ACTA ARITHMETICA
XXII (1973)

Ramanujan-Entwicklungen stark multiplikativer zahlentheoretischer Funktionen

von

WOLFGANG SCHWARZ (Frankfurt am Main)

1. Einleitung. Ramanujan [9] hat die nach ihm benannten Summen

$$c_q(n) = \sum_{d|(n,q)} d\cdot\mu\left(\frac{q}{d}\right) = \sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant q\\(a,q)=1}} \exp\left(2\pi i\frac{a}{q}\cdot n\right) \tag{1.1}$$

in die Zahlentheorie eingeführt und zur Entwicklung zahlentheoretischer Funktionen f in der Gestalt

$$f(n) = \sum_{q=1}^{\infty} a_q\cdot c_q(n) \tag{1.2}$$

benutzt; weitere Entwicklungen dieser Art gaben Hardy [8] und Carmichael [1]. Allgemeine Sätze über die Entwickelbarkeit zahlentheoretischer Funktionen in der Gestalt (1.2) leiteten Delsarte [6] und Wintner [13] her (1): Bezeichnet $f'\colon \boldsymbol{N}\to\boldsymbol{C}$ das Möbiusbild (2) der zahlentheoretischen Funktion $f\colon \boldsymbol{N}\to\boldsymbol{C}$, so ist die Bedingung

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot|f'(n)| < \infty$$

hinreichend für die Existenz der Entwicklungskoeffizienten (3)

$$a_q = \frac{1}{\varphi(q)}\cdot\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N} f(n)\cdot c_q(n). \tag{1.3}$$

(1) Aus [12], Satz 2, folgt, daß für jede zahlentheoretische Funktion f eine Folge $g_k = \sum b_{k,q}\cdot c_q$ (endlicher) Linearkombinationen von Ramanujan–Summen existiert, so daß für alle natürlichen n die Beziehung $\lim\limits_{k\to\infty} g_k(n) = f(n)$ gilt.

(2) d.h. $f'(n) = \sum\limits_{d|n}\mu(d)\cdot f(n/d)$.

(3) Hat f eine Darstellung (1.2) und konvergiert $\sum\limits_{q}|a_q|\cdot\tau(q)$, so haben die Entwicklungskoeffizienten a_q notwendigerweise die Gestalt (1.3).

Ist sogar

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n} \cdot |f'(n)| \tag{1.4}$$

konvergent (wobei $\tau(n)$ die Anzahl der Teiler von n bezeichnet), so konvergiert die Reihe (1.2) mit den Entwicklungskoeffizienten (1.3) für jedes n absolut, aber nicht notwendig gleichmäßig, gegen $f(n)$. Für gewisse multiplikative Funktionen (4) hat E. Cohen [2] die Bedingung (1.4) abgeschwächt; er verlangt nur noch

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |f'(n)| < \infty. \tag{1.5}$$

In dieser Note wollen wir uns auf Ergebnisse über die Mittelwerte multiplikativer Funktionen vom Betrag $\leqslant 1$ stützen (man vgl. [5], [7]), um Sätze über die Entwickelbarkeit solcher Funktionen in der Gestalt (1.2) anzugeben. Wir beschränken uns auf *stark multiplikative* Funktionen, die für alle $n \in \boldsymbol{N}$ die Bedingung

$$f(n) = \prod_{p|n} f(p)$$

erfüllen, bzw. auf *2-multiplikative* Funktionen, die für alle $n \in \boldsymbol{N}$ die Bedingung

$$f(n) = \mu^2(n) \cdot \prod_{p|n} f(p)$$

erfüllen, bzw. auf *vollständig multiplikative* Funktionen, die $f(n \cdot m) = f(n) \cdot f(m)$ für alle n, m erfüllen.

Beispiele für stark multiplikative Funktionen sind etwa die Funktionen $n \to \frac{\varphi(n)}{n}$, $n \to \exp\big(2\pi i \omega(n)\big)$, ein Beispiel für eine 2-multiplikative Funktion ist jede Potenz μ^k der Möbius'schen μ-Funktion ($k \in \boldsymbol{N}$).

