}{2},$$

also bei genügend kleinem c_9 nach (2.67) und (2.68)

$$\zeta(s) < 0 \quad \text{für} \quad \beta \leqslant s < 1.$$

Speziell würde in Verbindung mit (2.69) für $s = \beta$

$$1-\beta < 4\lambda$$

also ein Widerspruch folgen. Wegen (1.8) und (2.59) ist damit Hilfssatz 19 bewiesen.

Hilfssatz 20 (vgl. [13], S. 130, Satz 6.9). *Die Funktion*

$$\prod_{\substack{\chi \bmod k \\ \chi \text{ reell}, \neq \chi_0}} L(s, \chi)$$

besitzt in

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{c_{11}}{\log k(|t|+2)}$$

höchstens eine Nullstelle. Wenn sie existiert, handelt es sich um eine reelle Nullstelle erster Ordnung.

Ist χ ein komplexer Charakter mod k *oder* $= \chi_0$, *so gilt*

$$L(s, \chi) \neq 0 \quad \text{in} \quad \sigma \geqslant 1 - \frac{c_{12}}{\log k(|t|+2)}. \tag{2.70}$$

Hilfssatz 21. *Aus*

$$H(d) < c_{13}\sqrt{k}/\log^3 k \tag{2.71}$$

folgt bei genügend kleinem c_{13} mit der durch die Hilfssätze 19 *und* 20 *eindeutig definierten Nullstelle β_1*

$$L'(1, \chi_1) \ll \frac{L(1, \chi_1)}{1-\beta_1}. \tag{2.72}$$

Beweis. Der Mittelwertsatz liefert bei passendem $\sigma \in (\beta_1, 1)$ wegen (2.57)

$$0 = L(\beta_1, \chi_1) = L(1, \chi_1) + L'(1, \chi_1)(\beta_1 - 1) + \tfrac{1}{2}L''(\sigma, \chi_1)(\beta_1-1)^2.$$

Nach Hilfssatz 17 ist also

$$L'(1, \chi_1) = \frac{L(1, \chi_1)}{1-\beta_1} + O\left((1-\beta_1)\log^3 k\right).$$

Mit (2.58) und (2.71) folgt daraus (2.72).

Hilfssatz 22. *Aus* (2.71) *folgt*

$$L'(1, \chi_1) \ll e^S \tag{2.73}$$

mit

$$S = \sum_{p \leqslant k^2} \frac{1+\chi_1(p)}{p}. \tag{2.74}$$

Beweis. Wir wenden Hilfssatz 15 auf

$$f(s) = \zeta(s) L(s, \chi_1) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}, \quad a_n = \sum_{d|n} \chi_1(d),$$
$$w = \beta_1, \quad y = k^{-3/2}$$

an. Da $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n n^{-s}$ in $\sigma > 1$ absolut konvergiert, dürfen wir ferner $\sigma_0 = 1$ setzen. Wegen $\beta_1 < 1$ (vgl. Hilfssatz 21) folgt also

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-\beta_1} e^{-ny} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(2)} \Gamma(s-\beta_1) y^{\beta_1 - s} \zeta(s) L(s, \chi_1)\, ds.$$

Der hierin auftretende Integrand ist in $\frac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant 2$, $|s-1| \geqslant c_8$ holomorph und dort nach Hilfssatz 18 und der Stirlingschen Formel

$$\ll (|t|+1)^{c_{14}} k^{1/2} e^{-\pi|t|/2} y^{\beta_1 - \sigma}. \tag{2.75}$$

In $|s-1| < c_8$ hat der Integrand höchstens bei $s = \beta_1$ und $s = 1$ eine singuläre Stelle. Bei $s = \beta_1$ ist aber $L(\beta_1, \chi_1) = 0$ und $\zeta(s)$ holomorph, also gehört auch $s = \beta_1$ zum Holomorphiegebiet. Dagegen entsteht bei $s = 1$ ein Pol erster Ordnung mit dem Residuum

$$y^{\beta_1 - 1} \Gamma(1-\beta_1) L(1, \chi_1).$$

Insgesamt folgt mit dem Cauchyschen Integralsatz unter Beachtung von (2.75)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-\beta_1} e^{-ny} = y^{-\delta} \Gamma(\delta) L(1, \chi_1) + O(k^{1/2} y^{\beta_1 - 1/2}) \tag{2.76}$$

mit

$$\delta = 1 - \beta_1.$$

Aus (2.71) und (2.58) folgt weiter

$$\Gamma(\delta) = \frac{1}{\delta}\big(1 + O(\delta)\big), \quad 1 \leqslant k^{\delta} \ll 1 \tag{2.77}$$

und wegen $y = k^{-3/2} < 1$

$$1 \leqslant y^{-\delta}, \quad y^{\beta_1 - \frac{1}{2}} \ll k^{\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)} = k^{-\frac{3}{4}}.$$

