Bibliography

[1] W. B. Giles and D. L. McQuillan, *A problem on rational invariants*, J. Number Theory 1 (1969), pp. 375–384.

[2] H. Hasse, *Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper*, 3 Auflage, Wurzburg–Wien 1970.

[3] D. Hilbert, *Gesammelte Abhandlungen*, erster Band, *Zahlentheorie*, Berlin 1932.

[4] I. Reiner, *Integral representations of cyclic groups of prime order*, Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957), pp. 142–146.

[5] M. Rosen, *Two theorems on Galois cohomology*, Proc. Amer. Math. Soc. 17 (1966), pp. 1183–1185.

[6] H. Yokoi, *A note on the Galois cohomology group of the ring of integers in an algebraic number field*, Proc. Japan Acad. 40 (1964), pp. 245–246.

Received on 12. 8. 1971 (204)

ACTA ARITHMETICA
XXII (1973)

Asymptotisches Verhalten einer diophantischen Approximations-Funktion

von

R. Schark und J. M. Wills (Berlin)

R sei die Menge der reellen Zahlen; N der natürlichen, Z der ganzen, $F = R - Z$ der nichtganzen Zahlen. Zu einem $x \in R$ sei $\|x\|$ der Abstand von der nächsten ganzen Zahl und $[x]$ die größte ganze Zahl $\leqslant x$. Weiter sei $n \in N$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in F^n$ und

$$\omega(n) = \inf_{\alpha \in F^n} \sup_{q \in Z} \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \|q\alpha_i\|.$$

In der vorliegenden Arbeit wird das asymptotische Verhalten von $\omega(n)$ untersucht. Zuvor seien die bisherigen Ergebnisse über $\omega(n)$ zusammengestellt:

Zu einem $z \geqslant 2$, $z \in N$ sei $z = \prod_{i=1}^{h} p_i^{c_i}$ die kanonische Primzahlzerlegung und $h(z) = h$ bei nichtprimem z die Anzahl der verschiedenen Primteiler von z und $h(z) = h = 0$, wenn z prim ist. Weiter sei $\|x\|_z = \min_{g \in Z} |x - gz|$. Dann ist nach [5], S. 170:

$$\omega(n) = \inf_{a,z} \left\{ \frac{a}{z} \,\middle|\, a \in N, z \in N, h(z) \leqslant n;\ \text{es gibt ein } k = (k_1, \ldots, k_n) \in N^n \right.$$
$$\left. \text{mit } 0 < k_i < z, 1 \leqslant i \leqslant n \text{ und } \max_{1 \leqslant q \leqslant z} \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \|qk_i\|_z \leqslant a \right\}. \tag{1}$$

Nach [3], Lemma 2, ist $\omega(1) = \frac{1}{3}$ und nach [4], Satz 2:

$$\frac{1}{2n^2} \leqslant \omega(n) \leqslant \frac{1}{w(n)} \quad \text{für} \quad n \geqslant 2.$$

Dabei ist $w(n) = \max\{z \mid \frac{1}{2}\varphi(z) + h(z) \leqslant n\}$, φ die Euler-Funktion. Nach [4], Satz 1, ist $w(1) = 3$, $w(2) = 5$, $w(3) = 8$ und

$$6(n-2) \leqslant w(n) \leqslant n^2 - 4 \quad \text{für} \quad n \geqslant 4.$$

Cusick zeigte in [1]:

$$\omega(n) = \frac{1}{w(n)} \text{ für } n = 2, \ldots, 7 \quad \text{und} \quad w(n) = 6(n-2) \text{ für } n = 4, \ldots, 7.$$

Vermutlich gilt $\omega(n) = 1/w(n)$ für alle $n \geqslant 1$.

Nach [5] ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{w(n)} \log\log n = \tfrac{1}{2} e^{-C}, \tag{2}$$

also

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \omega(n) n \log\log n \leqslant \tfrac{1}{2} e^{-C} \qquad (C\text{: Euler-Konstante}).$$

Weiter wurde in [5] gezeigt

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, \omega(n) n \log n \geqslant \tfrac{1}{2} e^{-C}.$$

In der vorliegenden Arbeit zeigen wir:

Satz.