Ist f nach (1.2) entwickelt und konvergiert $\sum |a_q| \cdot \tau(q)$, so existiert der Mittelwert

$$M(f) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \cdot \sum_{n \leqslant N} f(n)$$

und es gilt $M(f) = a_1$. Wir werden im folgenden für reellwertige, stark multiplikative Funktionen f vom Betrage $|f| \leqslant 1$ umgekehrt zeigen, daß die Existenz von $M(f)$ und die Bedingung (5) $M(f) \neq 0$ die absolute Konvergenz der Reihe (1.2) gegen $f(n)$ nach sich ziehen.

(4) Nämlich für multiplikative Funktionen f, für die f' vollständig multiplikativ ist.

2. Ergebnisse. Es bezeichne $\mathscr{F}$ die Menge der komplexwertigen zahlentheoretischen Funktionen f vom Betrage $|f| \leqslant 1$, deren Mittelwert $M(f)$ existiert und ungleich Null ist; $\mathscr{F}_1$ bzw. $\mathscr{F}_2$ bzw. $\mathscr{F}_3$ bezeichne die Untermenge der stark multiplikativen bzw. 2-multiplikativen bzw. vollständig multiplikativen Funktionen aus $\mathscr{F}$. Wir zeigen zunächst

Satz 1. *Sei $f \in \mathscr{F}_1$ und reellwertig* (6). *Dann existieren die durch* (1.3) *definierten Koeffizienten $a_q = a_q(f)$, und es ist* (7)

$$a_q = M(f) \cdot \frac{\mu(q)}{q} \cdot \prod_{p|q} \big(1 - f(p)\big) \cdot \prod_{p|q} \left(1 + \frac{f(p)-1}{p}\right)^{-1}. \tag{2.1}$$

Die Quotienten

$$a_q^* = a_1^{-1} \cdot a_q = \big(M(f)\big)^{-1} \cdot a_q \tag{2.2}$$

sind 2-multiplikative Funktionen von q, die Reihen $\sum |a_q|$ und $\sum_q |a_q| \cdot |c_q(n)|$ sind konvergent, und für alle natürlichen n besteht die Gleichung

$$f(n) = \sum_{q=1}^{\infty} a_q \cdot c_q(n). \tag{2.3}$$

Schließlich gilt die Parseval'sche Gleichung

$$\sum_{q=1}^{\infty} \varphi(q) \cdot |a_q|^2 = M(|f|^2) = \prod_p \left(1 + \frac{|f^2(p)| - 1}{p}\right). \tag{2.4}$$

Genauer läßt sich die Menge $\mathscr{F}_1^{(r)}$ der reellwertigen Funktionen $f \in \mathscr{F}_1$ wie folgt charakterisieren.

(5) Es ist vernünftig, $M(f) \neq 0$ vorauszusetzen. Ist nämlich f: $\boldsymbol{N} \to \boldsymbol{C}$ multiplikativ, $|f| < 1$, $M(f) = 0$, und existiert zu jedem reellen a ein $r > 1$, so daß $f(2^r) \neq -2^{iar}$ ist, so sind alle

$$M_d(f) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n \leqslant N,\, n \equiv 0(d)} f(n) = 0$$

und wegen (3.2) sind auch alle $a_q = 0$.

(6) Nach Halász [7] existiert der Mittelwert $M(f)$, wenn f reellwertig, multiplikativ und vom Betrage $\leqslant 1$ ist.

(7) Aus $M(f) \neq 0$ folgt nach Delange [4], daß $f(2) \neq -1$, also stets $\left(1 + \frac{f(p)-1}{p}\right) \neq 0$ ist.