Verwendet man dies zu einer unteren Abschätzung der rechten Seite von (2.76), so ergibt sich wegen (2.61)

$$\frac{1}{\delta} L(1, \chi_1) + O(k^{-1/4}) \ll \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-\beta_1} e^{-ny}. \tag{2.78}$$

Im Falle $n \leqslant k^2$ verwenden wir nun die wegen (2.77) gültige Abschätzung

$$n^{-\beta_1} e^{-ny} \ll \frac{1}{n},$$

und im Falle $n > k^2$ schätzen wir a_n durch

$$a_n \ll \theta(n) \ll n^{\beta_1}$$

ab. Wegen

$$\sum_{n > k^2} e^{-ny} \ll \frac{e^{-k^2 y}}{y} \ll 1 \quad (y = k^{-3/2})$$

und (2.61) folgt dann aus (2.78) und (2.72)

$$L(1, \chi_1) \ll \sum_{n \leqslant k^2} \frac{a_n}{n}. \tag{2.79}$$

Bezeichnet $p(n)$ den größten Primteiler von n, so wird andererseits für alle $x > 2$

$$\prod_{p \leqslant x} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\chi_1(p)}{p}\right)^{-1} = \sum_{p(\nu) \leqslant x} \frac{1}{\nu} \sum_{p(\mu) \leqslant x} \frac{\chi_1(\mu)}{\mu} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{\substack{d|n \\ p(d) \leqslant x \\ p\left(\frac{n}{d}\right) \leqslant x}} \chi_1(d).$$

Die Summationsbedingung

$$p(d) \leqslant x, \quad p\left(\frac{n}{d}\right) \leqslant x$$

ist aber für jedes natürliche $d|n$ mit der Ungleichung

$$p(n) \leqslant x$$

äquivalent. Unter Beachtung von (2.60) und (2.61) folgt daraus insgesamt

$$\exp\left(\sum_{p \leqslant x} \left(\log\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} + \log\left(1 - \frac{\chi_1(p)}{p}\right)^{-1}\right)\right) = \sum_{p(n) \leqslant x} \frac{a_n}{n} \geqslant \sum_{n \leqslant x} \frac{a_n}{n}.$$

Setzt man auf der linken Seite dieser Ungleichung die Reihendarstellung

$$\log(1-z)^{-1} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m} \quad (|z| < 1)$$

für $z = \dfrac{1}{p}$ bzw. $z = \dfrac{\chi_1(p)}{p}$ und alle $p \leqslant x$ ein und berücksichtigt die Abschätzungen

$$\sum_{m=2}^{\infty} \sum_{p \leqslant x} p^{-m} \ll \sum_{p \leqslant x} p^{-2} \ll 1, \quad |\chi_1(n)| \leqslant 1,$$

so hat man

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{a_n}{n}\ll \exp\Big(\sum_{p\leqslant x}\frac{1+\chi_1(p)}{p}\Big).$$

Mit $x = k^2$, (2.74) und (2.79) folgt nunmehr (2.73).

HILFSSATZ 23. *Für alle $\tau > 0$ gilt* (vgl. (2.74))

$$S\leqslant \sum_{\substack{p\leqslant\tau\\ \chi_1(p)=1}}\frac{2}{p}+O\Big(\frac{H(d)}{\tau}\Big)+O(1). \tag{2.80}$$

Beweis. Wegen $|\chi_1(p)|\leqslant 1$ haben wir

$$S\leqslant S_1+S_2+S_3 \tag{2.81}$$

mit

$$S_1=\sum_{\substack{p\leqslant\tau\\ \chi_1(p)=1}}\frac{2}{p},\qquad S_2=\sum_{\substack{\tau<p\leqslant\sqrt{k}/2\\ \chi_1(p)=1}}\frac{2}{p},\qquad S_3=\sum_{\sqrt{k}/2<p<k^2}\frac{2}{p}.$$

Nach Hilfssatz 14 ist

$$S_2\leqslant\frac{2}{\tau}\sum_{\substack{\nu\leqslant\sqrt{k}/2\\ p|\nu\Rightarrow\chi_1(p)=1}}1\ll\frac{H(d)}{\tau}$$

und wegen

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}=\log_2 x+O(1)\qquad (x\geqslant 3) \tag{2.82}$$

(vgl. [13], S. 20, Satz 4.1) hat man

$$S_3\leqslant\log\frac{\log k^2}{\log\big(\max(3,\sqrt{k}/2)\big)}+1\ll 1.$$

In Verbindung mit (2.81) ergeben diese Abschätzungen von S_2 und S_3 die Ungleichung (2.80).

