Literaturverzeichnis

[1] T. W. Cusick, *Simultaneous diophantine approximation of rational numbers*, Acta Arith. 22(1972), S. 1–9.
[2] J. H. van Lint, and H.-E. Richert, *On primes in arithmetic progressions*, Acta Arith. 11 (1965), S. 209–216.
[3], [4], [5] J. M. Wills, *Zur simultanen homogenen diophantischen Approximation I, II, III*, Monatsh. Math. 72 (1968), S. 254–263, 368–381, 74 (1970), S. 166–171.

FACHBEREICH MATHEMATIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN

Eingegangen 15. 9. 1971 (222)

ACTA ARITHMETICA
XXII (1973)

Amélioration de la majoration de $g(4)$ dans le problème de Waring: $g(4) \leqslant 30$

par

FRANÇOIS DRESS (Talence)

1. Historique. Introduction. Nous nous proposons de démontrer, par une méthode élémentaire, la majoration $g(4) \leqslant 30$. Auparavant, nous allons rappeler les résultats obtenus jusqu'à présent dans le problème de Waring pour les puissances quatrièmes.

On désigne traditionnellement par $g(k)$ le minimum de p, tel que tout entier positif soit somme de p puissances k-ièmes d'entiers positifs ou nuls. Historiquement, et si l'on excepte le théorème des 4 carrés de Lagrange, le cas des puissances quatrièmes a été le premier où l'existence de $g(k)$ fut établie: Liouville ([7], 1859) démontra l'existence de $g(4)$ et donna la majoration $g(4) \leqslant 53$. Nous allons tout d'abord rapporter sa méthode, car elle est à la base de celle que nous utiliserons dans notre démonstration.

On considère l'identité

$$6(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2)^2 = \sum_{i<j}(a_i+a_j)^4+\sum_{i<j}(a_i-a_j)^4 = B_{12},$$

en désignant par B_p un entier qui est somme de p bicarrés (en fait, l'identité que nous donnons ici est due à Lucas, mais celle qu'utilisait Liouville lui est équivalente). Comme tout entier est somme de 4 carrés, on obtient ainsi

$$6a^2 = B_{12}, \quad \text{pour tout } a,$$

puis

$$6m = 6(a^2+b^2+c^2+d^2) = B_{48}, \quad \text{pour tout } m,$$

et enfin, comme tout entier n est de la forme $6m+h\cdot 1^4$ (avec $h = 0, 1, \ldots, 5$),

$$n = B_{53}, \quad \text{pour tout } n, \quad \text{i.e. } g(4) \leqslant 53.$$

Les améliorations de la majoration de $g(4)$ obtenues jusqu'à présent par des méthodes élémentaires utilisent essentiellement deux remarques:

— certains entiers a peuvent s'écrire $a = a_1^2+a_2^2+2a_3^2$, de sorte que $6a^2 = B_{11}$;

— certains entiers m peuvent s'écrire comme somme de 3 carrés.

On a pu ainsi améliorer considérablement la majoration de Liouville. Les valeurs successives ont été 47 (Réalis [10], 1878), 45 (Lucas [8], 1878), 41 (Lucas [9], 1878), 39 (Fleck [5], 1906), 38 (Landau [6], 1907) et enfin 37 (Wieferich [11], 1909).

Ensuite Dickson ([2], 1933) utilise la théorie de Hardy et Littlewood pour établir $g(4) \leqslant 35$. La théorie asymptotique lui fournit le résultat:

$$\text{tout } n \text{ supérieur à } 10^{10^{3,3}} \text{ est } B_{35},$$

et il démontre que les entiers inférieurs sont également B_{35}.

Puis nous-même ([3], [4], 1970) avons démontré $g(4) \leqslant 34$ en reprenant la méthode élémentaire de Liouville et en y ajoutant l'idée nouvelle (que nous retrouverons dans cet article sous le nom de "lemme du bicarré arbitraire") qui permet d'écrire, non seulement $6a^2 = B_{11}$ pour certains entiers a, mais encore $6a^2 = k^4+B_{11}$, où k^4 est soit un bicarré arbitraire, soit un bicarré arbitraire de parité fixée (ce qui accroit considérablement la liste des nombres qui sont B_{11}).