Zusatz 1. *Sei $\mathscr{A}_1^{(r)}$ die Menge der Folgen $\{a_q\}_{q=1,2,\ldots}$ reeller Zahlen, die folgende Bedingungen erfüllen:*

(α) $a_1 \neq 0$, $a_q^* = a_1^{-1}\cdot a_q$ *ist 2-multiplikativ in* q;

(β) $-2\cdot(p-2)^{-1} \leqslant a_p^* \leqslant 0$ *für alle Primzahlen* $p \geqslant 3$, $a_2^* \leqslant 0$;

(γ) $\prod\limits_p (1+|a_p^*|) < \infty$;

(δ) $a_1 \cdot \prod\limits_p (1-a_p^*) = 1$.

Dann ist die Abbildung T_1, die jedem $f \in \mathscr{F}_1^{(r)}$ die Folge $\{a_q\}$ der Entwicklungskoeffizienten nach (1.3) zuordnet, eine bijektive Abbildung von $\mathscr{F}_1^{(r)}$ auf $\mathscr{A}_1^{(r)}$.

Für komplexwertige Funktionen können wir nur ein schwächeres Ergebnis beweisen.

Satz 1'. *Sei f eine komplexwertige Funktion aus $\mathscr{F}_1$*[8]. *Dann existieren die Koeffizienten a_q, es gelten* (2.1), (2.2) *und* (2.4).

Nimmt man zu den Voraussetzungen von Satz 1 noch die Konvergenz der Reihe

$$\sum_p \frac{1}{p}\cdot|f(p)-1| \tag{2.5}$$

hinzu, so erhält man

Satz 1''. *Für die komplexwertige Funktion f seien die Voraussetzungen von Satz 1' erfüllt, und die Reihe* (2.5) *sei konvergent. Dann konvergieren die Reihen*

$$\sum_q |a_q| \quad \text{und} \quad \sum_q |a_q c_q(n)|,$$

und es gilt für alle $n \in \boldsymbol{N}$ die Gleichung (2.3).

Für 2-multiplikative Funktionen gilt entsprechend

Satz 2. *Sei f aus $\mathscr{F}_2$ reellwertig. Dann existieren die durch* (1.3) *definierten Koeffizienten a_q; es ist $a_1 = M(f) \neq 0$, und die Funktion $q \to a_q^* = a_1^{-1}\cdot a_q$ ist multiplikativ; für Primzahlpotenzen p^α ist*

$$\begin{cases} a_p^* = \dfrac{1}{p-1}\cdot\left\{-1+f(p)\cdot\left(1+\dfrac{f(p)}{p}\right)^{-1}\right\}, \\ a_{p^2}^* = -\dfrac{1}{p(p-1)}\cdot f(p)\cdot\left(1+\dfrac{f(p)}{p}\right)^{-1}, \\ a_{p^\alpha}^* = 0 \quad \text{für } \alpha \geqslant 3. \end{cases} \tag{2.6}$$

[8] Die Existenz von $M(f)$ kann jetzt nicht mehr gefolgert werden, sondern muß vorausgesetzt werden (man vgl. [7], Satz 2).

Die Reihen $\sum|a_q|$ und $\sum|a_q|\cdot|c_q(n)|$ konvergieren, und für jedes n gilt die Gleichung (2.3). *Schließlich besteht die Parseval'sche Gleichung*

$$\sum_{q=1}^{\infty} \varphi(q)\cdot|a_q|^2 = M(|f|^2) = \prod_p \left(1+\frac{|f(p)|^2-1}{p}-\frac{|f(p)|^2}{p^2}\right). \tag{2.7}$$

Genauer läßt sich, wie früher, die Menge $\mathscr{F}_2^{(r)}$ der reellwertigen Funktionen aus $\mathscr{F}_2$ folgendermaßen charakterisieren.