III. Hauptsätze. Wir beweisen zunächst Satz 1 mit Hilfe oberer Abschätzungen der in (2.74) definierten Summe S.

Läßt man die Summationsbedingung $\chi_1(p)=1$ in der Summe auf der rechten Seite von (2.80) fort und wendet dann (2.82) an, so folgt

$$S\leqslant 2\log_2\tau+O\Big(\frac{H(d)}{\tau}\Big)+O(1)\qquad\text{für alle } \tau\geqslant 3.$$

Mit $\tau = H(d)+3$ ergibt sich also

$$S\leqslant 2\log_2\big(H(d)+3\big)+O(1). \tag{3.1}$$

Für kleine Werte von $H(d)$ können wir S schärfer mit einer Verfeinerung der in [2], S. 211, Zeile -1, von Davenport eingeführten Idee abschätzen: Wir definieren

$$X=c_{15}\frac{H(d)+3}{\log_2\big(H(d)+3\big)}, \tag{3.2}$$

$$M=\{p:\ p\leqslant X,\ \chi_1(p)=1\}=\{p_1,\dots,p_r\}\quad\text{mit}\quad p_1<\dots<p_r \tag{3.3}$$

und wählen dabei c_{15} so groß, daß

$$X\geqslant\max\big(\sqrt{H(d)+3},\,3\big) \tag{3.4}$$

ist.

Für eine obere Abschätzung von r sei zunächst

$$r>c_{16} \tag{3.5}$$

bei genügend großem c_{16} vorausgesetzt.

Nach (1.22), (3.3) und (3.4) ist dann

$$\sqrt{k}/2>3. \tag{3.6}$$

Nach Hilfssatz 14 ergibt sich für jedes natürliche $N\in[1,r]$

$$H(d)\gg\sum_{\substack{n<\sqrt{k}/2\\ p|n\Rightarrow p\in M}}1\geqslant\sum_{\substack{\nu_1,\dots,\nu_N\geqslant 0\\ \prod_1^N p_j^{\nu_j}<\sqrt{k}/2}}1=\sum_{\substack{\nu_1,\dots,\nu_N\geqslant 0\\ \sum_1^N\nu_j\log p_j<\log(\sqrt{k}/2)}}1$$

$$\geqslant\sum_{\substack{\nu_1,\dots,\nu_N\geqslant 0\\ N\max_{1\leqslant j\leqslant N}(\nu_j\log X)<\log(\sqrt{k}/2)}}1\geqslant\Big(\sum_{0\leqslant\nu<\frac{\log(\sqrt{k}/2)}{N\log X}}1\Big)^N$$

und daher

$$H(d)\gg\Big(\frac{A}{N}\Big)^N\qquad(1\leqslant N\leqslant r) \tag{3.7}$$

mit der Abkürzung

$$A=c_{17}\frac{\log(\sqrt{k}/2)}{\log X}.$$

Wir setzen weiter

$$0<\varepsilon<\tfrac{1}{2},\qquad \log\big(H(d)+3\big)\leqslant\log^{\frac{1}{2}-\varepsilon}k \tag{3.8}$$

voraus.

Dann lassen sich effektive Konstanten $c=c(\varepsilon)$, $c'=c'(\varepsilon)$ angeben, so daß für

$$\varrho=c\frac{\log\big(H(d)+3\big)}{\log_2 k},\qquad k\geqslant c' \tag{3.9}$$