$$\lim_{n\to\infty} \omega(n) n \log\log n = \tfrac{1}{2} e^{-C}.$$

Beweis. Nach (1) ist

$$\frac{1}{\omega(n)} = \sup_{a,z} \left\{ \frac{z}{a} \,\middle|\, \begin{array}{l} a \in N,\ z \in N,\ h(z) \leqslant n;\ \text{es gibt ein } k = (k_1, \ldots, k_n) \in N^n \\ \text{mit } 0 < k_i < z,\ 1 \leqslant i \leqslant n \text{ so, daß } qk \equiv x \bmod z \text{ für} \\ \text{jedes } q \in [1, z] \text{ in einem } k = k_i \text{ und einem } x \text{ mit} \\ |x| \leqslant a \text{ lösbar ist} \end{array} \right\}.$$

Beschränkt man sich hier nur noch auf die $q \in [1, z]$ mit $(q, z) = 1$, so wird die Bedingung schwächer und das Supremum größer. Ist $(q, z) = 1$ und $(x, z) = d \geqslant 1$, so ist für die Lösung von $qk \equiv x \bmod z$ notwendig und hinreichend: $(k, z) = d$.

In diesem Fall hat $qk \equiv x \bmod z$ bei festem x und festem k mit $(x, z) = (k, z) = d$ nach [4], Lemma 13, $\dfrac{\varphi(z)}{\varphi(z/d)}$ verschiedene Lösungen $q \in [1, z]$ mit $(q, z) = 1$.

Damit ist für ein festes $k_i \in [1, z]$ mit $(k_i, z) = d$ die Anzahl A_i der Lösungen q mit $q \in [1, z]$ und $(q, z) = 1$ von $qk_i \equiv x \bmod z$ mit $|x| \leqslant a$:

$$A_i \leqslant \frac{\varphi(z)}{\varphi(z/d)} [\text{Anzahl der } x \text{ mit } |x| \leqslant a \text{ und } (x, z) = d] = \frac{\varphi(z)}{\varphi(z/d)} \sum_{\substack{(x,z)=d \\ |x| \leqslant a}} 1.$$

Die Anzahl der $q \in [1, z]$ mit $(q, z) = 1$ ist $\varphi(z)$; die Anzahl der k_i mit $(k_i, z) = d$ ist $\leqslant n$ nach (1). Also folgt

$$\varphi(z) \leqslant n \max_{1 \leqslant i \leqslant n} A_i = nA$$

und

$$\frac{1}{\omega(n)} \leqslant \sup_{z,a,d} \left\{ \frac{z}{a} \,\middle|\, \frac{\varphi(z)}{A} \leqslant n \right\},$$

bzw.

$$\frac{1}{\omega(n)} \leqslant \sup_{z,a,d} \left\{ \frac{z}{a} \,\middle|\, \varphi\left(\frac{z}{d}\right) \Big[\sum_{\substack{(x,z)=d \\ |x| \leqslant a}} 1 \Big]^{-1} \leqslant n \right\}.$$

Mit $z/d = z'$, $[a/d] = a' \leqslant a/d$ ist

$$\frac{z'}{a'} \geqslant \frac{z}{a}, \qquad \varphi(z') = \varphi(z/d) \qquad \text{und} \qquad \sum_{\substack{(x,z)=d \\ |x| \leqslant a}} 1 = \sum_{\substack{(x,z')=1 \\ |x| \leqslant a}} 1,$$

also mit $\frac{1}{2} \sum\limits_{\substack{(x,z)=1 \\ |x| \leqslant a}} 1 = \sum\limits_{\substack{(x,z)=1 \\ 1 \leqslant x \leqslant a}} 1 = \phi(a)$ (verallgemeinerte Euler-Funktion)

$$\frac{1}{\omega(n)} \leqslant \sup_{z,a} \left\{ \frac{z}{a} \,\middle|\, \frac{\varphi(z)}{2\phi(a)} \leqslant n \right\}. \tag{3}$$

Ist $a = 1$, dann ist $\phi(a) = 1$ und wir setzen

$$v(n) = \max_{z} \left\{ z \,\middle|\, \frac{\varphi(z)}{2} \leqslant n \right\}, \tag{4}$$

(wegen $\varphi(z) \to \infty$ darf hier sup durch max ersetzt werden).