Zusatz 2. *Sei $\mathscr{A}_2^{(r)}$ die Menge der Folgen $\{a_q\}_{q=1,2,\ldots}$ reeller Zahlen, die folgende Bedingungen erfüllen:*

(α) $a_1 \neq 0$, $a_q^* = a_1^{-1}\cdot a_q$ *ist multiplikativ in* q, $a_{p^\alpha} = 0$ *für alle Primzahlen p und alle* $\alpha \geqslant 3$; $1+(p-1)\cdot a_p^* + p(p-1)\cdot a_{p^2}^* = 0$;

(β) $-\dfrac{2p-1}{(p-1)^2} \leqslant a_p^* \leqslant -\dfrac{1}{p^2-1}$ *für alle Primzahlen* p;

(γ) $\prod\limits_p (1+|a_p^*|) < \infty$;

(δ) $a_1 \cdot \prod\limits_p (1-a_p^*) = 1$.

Dann ist die Abbildung T_2, die jedem $f \in \mathscr{F}_2^{(r)}$ die Folge $\{a_q\}$ der Entwicklungskoeffizienten gemäß (1.3) *zuordnet, eine bijektive Abbildung von $\mathscr{F}_2^{(r)}$ auf $\mathscr{A}_2^{(r)}$.*

Für komplexwertige Funktionen aus $\mathscr{F}_2$ kann nur (2.5) und (2.8), aber nicht die Konvergenz der Reihe $\sum|a_q|$ behauptet werden. Die Konvergenz dieser Reihe und (2.7) folgen wieder wie früher, wenn die Konvergenz der Reihe (2.5) vorausgesetzt wird.

Für vollständig multiplikative Funktionen f, d.h. für solche, die $f(n\cdot m) = f(n)\cdot f(m)$ für alle $n, m \in \boldsymbol{N}$ erfüllen, gilt schließlich

Satz 3. *Sei $f \in \mathscr{F}_3$ reellwertig. Die durch* (1.3) *definierten Koeffizienten existieren dann, es ist*

$$a_q = M(f)\cdot\frac{1}{\varphi(q)}\cdot\sum_{d|q}\mu\left(\frac{q}{d}\right)\cdot f(d), \tag{2.8}$$

die Reihen $\sum|a_q|$, $\sum|a_q c_q(n)|$ konvergieren, für jedes n gilt (2.3), *und es besteht die Parseval'sche Gleichung.*

Für die Menge $\mathscr{F}_3^{(r)}$ der reellwertigen Funktionen aus $\mathscr{F}_3$ gilt wie früher der

Zusatz 3. *Es bezeichne $\mathscr{A}_3^{(r)}$ die Menge der Folgen $\{a_q\}$ reeller Zahlen, die folgende Bedingungen erfüllen:*

(α) $a_1 \neq 0$, $a_q^* = a_1^{-1}\cdot a_q$ *ist multiplikativ in* q,

$$a_{p^\alpha}^* = a_p^*\cdot\left\{\frac{1}{p}(p-1)\,a_p^* + \frac{1}{p}\right\}^{\alpha-1} \quad \text{für alle } \alpha \geqslant 2 \text{ und alle } p;$$

(β) $-\dfrac{2}{p-1} \leqslant a_p^* \leqslant 0$ *für alle* p;

(γ) $\prod_p (1+|a_p^*|) < \infty$;

(δ) $a_1 \cdot \prod_p (1-a_p^*) = 1$.

Dann ist die Abbildung T_3, *die jedem* $f \in \mathscr{F}_3^{(r)}$ *die Folge* $\{a_q\}$ *gemäß* (1.3) *zuordnet, eine bijektive Abbildung von* $\mathscr{F}_3^{(r)}$ *auf* $\mathscr{A}_3^{(r)}$.

Wie bisher bleiben für komplexwertige Funktionen, für die $M(f) \neq 0$ existiert, nur (2.8) und die Parseval'sche Gleichung bestehen. Unter der zusätzlichen Voraussetzung der Konvergenz der Reihe (2.5) bleiben alle Aussagen von Satz 3 erhalten.