(vgl. (3.2) und (3.6)) die Ungleichungen

$$\left(\frac{A}{\varrho}\right)^{\varrho} \geqslant \left(\frac{c_{18}}{c}\,\frac{(\log k)\log_2 k}{\log^2(H(d)+3)}\right)^{\varrho} \geqslant \left(\frac{c_{18}}{c}(\log^{2\varepsilon} k)\log_2 k\right)^{c\frac{\log(H(d)+3)}{\log_2 k}},$$

$$\frac{A}{1+\varrho} \geqslant \min\left[\frac{c_{18}}{c}(\log^{2\varepsilon} k)\log_2 k,\; c_{18}\log^{\frac{1}{2}+\varepsilon} k\right]$$

und damit

$$(3.10)\qquad \left(\frac{A}{\varrho}\right)^{\varrho} > H(d)$$

und

$$(3.11)\qquad A \geqslant e(1+\varrho)$$

erfüllt sind. Mann wähle etwa

$$c = \frac{1}{2\varepsilon}, \qquad \log_2 c' = \max\left[\frac{ec}{c_{18}},\, 2\log\frac{e}{c_{18}}\right].$$

Dann wird nämlich für $k \geqslant c'$ wegen $k \geqslant 3$ (vgl. (1.7))

$$(\log^{2\varepsilon} k)^{\frac{c}{\log_2 k}} = e, \qquad \frac{c_{18}}{c}\log_2 k \geqslant e, \qquad \log k > 1, \qquad c_{18}\log^{\frac{1}{2}+\varepsilon} k \geqslant e.$$

Aus (3.7) und (3.10) folgt jetzt

$$(3.12)\qquad \left(\frac{A}{\varrho}\right)^{\varrho} > \left(\frac{A}{N}\right)^{N} \quad \text{für alle natürlichen } N \leqslant r.$$

Die Funktion $\Phi(x) = \left(\frac{A}{x}\right)^{x}$ wächst aber wegen

$$(3.13)\qquad \Phi'(x) = \Phi(x)\left(\log\frac{A}{x} - 1\right) \qquad (x > 0)$$

im Intervall $0 < x \leqslant \frac{A}{e}$ monoton.

Wegen (3.11) und (3.5) ist ferner

$$(3.14)\qquad N = \min\left(r, \left[\frac{A}{e}\right]\right)$$

eine natürliche Zahl $\leqslant r$ und $\leqslant \frac{A}{e}$, und ϱ ist sogar $\leqslant \frac{A}{e} - 1$. Aus (3.12) folgt also

$$(3.15)\qquad \min\left(r, \left[\frac{A}{e}\right]\right) \leqslant \varrho < \left[\frac{A}{e}\right],$$

und damit gewinnen wir die Ungleichung

$$r \leqslant \varrho$$

unter den Voraussetzungen (3.5), (3.8) und (3.9).

Ist (3.5) nicht erfüllt, so ist

$$r \leqslant \varrho + c_{16}$$

trivial. Also haben wir unter den Voraussetzungen (3.8) und $k \geqslant c'(\varepsilon)$ die Abschätzung

$$(3.16)\qquad r \leqslant c(\varepsilon)\frac{\log(H(d)+3)}{\log_2 k} + c_{16}$$

bewiesen.

In Hilfssatz 23 wählen wir nun wieder

$$(3.17)\qquad \tau = H(d)+3$$

und erhalten nach (3.2) und (3.3)

$$(3.18)\qquad S \leqslant \sum_{j=1}^{r}\frac{2}{p_j} + \sum_{X<p\leqslant\tau}\frac{2}{p} + O(1).$$

Da wir die Primzahlen p_j in der Form $p_1 < \ldots < p_r$ angeordnet haben, ist

$$p_j \geqslant j \quad \text{für} \quad j = 1, \ldots, r,$$

also

$$\sum_{j=1}^{r}\frac{2}{p_j} \leqslant 2\sum_{j=1}^{r}\frac{1}{j} \leqslant 2\log(r+1) + O(1).$$

Nach (3.4), (3.17) und (2.82) ist ferner

$$\sum_{X<p\leqslant\tau}\frac{2}{p} \leqslant \log\frac{\log(H(d)+3)}{\log\sqrt{H(d)+3}} + O(1) \ll 1.$$

Verbindet man diese Abschätzungen mit (3.16), (3.17) und (3.18), so erhält man

$$(3.19)\qquad S \leqslant 2\log\left(c(\varepsilon)\frac{\log(H(d)+3)}{\log_2 k} + c_{16}\right) + O(1)$$

$$\text{für} \quad 0 < \varepsilon < \tfrac{1}{2},\; k \geqslant c'(\varepsilon),\; \log(H(d)+3) \leqslant \log^{\frac{1}{2}-\varepsilon} k.$$

Nach Hilfssatz 22 ergibt sich nun (1.19) mit (3.1) und (1.20) mit (3.19) unter den Voraussetzungen $s = 1$ und (2.71), von denen wir uns nun noch befreien müssen:

Der Mittelwertsatz liefert nach Hilfssatz 17 bei genügend kleinem c_5 für $0 \leqslant 1-s \leqslant c_5/\log^3 k$

$$L'(s, \chi_1) = L'(1, \chi_1) + O(1),$$

also ist Satz 1 unter der Voraussetzung (2.71) richtig.