Signalons pour terminer la minoration $g(4) \geqslant 19$. Des tables numériques ont été faites jusqu'à 158 000 (Breitschneider, puis Chandler). Les seuls nombres dans ces tables qui nécéssitent 19 bicarrés sont 79, 159, 239, 319, 399, 479 et 559; en outre, de 13 800 à 158 000, tous les nombres sont B_{16}. Quoique tous les spécialistes soient convaincus que la valeur exacte de $g(4)$ est 19, il n'y a aucun espoir de le démontrer en utilisant les constantes fournies par la théorie asymptotique et actuellement connues: Auluck [1] a établi que:

$$\text{tout } n \text{ supérieur à } 10^{10^{88.39}} \text{ est } B_{19}.$$

2. Principe de la démonstration. Etant donné un entier N quelconque, nous l'écrivons

$$N = A^2+B^2+r,$$

avec certaines conditions sur A, B et r qui seront explicitées ultérieurement. Utilisant ensuite le lemme du bicarré arbitraire indiqué dans l'introduction, nous pouvons écrire $6A^2+6B^2$ comme une somme de 24 bicarrés dont 2 peuvent être choisis à notre convenance.

Nous employons alors une identité que l'on trouve dans la résolution du "problème facile de Waring" (écrire tout entier sous la forme $\pm z_1^k \pm \ldots \ldots \pm z_s^k$), et qui permet de remplacer les 2 bicarrés arbitraires par 2 autres, moyennant un certain terme correctif que nous utilisons pour "presque tuer" le reste $6r$.

Nous arrivons ainsi à un résultat intermédiaire essentiel: pour une certaine valeur de T, tout intervalle de longueur T contient un entier qui est B_{24} (et même deux ou trois dont la valeur modulo 16 est en outre connue). La démonstration se termine enfin en trouvant $T/16$ valeurs consécutives de t telles que $16t+\mu$, pour $\mu = 1, 2, \ldots, 6$, soit B_6. La recherche de ces $T/16$ valeurs consécutives a nécéssité de longs calculs sur ordinateur et le principe du programme utilisé fera l'objet d'un appendice à cet article.

3. Lemmes préliminaires.

Lemme 1. *Tout entier N supérieur à 9 400 peut s'écrire*

$$N = (2a+1)^2+(2b+1)^2+r$$

avec $|2a+1|, |2b+1| > 0.4\sqrt{2N}$ *et* $|r| < 2^{2\frac14}N^{\frac14}$.

Démonstration. On commence par considérer le plus grand carré congru à 0 ou 2 modulo 4, inférieur ou égal à $2N$, et on pose

$$2N = p^2+\varrho$$

avec $p \equiv 0$ ou $2 \pmod 4$ et $0 \leqslant \varrho < 4\sqrt{2N}$.

Outre l'inégalité sur ϱ, on remarquera que

$$|p| = \sqrt{2N-\varrho} > \sqrt{2N-4\sqrt{2N}} > 0.985\sqrt{2N}$$

lorsque N est supérieur à 9 100.

Puis on fait la même chose pour ϱ, à des détails près de congruences, soit

$$\varrho = q^2+2r$$

avec

$$q = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad p \equiv 0 \pmod 4, \\ 0 & \text{si} \quad p \equiv 2 \pmod 4 \end{cases}$$

et $|2r| < 4\sqrt{\varrho} < 2^{3\frac14}N^{\frac14}$.

On remarquera enfin que

$$|q| = \sqrt{\varrho-2r} < \sqrt{4(2N)^{\frac14}+2^{3\frac14}N^{\frac14}} < 0.185\sqrt{2N}$$

lorsque N est supérieur à 9 400.

Le lemme 1 résulte des calculs précédents, en notant que

$$2N = p^2+q^2+2r$$

peut s'écrire

$$N = \left(\frac{p+q}{2}\right)^2+\left(\frac{p-q}{2}\right)^2+r$$

et que $(p+q)/2 = 2a+1$, $(p-q)/2 = 2b+1$ d'après les conditions de congruences modulo 4. Il est ensuite immédiat de constater que les inégalités établies lors des calculs entraînent celles énoncées dans le lemme.