3. Beweis von Satz 1. Aus der Bedingung $M(f) \neq 0$ folgen nach Delange ([4] oder [5]) die Konvergenz der Reihe

$$\sum_p \frac{1-f(p)}{p} \tag{3.1}$$

und die Bedingung $f(2) \neq -1$. Aus (1.3) und (1.1) erhält man leicht

$$a_q = \frac{1}{\varphi(q)} \cdot \sum_{d|q} d \cdot \mu\left(\frac{q}{d}\right) \cdot M_d(f), \tag{3.2}$$

speziell also $a_1 = M(f)$; hierbei ist

$$M_d(f) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{\substack{n \leqslant N \\ n \equiv 0\,(d)}} f(n). \tag{3.3}$$

Leicht zu zeigen ist folgendes

Lemma 3.1. *Für (komplexwertiges)* $f \in \mathscr{F}_1$ *gilt*

$$M_d(f) = \frac{f(d)}{d} \cdot \prod_{p \nmid d} \left(1 + \frac{f(p)-1}{p}\right) = \frac{f(d)}{d} \cdot M(f) \cdot \prod_{p|d} \left(1 + \frac{f(p)-1}{p}\right)^{-1}.$$

Beweis. Wir definieren die stark multiplikative Funktion f_d^* durch

$$f_d^*(p^a) = \begin{cases} f(p), & \text{falls } p \nmid d, \\ 1, & \text{falls } p|d. \end{cases}$$

Dann ist $|f_d^*| \leqslant 1$, $f_d^*(2) \neq -1$ und die Reihe $\sum_p p^{-1}(1-f_d^*(p))$ konvergiert. Nach Delange [4] existiert

$$M(f_d^*) = \prod_p \left(1+p^{-1}(f_d^*(p)-1)\right) \neq 0.$$

Wegen $f(d \cdot m) = f(d) \cdot f_d^*(m)$ folgt

$$M_d(f) = \frac{f(d)}{d} \cdot M(f_d^*),$$

und mit

$$M(f) = \prod_p \left\{1+p^{-1}(f(p)-1)\right\} \tag{3.4}$$

erhält man die Behauptung von Lemma 3.1.

Wegen (3.2) und Lemma 3.1 existieren offenbar die Koeffizienten a_q; es bleibt deren Berechnung. Zunächst ist

$$\{M(f)\}^{-1} \cdot \varphi(q) \cdot a_q = \sum_{d|q} \mu\left(\frac{q}{d}\right) \cdot f(d) \cdot \prod_{p|d} \left(1 + \frac{f(p)-1}{p}\right)^{-1}. \tag{3.5}$$

Ist q nicht quadratfrei, so existiert eine Primzahlpotenz $r^a \| q$, $a \geqslant 2$. Man zerspalte $\sum_{d|q}$ in (3.5) in $\sum_{d_1|q} + \sum_{d_2|q} + \sum_{d_3|q}$, wobei d_1 alle Teiler von q der Gestalt $r^a \cdot t$, d_2 alle Teiler von q der Gestalt $r^{a-1} \cdot t$, mit $(t, r) = 1$, und d_3 alle restlichen Teiler durchläuft. Wegen des Faktors $\mu(q/d)$ in der Summe ist $\sum_{d_3|q} = 0$. In $\sum_{d_1}$ und $\sum_{d_2}$ durchläuft t alle Teiler von q/r^a, und wegen $\mu(qr^{-a}t^{-1}) = -\mu(qr^{-(a-1)}t^{-1})$ heben sich die beiden Summen gerade weg, d.h. es ist $a_q = 0$ für nichtquadratfreies q.

Sei nun q quadratfrei. Für $d|q$ ist dann $\mu(q/d) = \mu(q) \cdot \mu(d)$, und man erhält mit (3.4)

$$\{M(f)\}^{-1} \cdot a_q = \frac{\mu(q)}{\varphi(q)} \cdot \prod_{p|q} \left\{1 - f(p) \cdot \left(1 + \frac{f(p)-1}{p}\right)^{-1}\right\},$$

was zu (2.1) äquivalent ist.