Wenn aber (2.71) nicht erfüllt ist, gilt

$$\log\big(H(d)+3\big) \gg \log k,$$

und dann folgt Satz 1 bei genügend kleinem c_5 unmittelbar aus (1.11).

Nun sind wir in der Lage, auch Satz 2 zu beweisen: Dabei dürfen wir uns nach den Ausführungen der Einleitung (vgl. S. 2) auf einen reellen eigentlichen Charakter χ_1 aus Satz 1 beschränken. Ferner wählen wir in Satz 1

$$\varepsilon = \tfrac{1}{4}$$

und nehman an, $L(s, \chi_1)$ besitze eine Nullstelle $\beta < 1$ mit

$$1-\beta \leqslant \frac{c_5}{\log^3 k}. \tag{3.20}$$

Nach dem Mittelwertsatz gilt dann bei passendem $\beta' \in (\beta, 1)$

$$0 = L(\beta, \chi_1) = L(1, \chi_1) + (\beta-1)L'(\beta', \chi_1),$$

also nach (1.8), (1.10), (1.18), (3.20) und Satz 1

$$1-\beta \gg \frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{H(d)}{F\big(H(d)\big)}, \quad H(d) \gg H' = \begin{cases} 1, & \text{falls } d < 0,\\ \log k, & \text{falls } d > 0\end{cases} \tag{3.21}$$

mit

$$F(x) = \begin{cases} \log^2(x+3) & \text{für} \quad \log(x+3) > \log^{1/4} k \\ \left(\dfrac{\log(x+3)}{\log_2 k} + 1\right)^2 & \text{sonst}\end{cases} \qquad (x > 0).$$

Da $\dfrac{x}{\log^2(x+3)}$ für $x \geqslant 1$ monoton wächst, folgt für $x \geqslant H'$

$$\frac{x}{F(x)} \gg \begin{cases} \dfrac{\exp(\log^{1/4} k)}{\log^{1/2} k} & \text{im Falle } \log x > \log^{1/4} k,\\[2ex] \dfrac{H'}{\left(\dfrac{\log(H'+3)}{\log_2 k} + 1\right)^2} & \text{sonst,}\end{cases}$$

also nach (3.21)

$$1-\beta \gg \frac{H'}{\sqrt{k}} \tag{3.22}$$

unter der Voraussetzung (3.20). (3.22) ist aber trivial, wenn (3.20) nicht erfüllt ist.

Damit ist Satz 2 bewiesen.

Literaturverzeichnis

[1] P. Bachmann, *Grundlehren der neueren Zahlentheorie*, Berlin 1921.
[2] H. Davenport, *Eine Bemerkung über Dirichlets L-Funktionen*, Göttinger Nachrichten 1966, S. 203–212.
[3] P. G. L. Dirichlet, *Werke I*, Berlin 1889.
[4] — *Vorlesungen über Zahlentheorie*, Braunschweig 1879.
[5] W. Fluch, *Zur Abschätzung von* $L(1, \chi)$, Göttinger Nachrichten 1964, S. 101–102.
[6] C. F. Gauß, *Disquisitiones Arithmeticae*, Berlin 1889.
[7] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford 1959.
[8] L.-K. Hua, *Die Abschätzung von Exponentialsummen und ihre Anwendung in der Zahlentheorie*, Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, I. 2, Heft 13, Teil 1, Leipzig 1959.
[9] E. Landau, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, New York 1953.
[10] — *Vorlesungen über Zahlentheorie I*, New York 1950.
[11] Yu. V. Linnik, *The Dispersion Method in Binary Additive Problems*, Providence, Rhode Island 1963.
[12] A. Page, *On the number of primes in an arithmetic progression*, Proc. Lond. Math. Soc. 39 (1935), S. 116–141.
[13] K. Prachar, *Primzahlverteilung*, Berlin 1957.
[14] C. L. Siegel, *Über die Classenzahl quadratischer Körper*, Acta Arith. 1 (1936), S. 83–86.
[15] A. Walfisz, *Zur additiven Zahlentheorie II*, Math. Zeitschr. 40 (1936), S. 592–607.

Eingegangen 11. 2. 1972 (262)