Mit (3) und (4) verläuft jetzt der Beweis so: Nach Lemma 1 ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{v(n)} \log\log n = \tfrac{1}{2} e^{-C}. \tag{5}$$

Sei $n \in N$ und weiter seien $z = \prod\limits_{i=1}^{h} p_i^{c_i}$, $a \in N$ mit $\varphi(z)/2\phi(a) \leqslant n$ vorgegeben. Ist $a \geqslant p_h$, dann folgt mit Lemma 2:

$$\frac{z}{a} \leqslant \frac{17}{2} \frac{\varphi(z)}{\phi(a)} \leqslant 17n. \tag{6}$$

Ist $a < p_h$, dann folgt mit Lemma 3:

$$\text{Es gibt ein } z' \geqslant \frac{z}{a} \text{ mit } \frac{\varphi(z')}{2} \leqslant \frac{\varphi(z)}{2\phi(a)} \leqslant n. \tag{7}$$

Wegen (5) gibt es ein $n_0 \in N$ mit $v(n) \geqslant 17n$ für $n \geqslant n_0$.
Daher folgt aus (6) und (7):

$$\frac{1}{\omega(n)} \leqslant v(n) \qquad \text{für} \qquad n > n_0.$$

Also ist

$$\frac{1}{v(n)} \leqslant \omega(n) \leqslant \frac{1}{w(n)} \qquad \text{für} \qquad n > n_0.$$

Daraus folgt mit (2) und (5) die Behauptung des Satzes.

LEMMA 1.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{v(n)} \log\log n = \tfrac{1}{2} e^{-C}.$$

Beweis. Sei q_i die i-te Primzahl, also $q_1 = 2$, $q_2 = 3$ usw. Wählt man in (4) speziell $n_h = \frac{1}{2}\prod_{i=1}^{h}(q_i-1)$, dann ist $v(n_h) = \prod_{i=1}^{h} q_i$ und

$$\frac{n_h}{v(n_h)} = \frac{1}{2}\prod_{i=1}^{h}\left(1-\frac{1}{q_i}\right).$$

Nach [5] (3) ist

$$\lim_{h\to\infty} \prod_{i=1}^{h}\left(1-\frac{1}{q_i}\right) \log\log \prod_{i=1}^{h} q_i = e^{-C},$$

also

$$\lim_{h\to\infty} \frac{n_h}{v(n_h)} \log\log v(n_h) = \tfrac{1}{2} e^{-C}.$$

Daraus folgt für hinreichend große n_h: $n_h \leqslant v(n_h) \leqslant n_h^2$; und wegen $\log\log x^2 = \log 2 + \log\log x$ folgt

$$\lim_{h\to\infty} \frac{n_h}{v(n_h)} \log\log n_h = \tfrac{1}{2} e^{-C}.$$

Wegen der speziellen Wahl der n_h ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{v(n)} \log\log n = \tfrac{1}{2} e^{-C}.$$

Mit $w(n) \leqslant v(n)$ und (2) folgt die Behauptung.

LEMMA 2. *Sei $z = \prod_{i=1}^{h} p_i^{c_i}$ und $a \geqslant p_h$. Dann gilt*

$$\phi(a) = \sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant a\\ (n,z)=1}} 1 < \frac{17}{2}\,\frac{\varphi(z)}{z}\,a.$$

Beweis. In [2] wurde gezeigt, daß für $a \geqslant p_h$, $a \geqslant 10^3$ gilt

$$\phi(a) \leqslant \frac{15}{2}\,\frac{\varphi(z)}{z}\,a.$$

Die Einschränkung $a \geqslant 10^3$ kann fallengelassen werden, wenn man auf der rechten Seite eine größere Konstante in Kauf nimmt. Dabei geht man aus von der Ungleichung

$$\frac{z}{\varphi(z)}\,\frac{\phi(a)}{a} \leqslant e^C \log(2a)\left(\frac{1}{\log a} + \frac{a^2}{a}\right)$$

in [2], S. 213, wobei $a > 1$ und C die Eulersche Konstante ist. Sei nun

$$\beta = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{-1} \quad \text{und} \quad a = (2a)^{\beta},$$

dann ist

$$\frac{z}{\varphi(z)}\,\frac{\phi(a)}{a} \leqslant e^C\left(\frac{1}{\beta} + \frac{2\log(2a)}{(2a)^{1-2\beta}}\right).$$

Die rechte Seite fällt monoton für $a \geqslant e/2$, so daß gilt

$$\frac{z}{\varphi(z)}\,\frac{\phi(a)}{a} \leqslant 2e^C\left(1+\frac{1}{\sqrt{e}} + e^{-\frac{1}{\sqrt{e}+1}}\right) < 2e^C(1.6066+0.69)$$
$$= e^C\cdot 4.5932 < 8.2 < \frac{17}{2}.$$