Die Multiplikativität von $a_q^* = \{M(f)\}^{-1} a_q$ ist offensichtlich. Weiterhin ist mit (2.1)

$$\sum_{q \leqslant Q} \frac{1}{M(f)} \cdot |a_q| \leqslant \prod_{p \leqslant Q} (1+|a_p^*|) = \prod_{p \leqslant Q} \left\{1 + \frac{|1-f(p)|}{p} \cdot \left|1 + \frac{f(p)-1}{p}\right|^{-1}\right\}$$
$$\leqslant \exp\left\{\sum_{p \leqslant Q} \left(\frac{|1-f(p)|}{p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right)\right)\right\}.$$

Für reellwertige Funktionen ist $1-f(p) \geqslant 0$, also $\sum p^{-1} \cdot |1-f(p)|$ wegen (3.1) konvergent, und die Konvergenz von $\sum |a_q|$ folgt. {Für komplexwertige Funktionen ist hierzu die Konvergenz von $\sum p^{-1} \cdot |1-f(p)|$ vorausgesetzt worden.} Wegen $|c_q(n)| \leqslant n \cdot \tau(n)$ konvergiert auch $\sum_q |a_q c_q(n)|$. Demnach wird

$$M(f) \cdot \sum_{q=1}^{\infty} a_q^* \cdot c_q(n) = M(f) \cdot \prod_p \{1 + a_p^* c_p(n)\}.$$

Mit $M(f) = \prod\left(1+p^{-1}(f(p)-1)\right)$ und $c_p(n) = -1$ für $p\nmid n$, $c_p(n) = p-1$ für $p|n$, erhält man nach kurzer Rechnung

$$\sum_{q=1}^{\infty} a_q c_q(n) = \prod_p \left(1+\frac{f(p)-1}{p}\right)\cdot \prod_{p\nmid n}\left(1+\frac{1-f(p)}{p+f(p)-1}\right)\times$$

$$\times \prod_{p|n}\left(1-\frac{(p-1)(1-f(p))}{p+f(p)-1}\right) = \prod_{p|n} f(p) = f(n),$$

also ist (2.3) richtig.

Die Gültigkeit der Parseval'schen Gleichung kann im Falle reellwertiger Funktionen leicht aus Ergebnissen aus [12] (Folgerung 5) erschlossen werden. Man kann aber sowohl für reell- als auch für komplexwertige Funktionen die Parseval'sche Gleichung leicht direkt verifizieren:

$$\sum_{q\leqslant Q} |a_q|^2\cdot\varphi(q) \leqslant \prod_{p\leqslant Q}\left|1+\frac{f(p)-1}{p}\right|^2\cdot\left\{1+\frac{p-1}{p^2}\,|1-f(p)|^2\cdot\left|1+\frac{f(p)-1}{p}\right|^{-2}\right\}$$

$$= \prod_{p\leqslant Q}\frac{1}{p^2}\{|p+f(p)-1|^2+(p-1)\,|1-f(p)|^2\}.$$

Nach kurzer Rechnung wird dies gleich

$$= \prod_{p\leqslant Q}\left(1+\frac{|f(p)|^2-1}{p}\right).$$

Da dies für alle Q stets $\leqslant 1$ bleibt, konvergiert $\sum |a_q|^2\cdot\varphi(q)$, und im wesentlichen dieselbe Rechnung wie eben gibt die Gültigkeit von (2.4).

Ist $f\in\mathscr{F}_1^{(r)}$, so folgen (α) und (γ) des Zusatzes 1 unmittelbar aus (2.2) bzw. der Konvergenz von $\sum|a_q|$, während (β) und (δ) sich leicht aus (2.1) (mit (3.4)) ergeben.