LEMME 2. *Tout entier N supérieur à 10 750 peut s'écrire*

$$N = (2a+1)^2+(4b+2)^2+r$$

avec $|2a+1|, |4b+2| > 0.4\sqrt{2N}$ *et* $|r| < 3\cdot 2^{1\frac14} N^{\frac14}$.

Démonstration. Similaire à celle du lemme 1; on pose

$$2N = p^2+\varrho$$

avec $p \equiv 1, 3, 5$ ou $7 \pmod 8$ et $0 \leqslant \varrho < 4\sqrt{2N}$.

Outre l'inégalité sur ϱ, on remarquera comme précédemment que

$$|p| > 0.985\sqrt{2N}$$

lorque N est supérieur à 9 100.

Puis on pose

$$\varrho = q^2+2r$$

avec

$$q \equiv \begin{cases} 3 \text{ ou } 5 & \text{si } p \equiv 1 \text{ ou } 7 \pmod 8, \\ 1 \text{ ou } 7 & \text{si } p \equiv 3 \text{ ou } 5 \pmod 8 \end{cases}$$

(il y a chaque fois deux possibilités modulo 8 pour q; on choisit celle qui rend $2r$ minimum en valeur absolue) et $|2r| < 6\sqrt{\varrho} < 3\cdot 2^{2\frac14} N^{\frac14}$.

On remarquera enfin que

$$|q| = \sqrt{\varrho-2r} < \sqrt{4(2N)^{\frac12}+3\cdot 2^{2\frac14} N^{\frac14}} < 0.185\sqrt{2N}$$

lorsque N est supérieur à 10 750.

La fin est également comme précédemment, en notant que l'un des deux entiers $(p+q)/2$, $(p-q)/2$ est de la forme $2a+1$, l'autre de la forme $4b+2$.

LEMME 3. *Tout entier N supérieur à 15 900 peut s'écrire*

$$N = (2a+1)^2+(8b+4)^2+r$$

avec $|2a+1|, |8b+4| > 0.4\sqrt{2N}$ *et* $|r| < 7\cdot 2^{1\frac14} N^{\frac14}$.

Démonstration. Similaire toujours à celle du lemme 1; on pose

$$2N = p^2+\varrho$$

avec $p \equiv 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13$ ou $15 \pmod{16}$ et $0 \leqslant \varrho < 4\sqrt{2N}$.

Outre l'inégalité sur ϱ, on remarquera comme précédemment que

$$|p| > 0.985\sqrt{2N}$$

lorsque N est supérieur à 9 100.

Puis on pose

$$\varrho = q^2+2r$$

avec

$$q \equiv \begin{cases} 7 \text{ ou } 9 & \text{si } p \equiv 1 \text{ ou } 15 \pmod{16}, \\ 5 \text{ ou } 11 & \text{si } p \equiv 3 \text{ ou } 13 \pmod{16}, \\ 3 \text{ ou } 13 & \text{si } p \equiv 5 \text{ ou } 11 \pmod{16}, \\ 1 \text{ ou } 15 & \text{si } p \equiv 7 \text{ ou } 9 \pmod{16} \end{cases}$$

(on choisit chaque fois la possibilité qui rend $2r$ minimum en valeur absolue) et $|2r| < 14\sqrt{\varrho} < 7\cdot 2^{2\frac14} N^{\frac14}$.

On remarquera enfin que

$$|q| = \sqrt{\varrho-2r} < \sqrt{4(2N)^{\frac12}+7\cdot 2^{2\frac14} N^{\frac14}} < 0.185\sqrt{2N}$$

lorsque N est supérieur à 15 900.

La fin est également comme précédemment, en notant que l'un des deux entiers $(p+q)/2$, $(p-q)/2$ est de la forme $2a+1$, l'autre de la forme $8b+4$.

LEMME 4. *Tout entier N supérieur à 37 600 peut s'écrire*

$$N = (4a+2)^2+(4b+2)^2+r$$

avec $|4a+2|, |4b+2| > 0.4\sqrt{2N}$ *et* $|r| < 2^{3\frac34} N^{\frac14}$.

Démonstration. On applique le lemme 1 à $N/4$.

LEMME 5. *Tout entier N supérieur à 43 000 peut s'écrire*

$$N = (4a+2)^2+(8b+4)^2+r$$

avec $|4a+2|, |8b+4| > 0.4\sqrt{2N}$ *et* $|r| < 3\cdot 2^{2\frac34} N^{\frac14}$.