LEMMA 3. *Sei $z = \prod_{i=1}^{h} p_i^{c_i} \in N$, $a \in N$ mit $a < p_h$ und $\phi(a) = \sum_{\substack{(x,z)=1\\ 1\leqslant x\leqslant a}} 1$. Dann gibt es ein $z' \in N$ mit $z' \geqslant z/a$ und $\varphi(z') \leqslant \varphi(z)/\phi(a)$.*

Beweis. Zum Beweis werden folgende 4 Fälle betrachtet:

I. $2\nmid z$ oder $a \leqslant 2$.
II. $2|z$, $a \geqslant 3$ und $2\phi(a) \leqslant a$.
III. $2|z$, $a \geqslant 3$, $2\phi(a) > a$ und $h \leqslant 3$.
IV. $2|z$, $a \geqslant 3$, $2\phi(a) > a$ und $h \geqslant 4$.

I. Für $a = 1$ gilt die Behauptung wegen $\phi(a) = a = 1$ trivialerweise mit $z' = z$. Ist $a = 2$ und $2|z$, dann ist $\phi(a) = 1$, und mit $z' = z/2$ folgt die Behauptung.

Sei also $2\nmid z$. Wegen $a < p_h$ gibt es ein $\alpha \in N$ mit $p_h < 2^{\alpha} a \leqslant 2(p_h - 1)$. Sei $z' = 2^{\alpha}\dfrac{z}{p_h}$. Dann ist $z' > \dfrac{z}{a}$.

Ist $c_h \geqslant 2$, so ist

$$\varphi(z') = 2^{\alpha-1}\frac{\varphi(z)}{p_h} < \frac{\varphi(z)}{a} \leqslant \frac{\varphi(z)}{\phi(a)}.$$

Ist $c_h = 1$, so ist

$$\varphi(z') = 2^{\alpha-1}\frac{\varphi(z)}{p_h - 1} \leqslant \frac{\varphi(z)}{a} \leqslant \frac{\varphi(z)}{\phi(a)}.$$

Damit ist der Fall $2\nmid z$ erledigt, und zwar für beliebige $a < p_h$.

II. Sei $2|z$, $a \geqslant 3$ und $2\phi(a) \leqslant a$. Wegen $2|z$ und $3 \leqslant a < p_h$ ist $h \geqslant 2$ und wegen $2\phi(a) \leqslant a$ ist $\phi(a) < p_h/2$.

1) Sei $c_h \geqslant 2$. Dann gibt es ein $\alpha \in N$ mit $2^\alpha \phi(a) < p_h < 2^{\alpha+1}\phi(a)$. Sei $z' = 2^\alpha \dfrac{z}{p_h}$. Dann ist $z' > \dfrac{z}{2\phi(a)} \geqslant \dfrac{z}{a}$ und

$$\varphi(z') = 2^\alpha \frac{\varphi(z)}{p_h} < \frac{\varphi(z)}{\phi(a)}.$$

2) Sei $c_h = 1$. Dann gibt es ein $\alpha \in N$ mit $p_h < 2^\alpha a \leqslant 2(p_h - 1)$. Sei $z' = 2^\alpha \dfrac{z}{p_h}$. Dann ist $z' > \dfrac{z}{a}$ und

$$\varphi(z') = 2^\alpha \frac{\varphi(z)}{p_h - 1} \leqslant \frac{2\varphi(z)}{a} \leqslant \frac{\varphi(z)}{\phi(a)}.$$

III. Sei $2|z$, $a \geqslant 3$, $2\phi(a) > a$ und $h \leqslant 3$. Wegen $2|z$ und $3 \leqslant a < p_h$ ist $h \geqslant 2$. Also $2 \leqslant h \leqslant 3$. Ist a gerade, so ist $2\phi(a) \leqslant a$. Also ist a ungerade. Ist $p_2 \leqslant a$, so ist $2\phi(a) \leqslant a$. Also ist $p_2 > a$ und $\phi(a) = (a+1)/2$.