Ist eine Folge $\{b_q\}$ aus $\mathscr{A}_1^{(r)}$ gegeben, so definiere man eine zahlentheoretische Funktion g durch

$$g(n) = \sum_q b_q c_q(n).$$

Nach kurzer Rechnung erhält man

$$g(n) = \prod_{p|n}\left(1+(1-a_p^*)^{-1}\cdot p a_p^*\right),$$

d.h. g ist stark multiplikativ und erfüllt $|g|\leqslant 1$ (nach (β)). Da $g(2)\neq -1$ und $\sum p^{-1}\left(1-g(p)\right)$ konvergent ist, existiert $M(g)\neq 0$ nach Delange ([4]). Nach Satz 1 existieren folglich die Entwicklungskoeffizienten $a_q(g)$, und eine kurze Rechnung mit (2.1) ergibt $a_q(g) = b_q$. Somit ist die Abbildung $T_1\colon \mathscr{F}_1^{(r)}\to\mathscr{A}_1^{(r)}$ surjektiv.

Sind $f, g\in\mathscr{F}_1^{(r)}$ und ist $T_1(f) = T_1(g)$, so folgt aus $a_p(f) = a_p(g)$ und (2.1), daß $f(p) = g(p)$ für alle p gilt, also ist $f = g$ und T_1 injektiv.

Die Sätze 2 und 3 werden durch ähnliche Rechnungen bewiesen.

4. Von Delange ([4], [5], man vgl. auch [10]) stammt folgendes Ergebnis: Ist f eine (komplexwertige) multiplikative Funktion vom Betrage $|f|\leqslant 1$, und konvergiert die Reihe

$$\sum_p p^{-1}\left(1-f(p)\right), \tag{4.1}$$

so existiert der Mittelwert $M(f)$.

Im Spezialfall *reellwertiger* multiplikativer Funktionen existiert für diesen Satz ein sehr einfacher Beweis, der im folgenden dargestellt werden soll. Wir zeigen:

Ist f eine reellwertige multiplikative Funktion vom Betrage $|f|\leqslant 1$, und konvergiert die Reihe (4.1), so existiert der Mittelwert $M(f)$.

Beweis. Wohlbekannt ist, daß aus der Konvergenz von

$$\sum_{n=1}^{\infty} d^{-1}\cdot|f'(d)| \tag{4.2}$$

die Existenz von $M(f)$ folgt. Denn es ist für $x\to\infty$

$$\sum_{n\leqslant x} f(n) = \sum_{n\leqslant x}\sum_{d|n} f'(d) = \sum_{d\leqslant x} f'(d)\cdot\left(\frac{x}{d}+O(1)\right) = x\cdot\sum_{d=1}^{\infty}\frac{f'(d)}{d}+o(x),$$

weil nämlich

$$\sum_{d\leqslant x}|f'(d)|\leqslant \sum_{d\leqslant\sqrt{x}}\tau(d)+\sum_{\sqrt{x}<d\leqslant x}\frac{|f'(d)|}{d}\cdot x = o(x)$$

ist, und $M(f) = \sum_{d=1}^{\infty} d^{-1}\cdot f'(d)$ existiert. Es verbleibt somit der Nachweis der Konvergenz der Reihe (4.2). Aus der Multiplikativität von $|f'|$ folgt die Abschätzung

$$\sum_{n\leqslant x} d^{-1}\cdot|f'(d)|\leqslant\prod_{p\leqslant x}\left(1+\frac{|f'(p)|}{p}+\frac{|f'(p^2)|}{p^2}+\ldots\right)$$

$$\leqslant \exp\left\{\sum_{p\leqslant x}\frac{|f'(p)|}{p}+2\cdot\sum_p\frac{1}{p(p-1)}\right\}.$$

Wegen $|f'(p)| = |f(p)-1| = 1-f(p)$ und der Konvergenz der Reihe (4.1) ist $\sum_{n\leqslant x} d^{-1}\cdot|f'(d)|$ für alle x gleichmäßig nach oben beschränkt, und die Behauptung folgt.

Literatur

[1] R. D. Carmichael, *Expansions of arithmetical functions in infinite series*, Proc. London Math. Soc. (2) 34 (1932), S. 1–26.

[2] E. Cohen, *Fourier expansions of arithmetical functions*, Bull. Amer. Math. Soc. 67 (1961), S. 145–147.

[3] — *A class of arithmetical functions*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 41 (1955), S. 939–944.

[4] H. Delange, *Sur les fonctions arithmétiques multiplicatives*, Ann. Scient. de l'École Norm. Sup. 78 (1961), S. 273–304.

[5] — *On a class of multiplicative arithmetical functions*, Scripta Math. 26 (1963), S. 121–141.

[6] M. J. Delsarte, *Essai sur l'application de la théorie des fonctions presque périodiques a l'arithmétique*, Ann. Sci. de l'École Norm. Sup. (3) 62 (1945), S. 185–204.

[7] G. Halász, *Über die Mittelwerte multiplikativer zahlentheoretischer Funktionen*, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 19 (1968), S. 365–403.

[8] G. H. Hardy, *Note on Ramanujan's trigonometrical function $c_q(n)$ and certain series of arithmetical functions*, Proc. Cambr. Phil. Soc. 20 (1921), S. 263–271.

[9] S. Ramanujan, *On certain trigonometrical sums and their applications in the theory of numbers*, Transact. Cambr. Phil. Soc. 22 (1918), S. 259–276.

[10] A. Rényi, *A new proof of a theorem of Delange*, Publ. Math. Debrecen **12** (1965), S. 323–329.

[11] W. Schwarz, *Einige Bemerkungen über periodische zahlentheoretische Funktionen*, Math. Nachr. 31 (1966), S. 125–136.

[12] — und J. Spilker, *Eine Anwendung des Approximationssatzes von Weierstraß-Stone auf Ramanujan–Summen*, Nieuw Archief voor Wiskunde (3) 19 (1971), S. 198–209.

[13] A. Wintner, *Eratosthenian averages*, Baltimore 1943.

[14] E. Wirsing, *Das asymptotische Verhalten von Summen über multiplikative Funktionen*, Math. Ann. 143 (1961), S. 75–102.

[15] — *Das asymptotische Verhalten von Summen über multiplikative Funktionen, II*, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 18 (1967), S. 411–467.

MATHEMATISCHES INSTITUT
der JOHANN WOLFGANG GOETHE-UNIVERSITÄT

Eingegangen 6. 12. 1971 (243)

ACTA ARITHMETICA
XXII (1973)

On the diophantine equations $\prod\limits_0^k x_i - \sum\limits_0^k x_i = n$ and $\sum\limits_0^k \frac{1}{x_i} = \frac{a}{n}$ *

by

C. Viola (Pisa)

1. Introduction. We are concerned with the equations

$$\prod_0^k x_i - \sum_0^k x_i = n \tag{1}$$

and

$$\sum_0^k \frac{1}{x_i} = \frac{a}{n}, \tag{2}$$

where a, k and n are given integers and the unknowns x_i take positive integral values. Equation (1) was first considered by Schinzel [9] in the case $n = 0$; he observed that for every k there exists a trivial solution, namely $(1, \ldots, 1, 2, k+1)$. Misiurewicz (quoted in [9], Bemerkung) proved that in the case $n = 0$, apart from any permutation of the x_i's, equation (1) has no solutions different from the trivial one when $k+1 = 2, 3, 4, 6, 24, 114, 174, 444$, while for any other $k < 1000$ there is at least one other solution(1). Later Schinzel conjectured (see [2], p. 238) that there is a $k > 1$ such that, for every sufficiently large n, (1) is soluble in integers $x_i > 1$. Note that equation (1) has for any n, k the trivial solution $(1, \ldots, 1, 2, n+k+1)$.

Leonardo Pisano [5] proved in 1202 that for any $a > 0$, $n > 0$, there is a k such that (2) is soluble with $x_i \neq x_j$ for $i \neq j$; obviously k depends on a and n. Many authors (see e. g. [3], [4], [8], [10], [11]) have been concerned with related problems; a classical topic is the investigation of conditions for a positive rational number to be the sum of distinct

---

* Research supported by Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(1) Note added in proof. With the aid of a computer, the result of Misiurewicz has been extended to all $k < 10^4$ (Amer. Math. Monthly 78(1971), pp. 1021-1022).