Démonstration. On applique le lemme 2 à $N/4$.

Il nous sera commode d'utiliser les cinq lemmes qui précèdent sous la forme unifiée suivante:

LEMME 6. *Tout entier N supérieur à 43 000 peut s'écrire*

$$N = A^2+B^2+r,$$

le couple (A, B) pouvant être choisi sous l'une quelconque des formes suivantes:

$$(2a+1, 2b+1),$$
$$(2a+1, 4b+2),$$
$$(2a+1, 8b+4),$$
$$(4a+2, 4b+2),$$
$$(4a+2, 8b+4),$$

et les nombres A, B, r vérifiant les inégalités

$$|A|,\ |B| > 0.4\sqrt{2N}, \qquad |r| < 3\cdot 2^{2\frac{3}{4}} N^{\frac{1}{4}}.$$

Nous terminerons ces résultats préliminaires par le lemme, ou plutôt les lemmes "du bicarré arbitraire".

LEMME 7. *Pour tout entier de la forme $m = 2a+1$, et pour tout entier vérifiant $h < \sqrt{2m}$, on a*

$$6m^2 = h^4 + B_{11}.$$

Démonstration. Comme $h^2 < 4a+2$, on peut écrire $4a+2 = n+h^2$, avec $n \equiv 1$ ou $2 \pmod 4$. Alors n est somme de 3 carrés, soit

$$4a+2 = x^2+y^2+z^2+h^2.$$

On utilise alors l'identité de Liouville:

$$\begin{aligned} 24(4a+2)^2 &= 24(x^2+y^2+z^2+h^2)^2 \\ &= (x+y+z+h)^4+(x+y+z-h)^4+(x+y-z+h)^4+ \\ &\quad +(x-y+z+h)^4+(x+y-z-h)^4+(x-y+z-h)^4+ \\ &\quad +(x-y-z+h)^4+(x-y-z-h)^4+(2x)^4+(2y)^4+ \\ &\quad +(2z)^4+(2h)^4 \\ &= (2h)^4+B_{11}. \end{aligned}$$

On constate que tous les bicarrés qui figurent sont pairs, ce qui permet de diviser par 2^4 et d'obtenir le résultat cherché.

LEMME 8. *Pour tout entier de la forme $m = 4a+2$, et pour tout entier impair vérifiant $2k+1 < \sqrt{2m}$, on a*

$$6m^2 = (2k+1)^4 + B_{11}.$$

Démonstration. Similaire à celle du lemme 7; on peut écrire $8a+4 = n+(2k+1)^2$, avec $n \equiv 3 \pmod 8$. Alors n est somme de 3 carrés, et l'identité de Liouville donne:

$$24(8a+4)^2 = (4k+2)^4 + B_{11}.$$

On constate comme précédemment que tous les bicarrés qui figurent dans l'identité sont pairs, ce qui permet de diviser par 2^4 et d'obtenir le résultat cherché.

LEMME 9. *Pour tout entier de la forme $m = 8a+4$, et pour tout entier pair vérifiant $2k < \sqrt{2m}$, on a*

$$6m^2 = (2k)^4 + B_{11}.$$

Démonstration. On applique le lemme 7 à $m/4$, puis on multiplie par 16.

4. Démonstration. Partie théorique. Tout entier $6N$ supérieur à 258 000 peut donc s'écrire

$$6N = 6A^2+6B^2+6r,$$

avec les conditions et inégalités données au lemme 6. En vertu des lemmes "du bicarré arbitraire", nous pouvons ensuite écrire

$$6A^2 = x^4+B_{11},$$
$$6B^2 = y^4+B_{11},$$

moyennant d'éventuelles conditions de parité sur x et y, et sous réserve des inégalités

$$|x| < \sqrt{2A}, \qquad |y| < \sqrt{2B},$$

inégalités qui seront vérifiées si l'on impose

$$|x|,\ |y| < \sqrt{0.8\sqrt{2N}} = \gamma N^{\frac{1}{4}} \qquad (\gamma = 0.8^{\frac{1}{2}}2^{\frac{1}{4}} = 1.0636\ldots).$$

Nous utilisons maintenant une identité que l'on trouve dans la résolution du "problème facile de Waring":

$$(2n+1)^4+(n-8)^4 = (2n-1)^4+(n+8)^4-4080n,$$

et posant $x = 2n+1$, $y = n-8$, nous obtenons

$$\begin{aligned} 6N &= 6A^2+6B^2+6r = (2n+1)^4+(n-8)^4+B_{22}+6r \\ &= (2n-1)^4+(n+8)^4+B_{22}+6(r-680n). \end{aligned}$$

Laissons tomber très provisoirement les conditions d'inégalités. Choisissant pour n l'entier le plus voisin de $r/680$, nous obtenons le résultat brut suivant: il existe toujours un entier qui est B_{24} dans l'intervalle $[6N-2040,\ 6N+2040[$, ou dans l'intervalle $[6N-4080,\ 6N+4080[$ s'il intervient pour n une condition de parité provenant d'un des lemmes du bicarré arbitraire.

Réglons tout d'abord le problème des majorations imposées à $|x|$ et $|y|$, i.e. à $|2n+1|$ et $|n-8|$. Comme n est un entier qui sera dans certains cas obligatoirement pair ou impair, et qu'il faut le choisir le plus voisin de $r/680$, on a donc

$$|n| < \frac{|r|}{680}+1,$$

ce qui entraîne, compte tenu de $|r| < 3\cdot 2^{2\frac{3}{4}} N^{\frac{1}{4}} = 20.181\ldots N^{\frac{1}{4}}$, que les deux inégalités

$$\big|2\,|n|+1\big| < \gamma N^{\frac{1}{4}} \qquad \text{et} \qquad \big||n|+8\big| < \gamma N^{\frac{1}{4}}$$

sont vérifiées lorsque $6N$ est supérieur à 34 500, valeur inférieure à la borne inférieure fixée auparavant pour $6N$ (qui était 258 000).

Avant d'énoncer le résultat complet, remarquons enfin que l'entier B_{24} dont l'existence a été affirmée plus haut a même valeur modulo 16 que $6A^2+6B^2$.

THÉORÈME. *Tout intervalle de longueur* $4\,080 = 16\cdot 255$ *contient*

— *un entier* B_{24} *de la forme* $16p+12$,

— *un entier* B_{24} *de la forme* $16p+14$,

et tout intervalle de longueur $8\,160 = 16\cdot 510$ *contient*

— *un entier* B_{24} *de la forme* $16p$,

— *un entier* B_{24} *de la forme* $16p+6$,

— *un entier* B_{24} *de la forme* $16p+8$.

Démonstration. Après ce que nous avons déjà exposé, il nous suffira, pour les intervalles au-delà de 258 000, d'énumérer les couples (A, B) du lemme 6 que nous utilisons pour les différentes valeurs modulo 16:

$$\begin{aligned}16p+12&: (2a+1, 2b+1) \text{ et } n \text{ quelconque},\\ 16p+14&: (2a+1, 4b+2) \text{ et } n \text{ quelconque},\\ 16p&: (4a+2, 4b+2) \text{ et } n \text{ impair},\\ 16p+6&: (2a+1, 8b+4) \text{ et } n \text{ pair},\\ 16p+8&: (4a+2, 8b+4) \text{ et } n \text{ pair}.\end{aligned}$$

Quant aux intervalles avant 258 000, il est immédiat de vérifier directement que tous les nombres qu'ils contiennent sont B_{24} (et même B_{19}, ainsi qu'il résulte des tables connues).

5. Démonstration. Calculs numériques et fin. Les calculs effectués sur ordinateur (et exposés dans l'appendice qui suit cet article) fournissent le résultat numérique suivant:

LEMME 10. *Pour chaque valeur de* μ, $1\leqslant\mu\leqslant 6$, *il existe un entier* $t_\mu < 0.83\cdot 10^9$ *tel que les 510 nombres* $16t_\mu+\mu$, $16(t_\mu+1)+\mu, \ldots, 16(t_\mu+509)+\mu$ *soient* B_6.

THÉORÈME. *Tout entier* $n\geqslant 1.328\cdot 10^{10}$ *est* B_{30}.

Démonstration. Quelle que soit la valeur de n modulo 16, il existe toujours μ, $1\leqslant\mu\leqslant 6$, tel que $n-(16t+\mu)$ soit de la forme $16p+0, 6, 8, 12$ ou 14. De plus, cet entier sera positif si $t < 0.83\cdot 10^9$. Nous prenons alors pour t les 510 valeurs consécutives $t_\mu, t_\mu+1, \ldots, t_\mu+509$; d'après le théorème établi au paragraphe précédent, $n-(16t+\mu)$ est B_{24} pour l'une des valeurs données à t, et comme $16t+\mu$ est B_6, n est bien B_{30}.

COROLLAIRE. $g(4)\leqslant 30$.

Démonstration. Il suffit d'ajouter au théorème précédent que tout entier $n < 1.328\cdot 10^{10}$ est B_{30}. Une vérification directe ne pose aucune difficulté. On peut aussi bien s'en référer aux tables existantes (cf. par exemple dans Dickson, "Modern elementary theory of numbers": tout $n < 13\,800$ est B_{19}, tout n de 13 800 à $3.5\cdot 10^{12}$ est B_{16}).

APPENDICE
PRINCIPE DU PROGRAMME UTILISE POUR DEMONTRER LE LEMME 10 SUR ORDINATEUR

(par François Dress et Jean Hardouin Duparc)

1. Position du problème et méthode. Si k est pair, $k^4\equiv 0 \pmod{16}$ et si k est impair, $k^4\equiv 1 \pmod{16}$. Rechercher des sommes de 6 bicarrés qui soient de la forme $16t+\mu$ ($\mu = 1, 2, \ldots, 6$) revient alors à chercher des entiers qui soient sommes de $6-\mu$ termes $(2h)^4$ et de μ termes $(2h+1)^4$. Pour simplifier on divisera par 16 et on travaillera sur t au lieu de $16t+\mu$. Posant

$$\mathscr{A} = (i^4) = (0, 1, 16, 81, \ldots)$$

$$\mathscr{B} = \big([(2j+1)^4/16]\big) = (0, 5, 39, 150, \ldots)$$

nous arrivons à l'étude des 6 ensembles

$$U_\mu = (6-\mu)\mathscr{A} + \mu\mathscr{B}$$

et à la recherche, pour chacun, de la première plage de 510 entiers consécutifs.

Deux méthodes peuvent être envisagées:

— la méthode analytique où l'on recherche si un entier donné est un élément de U;

— la méthode synthétique où l'on construit les éléments successifs de U.

Le travail par tranches que nous avons adopté requiert la seconde méthode, où le temps de calcul ne varie que très lentement en fonction de la longueur de la tranche, tandis qu'il varie quasi-linéairement dans la première.

2. Programmation. Le programme a été écrit d'abord en langage PL1/DOS; la souplesse de ce langage a permis une mise au point très rapide cependant que l'exécution restait trop lente.

Après traduction, partie en langage Fortran, partie en langage Assembleur 360, nous avons obtenu un programme permettant de traiter des tranches de 760 000 nombres avec un temps de calcul raisonnable (30 à 200 minutes par tranche).

Grâce à ce programme il a été facile de traiter le cas de U_3 puis, par ordre de difficulté croissante, de U_4, U_2, U_5 et U_1. Mais il est apparu que les temps de calcul deviendraient prohibitifs pour U_6, et nous avons dû découper ce dernier ensemble en 5 parties, utilisant pour cela les propriétés de congruences modulo 5 des $b_j = [(2j+1)^4/16]$ (congruences correspondant aux congruences modulo 80 des bicarrés impairs). On a $b_{5n+2} \equiv 4 (\mathrm{mod}\, 5)$ et $b_{5n} \equiv b_{5n+1} \equiv b_{5n+3} \equiv b_{5n+4} \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 5)$, ce qui conduit à effectuer une partition de $\mathscr{B}$ en $\mathscr{B}^* = \{b_{5n+2}\}$ et $\mathscr{B}'$, ensemble complémentaire. On effectue également une partition de U_6 en $U_{6,i}$, ensembles des $t \in U_6$ qui vérifient $t \equiv i (\mathrm{mod}\, 5)$. Posant

$$V_\nu = \nu \mathscr{B}^* + (6-\nu)\mathscr{B}',$$

on constate que

$$U_{6,0} = V_5 \cup V_0,$$

$$U_{6,1} = V_4,$$

$$U_{6,2} = V_3,$$

$$U_{6,3} = V_2,$$

$$U_{6,4} = V_1 \cup V_6.$$

La suite $\mathscr{B}^*$ comportant relativement peu d'éléments, c'est le sous-ensemble $U_{6,1} = V_4$ qui risque d'être le plus pauvre et donc de conditionner l'existence des plages de 510 entiers consécutifs (hypothèse confirmée par l'expérimentation dans les tranches inférieures: les séquences d'entiers consécutifs de U_6 sont de plus en plus fréquemment limitées par l'absence à chaque extrémité d'un élément de $U_{6,1}$).