Wir unterscheiden jetzt 2 Fälle: $a = 3$ und $a \geqslant 5$.

a) $a = 3$, also $\phi(a) = 2$, $p_2 \geqslant 5$. Ist $p_2 = 5$ oder $p_2 = 7$, so sei $z' = 3\dfrac{z}{p_2} > \dfrac{z}{3} = \dfrac{z}{a}$. Dann ist

$$\varphi(z') \leqslant \frac{2\varphi(z)}{p_2 - 1} \leqslant \frac{\varphi(z)}{2} = \frac{\varphi(z)}{\phi(a)}.$$

Ist $p_2 \geqslant 11$, dann gibt es ein $\alpha \in N$ mit $p_2 < 2^\alpha 3a < 2p_2$ bzw. $p_2 < 2^\alpha 3a \leqslant 2(p_2 - 1)$. Sei $z' = 2^\alpha 3 \dfrac{z}{p_2}$. Dann ist $z' > \dfrac{z}{a}$ und

$$\varphi(z') \leqslant \varphi(z) \frac{2^{\alpha+1}}{p_2 - 1} \leqslant \varphi(z) \frac{4}{3a} = \frac{4}{9}\varphi(z) < \frac{\varphi(z)}{2} = \frac{\varphi(z)}{\phi(a)}.$$

b) $a \geqslant 5$, also $p_2 \geqslant 7$ und $\phi(a) = (a+1)/2 \leqslant \frac{3}{5}a$.

b_1) Ist $3a < 2p_2$, dann gibt es ein $\alpha \in Z$, $\alpha \geqslant 0$ mit $p_2 < 2^\alpha 3a < 2p_2$. Sei $z' = 2^\alpha 3 \dfrac{z}{p_2}$. Dann ist $z' > \dfrac{z}{a}$ und

$$\varphi(z') \leqslant \varphi(z) \frac{2^{\alpha+1}}{p_2 - 1} < \frac{4p_2}{3a(p_2-1)}\varphi(z) \leqslant \frac{4}{3a}\,\frac{7}{6}\,\varphi(z) < \frac{5}{3a}\varphi(z) \leqslant \frac{\varphi(z)}{\phi(a)}.$$

b_2) Sei $3a \geqslant 2p_2$, also $2p_2 \leqslant 3a < 3p_2$ bzw. $2p_2 \leqslant 3a \leqslant 3(p_2 - 2)$. Sei $z' = \dfrac{3z}{2p_2}$. Dann ist $z' \geqslant \dfrac{z}{a}$.

Ist $c_1 = 1$, dann ist

$$\varphi(z') \leqslant \frac{2\varphi(z)}{p_2 - 1} \leqslant \frac{2\varphi(z)}{a+1} = \frac{\varphi(z)}{\phi(a)}.$$

Ist $c_1 \geqslant 2$, dann ist

$$\varphi(z') \leqslant \frac{\varphi(z)}{p_2 - 1} < \frac{\varphi(z)}{a} < \frac{\varphi(z)}{\phi(a)}.$$

IV. Sei $2|z$, $a \geqslant 3$, $2\phi(a) > a$ und $h \geqslant 4$. Ist a gerade, so ist $2\phi(a) \leqslant a$. Also ist a ungerade. Ist $p_2 \leqslant a$, so ist $2\phi(a) \leqslant a$. Also ist $p_1 = 2 < a < p_2$, $\phi(a) = (a+1)/2$. Wir unterscheiden jetzt folgende 3 Fälle: a) $a = 3$; b) $a = 5$; c) $a \geqslant 7$.

a) $a = 3$, dann ist $p_2 \geqslant 5$, $\phi(a) = 2$ und mit $h \geqslant 4$ folgt $p_h \geqslant p_5 \geqslant 11 > 9$. Damit gibt es ein $\alpha \in N$ mit $p_h < 3^2 2^\alpha < 2p_h$, also $p_h > p_h - 1 \geqslant 3^2 2^{\alpha-1}$.

Mit $z' = \dfrac{z}{p_h} 2^\alpha 3 > \dfrac{z}{3}$ folgt dann

$$\varphi(z') \leqslant \frac{\varphi(z)}{p_h - 1} 2^{\alpha+1} \leqslant \frac{4}{9}\varphi(z) < \frac{\varphi(z)}{2} = \frac{\varphi(z)}{\phi(a)}.$$

b) $a = 5$, dann ist $p_2 \geqslant 7$ und mit $h \geqslant 4$ folgt $p_h \geqslant p_5 \geqslant 13 > \frac{15}{2} = 3a/2$ oder $a < \frac{2}{3}p_h$. Ist $p_h = 13$, so ist $p_h < 2^0 3a < 2(p_h - 1)$. Ist $p_h \geqslant 17 > 3a$, so gibt es ein $\alpha \in N$ mit $p_h < 2^\alpha 3a \leqslant 2(p_h - 1)$.