Nous avons alors écrit un programme spécial pour rechercher parmi les éléments de $U_{6,1}$ des plages de 102 valeurs consécutives. Après avoir obtenu les 6 premières plages, nous avons commencé à construire les ensembles V_0, V_1, V_2 et V_3 correspondant (à l'exclusion de V_5 et V_6), et nous avons arrêté cette construction dès que nous avons constaté qu'à la quatrième plage étaient associés 510 entiers t consécutifs de U_6. Il s'ensuit que la valeur numérique que nous indiquerons n'est peut-être pas la plus petite (de très peu en tout cas), mais nous ne pouvions pas nous payer le luxe de le vérifier!

3. Résultats. Les calculs, effectuées sur l'I.B.M. 360-44 de la Faculté des Sciences de Bordeaux, ont demandé environ 500 heures. Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous qui indique pour chaque valeur de μ la première des 510 valeurs consécutives de t ainsi que la longueur réelle de la plage trouvée (sauf peut-être pour $\mu = 6$, cette valeur de t est la plus petite qui soit suivie d'une plage d'au moins 510).

$\mu = 1$	$t =$ 14 536 972	$l = 564$
2	3 094 976	594
3	1 620 025	554
4	3 369 789	524
5	22 802 918	534
6	829 232 751	$\geqslant 510$

Le lemme 10, avec sa majoration $t_\mu < 0.83 \cdot 10^9$, découle immédiatement de ce tableau.

Bibliographie

[1] F. C. Auluck, *On Waring's problem for biquadrates*, Proc. Indian Acad. Sc., Sect. A, 11 (1940), p. 437–450.

[2] L. E. Dickson, *Recent progress on Waring's theorem and its generalizations*, Bull. Amer. Math. Soc. 39 (1933), p. 701–727.

[3] F. Dress, *Amélioration de la majoration de $g(4)$ dans le problème de Waring: $g(4) \leqslant 34$*, Séminaire de théorie des nombres, Paris, 1969/70, n°15.

[4] — *Sur le problème de Waring pour les puissances quatrièmes*, C.-R. Acad. Sc. Paris, Sér. A, 272 (1971), p. 457–459.

[5] A. Fleck, *Über die Darstellung ganzer Zahlen als Summen von positiven Kuben, und von Biquadraten ganzer Zahlen*, Sitzungsber. Berlin. math. Gesell. 5 (1906), p. 2–9.

[6] E. Landau, *Über die Darstellung einer ganzen Zahl als Summe von Biquadraten*, Rend. Circ. Mat. Palermo, 23 (1907), p. 91–96.

[7] J. Liouville, *Lectures au Collège de France* (imprimé dans: V. A. Lebesgue, *Exercices d'analyse numérique*, Paris 1859, p. 112–115).

[8] E. Lucas, *Sur la décomposition des nombres en bicarrés*, Nouv. Corresp. math. 4 (1878), p. 323–325.

[9] — *Sur un théorème de M. Liouville concernant la décomposition des nombres en bicarrés*, Nouv. Ann. math., Sér. 2, 17 (1878), p. 536–537.

[10] S. Réalis, *Note sur un théorème d'arithmétique*, Nouv. Corresp. math. 4 (1878), p. 209–210.

[11] A. Wieferich, *Über die Darstellung der Zahlen als Summen von Biquadraten*, Math. Ann. 66 (1909), p. 106–108.

U.E.R. DE MATHÉMATIQUES ET D'INFORMATIQUE
UNIVERSITÉ DE BORDEAUX I
351, COURS DE LA LIBÉRATION
33 – Talence, France

Reçu le 11. 10. 1971 (228)