Mit $z' = \dfrac{z}{p_h} 2^\alpha 3 > \dfrac{z}{a}$ folgt dann

$$\varphi(z') \leqslant \frac{\varphi(z)}{p_h - 1} 2^{\alpha+1} \leqslant \frac{4}{3a}\varphi(z) < \frac{2}{a+1}\varphi(z) = \frac{\varphi(z)}{\phi(a)}.$$

c) $a \geqslant 7$, dann ist $p_2 \geqslant 11$ und $a < p_h < \frac{22}{3}p_h \leqslant \frac{2}{3}p_2 p_h$, also $3a < 2p_2 p_h$. Daher gibt es ein $\alpha \in Z$, $\alpha \geqslant 0$ mit $p_2 p_h < 2^\alpha 3a < 2p_2 p_h$.

Mit $z' = \dfrac{z}{p_2 p_h} 2^\alpha 3 > \dfrac{z}{a}$ folgt dann

$$\varphi(z') \leqslant \frac{\varphi(z)}{(p_2 - 1)(p_h - 1)} 2^{\alpha+1}.$$

Nun ist

$$\frac{p_2}{p_2 - 1}\,\frac{p_h}{p_h - 1}\,\frac{a+1}{a} < \left(\frac{a+1}{a}\right)^3 \leqslant \left(\frac{8}{7}\right)^3 = \frac{512}{343} < \frac{513}{342} = \frac{3}{2},$$

also

$$\frac{2^{\alpha+1}}{(p_2 - 1)(p_h - 1)} < \frac{2^\alpha 3a}{(a+1)\,p_2 p_h} < \frac{2}{a+1}$$

und damit

$$\varphi(z') < \frac{2\varphi(z)}{a+1} = \frac{\varphi(z)}{\phi(a)}.$$

Literaturverzeichnis

[1] T. W. Cusick, *Simultaneous diophantine approximation of rational numbers*, Acta Arith. 22 (1972), S. 1–9.

[2] J. H. van Lint, and H.-E. Richert, *On primes in arithmetic progressions*, Acta Arith. 11 (1965), S. 209–216.

[3], [4], [5] J. M. Wills, *Zur simultanen homogenen diophantischen Approximation I, II, III*, Monatsh. Math. 72 (1968), S. 254–263, 368–381, 74 (1970), S. 166–171.

FACHBEREICH MATHEMATIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN

Eingegangen 15. 9. 1971 (222)

ACTA ARITHMETICA
XXII (1973)

Amélioration de la majoration de $g(4)$ dans le problème de Waring: $g(4) \leqslant 30$

par

François Dress (Talence)

1. Historique. Introduction. Nous nous proposons de démontrer, par une méthode élémentaire, la majoration $g(4) \leqslant 30$. Auparavant, nous allons rappeler les résultats obtenus jusqu'à présent dans le problème de Waring pour les puissances quatrièmes.

On désigne traditionnellement par $g(k)$ le minimum de p, tel que tout entier positif soit somme de p puissances k-ièmes d'entiers positifs ou nuls. Historiquement, et si l'on excepte le théorème des 4 carrés de Lagrange, le cas des puissances quatrièmes a été le premier où l'existence de $g(k)$ fut établie: Liouville ([7], 1859) démontra l'existence de $g(4)$ et donna la majoration $g(4) \leqslant 53$. Nous allons tout d'abord rapporter sa méthode, car elle est à la base de celle que nous utiliserons dans notre démonstration.

On considère l'identité

$$6(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2)^2 = \sum_{i<j}(a_i+a_j)^4 + \sum_{i<j}(a_i-a_j)^4 = B_{12},$$

en désignant par B_p un entier qui est somme de p bicarrés (en fait, l'identité que nous donnons ici est due à Lucas, mais celle qu'utilisait Liouville lui est équivalente). Comme tout entier est somme de 4 carrés, on obtient ainsi

$$6a^2 = B_{12}, \quad \text{pour tout } a,$$

puis

$$6m = 6(a^2+b^2+c^2+d^2) = B_{48}, \quad \text{pour tout } m,$$

et enfin, comme tout entier n est de la forme $6m+h\cdot 1^4$ (avec $h = 0, 1, \ldots, 5$),

$$n = B_{53}, \quad \text{pour tout } n, \quad \text{i.e. } g(4) \leqslant 53.$$

Les améliorations de la majoration de $g(4)$ obtenues jusqu'à présent par des méthodes élémentaires utilisent essentiellement deux remarques: