ACTA ARITHMETICA
XXII (1973)

Локальные предельные теоремы для аддитивных арифметических функций

Б. В. Левин, А. А. Юдин (Владимир)

Введение. Локальным предельным теоремам для аддитивных арифметических функций $g(n)$ посвящена достаточно обширная литература. Наиболее известными локальными теоремами для таких функций являются теорема А. Реньи [8] (случай $g(p) \equiv 0$) и теорема А. Винтнера [9], [10] (случай $g(p) \equiv 1$). В работах И. Кубилюса [4], [5], Х. Деланжа [1], И. Катаи [3], А. Файнлейба [2] получены обобщения и уточнения этих теорем при условии, что требования $g(p) \equiv 0$ или $g(p) \equiv 1$ в основном сохраняются.

Так как аддитивная арифметическая функция однозначно определяется своими значениями на степенях простых чисел, а характер закона как будет видно ниже зависит от значений функции на простых числах, то естественно ожидать, что локальный закон на простых числах индуцирует локальный закон на натуральном ряде. Именно это соображение и лежит в основе данной заметки. При этом авторы не приследовали цели получения возможно более общих и более сильных теорем. Так, например, в теореме 1 можно ослабить условие $g(n) \in S_\alpha$, а в теореме 2, считая α сколь угодно большим, получить асимптотическое разложение. В теореме 3 очевидным образом можно получить асимптотическое разложение, налагая дополнительное требование состоящее по существу в том, что большие значения $g(p^r)$ встречаются „достаточно редко".

Определение. Аддитивная функция $g(n) \in S_\alpha$, если

$$\frac{1}{\pi(x)} \sum_{p \leqslant x, g(p) = \omega} 1 = \tau_\omega + \frac{\varepsilon_x(\omega)}{(\ln x)^\alpha}, \tag{1}$$

где $\alpha > 1$, c не зависит от x и $\sum_\omega |\varepsilon_x(\omega)| < c < +\infty$, для любого x.

В теореме 2 изучен случай $g(n) \in S_\alpha$ и $g(n)$ принимает значения одного знака. В теореме 3 рассмотрен случай $g(n) \in S_\alpha$, когда множество ω, для которых $\tau_\omega \neq 0$ имеет базис размерности 1, над $\mathbf{Z}$ и $\sigma^2 = \sum_\omega \tau_\omega \omega^2 < +\infty$. Если размерность базиса множества ω, $\tau_\omega \neq 0$ конечна, то используя некоторые дополнительные соображения, повидимому, можно получить результаты аналогичные теореме 3. Представляет интерес получение локальных законов в случае, когда размерность базиса бесконечна или нарушено условие $\sigma^2 < +\infty$.

§ 1. Докажем вначале три леммы.

Лемма 1. *Пусть* $g(n) \in S_a$, *тогда равномерно по* ξ

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\(n,2)=1}} \frac{e^{i\xi g(n)}}{n} = a_0(\xi)\ln^{\tau(\xi)}x + a_1(\xi)(\ln x)^{\tau(\xi)-1} + O\left(\frac{\delta(1)\delta(2)}{\ln x}\right) + \left(\frac{\delta(a)}{(\ln x)^{a-1}}\right), \tag{2}$$

где

$$\delta(\gamma) = \begin{cases} \ln\ln x, & \operatorname{Re}\tau(\xi) = 1-\gamma,\\ 1, & \operatorname{Re}\tau(\xi) \neq 1-\gamma,\end{cases}$$

$$\tau(\xi) = \sum_{\omega} \tau_\omega e^{i\xi\omega}, \quad a_0(\xi) = \frac{1}{\Gamma(\tau(\xi)+1)} \prod_{p>2}\left(1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{e^{i\xi g(p^r)}}{p^r}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\tau(\xi)}.$$

Доказательство. Так как $g(n) \in S_a$, то

$$\sum_{p\leqslant x} e^{i\xi g(p)}\ln p = \sum_{\omega} e^{i\xi\omega} \sum_{\substack{p\leqslant x\\ g(p)=\omega}} \ln p = \sum_{\omega} e^{i\xi\omega}\left(\tau_\omega x + O\left(\frac{|\varepsilon_x(\omega)|x}{(\ln x)^a}\right)\right) = \tau(\xi)x + O\left(\frac{x}{(\ln x)^a}\right).$$

Определим для $f(n) = e^{i\xi g(n)}$ обобщенную функцию Мангольдта $\Lambda_f(n)$ по формуле

$$f(n)\ln n = \sum_{d|n} f(d)\Lambda_f\left(\frac{n}{d}\right),$$

получаем (см. [6], стр. 125)

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\(n,2)=1}} \Lambda_f(n) = \sum_{\substack{p^r\leqslant x\\ p>2}} \ln p^r \sum_{m=1}^{r} \frac{(-1)^{m-1}}{m} \sum_{k_1+\ldots+k_m=r} e^{i\xi(g(p^{k_1})+\ldots+g(p^{k_m}))} =$$

$$= \sum_{2<p\leqslant x} e^{i\xi g(p)}\ln p + O(x^{1/2}) + O\left(\sum_{3\leqslant r\leqslant \frac{\ln x}{\ln 3}} 2^r x^{1/r}\right) = \tau(\xi)x + O\left(\frac{x}{(\ln x)^a}\right).$$

Суммированием по Абелю получаем

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\(n,2)=1}} \frac{\Lambda_f(n)}{n} = \tau(\xi)\ln x + A(\xi) + O\left((\ln x)^{1-a}\right). \tag{3}$$

Воспользуемся методом [6] для вычисления

$$m_2(x) = \sum_{\substack{n\leqslant x\\(n,2)=1}} \frac{f(n)}{n}.$$

На основании определения $\Lambda_f(n)$ и (3)

$$m_2(x)\ln x - \int_1^x m_2(u)\frac{du}{u} = \tau(\xi)\int_1^x m_2(u)\frac{du}{u} + A(\xi)m_2(x) + O(1) + O\left((\ln x)^{2-a}\right)$$

или

$$m_2(x)\ln x - (\tau(\xi)+1)\int_1^x m_2(u)\frac{du}{u} = O(\ln x) \tag{4}$$

равномерно по ξ. Деля обе части (4) на $x(\ln x)^{\tau(\xi)+2}$ и интегрируя от 2 до x, получаем

$$\int_2^x \frac{m_2(u)}{u(\ln u)^{\tau(\xi)+1}}\,du - (\tau(\xi)+1)\int_2^x \frac{du}{u(\ln u)^{\tau(\xi)+2}}\left(\int_1^u m_2(v)\frac{dv}{v}\right) = c_1(\xi) + O\left((\ln x)^{-\operatorname{Re}\tau(\xi)}\delta(1)\right).$$

После вычисления второго интеграла, находим

$$\int_1^x m_2(u)\frac{du}{u} = c_1(\xi)(\ln x)^{\tau(\xi)+1} + O\left(\delta(1)\ln x\right). \tag{5}$$

Из (4) и (5) получаем

$$m_2(x) = a_0(\xi)(\ln x)^{\tau(\xi)} + O\left(\delta(1)\right). \tag{6}$$

Теперь докажем (2). В виду (3) и (6) имеем

$$m_2(x)\ln x - (\tau(\xi)+1)\int_1^x m_2(u)\frac{du}{u} = A(\xi)a_0(\xi)(\ln x)^{\tau(\xi)} + O\left(\delta(1)\right) + O\left((\ln x)^{2-a}\right).$$

Поступая как и выше, получим

$$\int_1^x m_2(u)\frac{du}{u} = D(\xi)(\ln x)^{\tau(\xi)+1} + D_1(\xi)(\ln x)^{\tau(\xi)} + O\left(\delta(1)\delta(2)\right) + O\left(\delta(a)(\ln x)^{2-a}\right)$$

что вместе с предыдущим равенством дает

$$m_2(x) = a_0(\xi)\ln^{\tau(\xi)}x + a_1(\xi)(\ln x)^{\tau(\xi)-1} + O\left(\frac{\delta(1)\delta(2)}{\ln x}\right) + O\left(\frac{\delta(a)}{(\ln x)^{a-1}}\right).$$

На основании теоремы 2.1.3 из [6]

$$a_0(\xi) = \frac{1}{\Gamma\big(\tau(\xi)+1\big)}\prod_{p>2}\left(1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{e^{i\xi g(p^r)}}{p^r}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\tau(\xi)}.$$

Лемма 2. *Пусть $g(n)\in S_\alpha$, тогда*

(7) $$\sum_{n\leqslant x} e^{i\xi g(n)} = a(\xi)x(\ln x)^{\tau(\xi)-1}+O\left(\frac{x}{\ln x}\right),$$

равномерно по ξ, $-\infty<\xi<+\infty$, *где*

$$a(\xi) = \frac{1}{\Gamma\big(\tau(\xi)\big)}\prod_{p}\left(1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{e^{i\xi g(p^r)}}{p^r}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\tau(\xi)}.$$

Доказательство.

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\(n,2)=1}} e^{i\xi g(n)}\ln n = \sum_{\substack{n\leqslant x\\(n,2)=1}} e^{i\xi g(n)}\sum_{\substack{m\leqslant x/n\\(m,2)=1}}\Lambda_f(m) =$$

$$= \tau(\xi)x\sum_{\substack{n\leqslant x\\(n,2)=1}}\frac{e^{i\xi g(n)}}{n}+O\left(x\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n\left(\ln\frac{xe}{n}\right)^{\alpha}}\right) =$$

$$= \tau(\xi)xm_2(x)+O(x).$$

Отсюда получаем, положив $M_2(x)=\sum_{\substack{n\leqslant x\\(n,2)=1}} f(n)$

$$M_2(x)\ln x-\int_1^x M_2(u)\frac{du}{u} = \tau(\xi)xm_2(x)+O(x),$$

или после некоторых вычислений

$$\frac{1}{\ln x}\int_1^x M_2(u)\frac{du}{u} = c+\tau(\xi)\int_2^x\frac{m_2(u)}{\ln^2 u}du+O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right).$$

Отсюда и предыдущей формулы

$$M_2(x) = \frac{\tau(\xi)xm_2(x)}{\ln x}+\tau(\xi)\int_2^x\frac{m_2(u)}{\ln^2 u}du+O\left(\frac{x}{\ln x}\right).$$

На основании леммы 1 получаем

$$M_2(x) = \tau(\xi)a_0(\xi)x(\ln x)^{\tau(\xi)-1}+O\left(\frac{x}{\ln x}\right).$$

Используя эту оценку, имеем

$$M(x) = \sum_{n\leqslant x}e^{i\xi g(n)} = \sum_{2^r\leqslant x}e^{i\xi g(2^r)}\sum_{\substack{n\leqslant x/2^r\\(n,2)=1}}e^{i\xi g(n)} =$$

$$= x\tau(\xi)a_0(\xi)\sum_{2^r\leqslant x}\frac{e^{i\xi g(2^r)}}{2^r}\ln^{\tau(\xi)-1}\frac{x}{2^r}+O\left(x\sum_{2^r\leqslant x}\frac{1}{2^r\ln\frac{xe}{2^r}}\right) =$$

$$= \tau(\xi)a_0(\xi)x\sum_{2^r\leqslant x}\frac{e^{i\xi g(2^r)}}{2^r}\ln^{\tau(\xi)-1}\frac{x}{2^r}+O\left(\frac{x}{\ln x}\right) =$$

$$= a(\xi)x\ln^{\tau(\xi)-1}x+O\left(\frac{x}{\ln x}\right),$$

т.е. (7).

Лемма 3. *Функция $a(\xi)(\ln x)^{\tau(\xi)}$ почти-периодична в смысле Г. Бора.*

Доказательство. Очевидно, что $\Gamma^{-1}\big(\tau(\xi)\big)$ и $(\ln x)^{\tau(\xi)}$ есть равномерно почти-периодические функции. Покажем теперь, что произведение

$$F(\xi) = \prod_p\left(1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{e^{i\xi g(p^r)}}{p^r}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\tau(\xi)}$$

также почти-периодично.

$$F(\xi) = \exp\left[\sum_p\frac{e^{i\xi g(p)}-\tau(\xi)}{p}-\sum_p\left(\ln\left(1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{e^{i\xi g(p^r)}}{p^r}\right)-\frac{e^{i\xi g(p)}}{p}\right)+\right.$$
$$\left.+\tau(\xi)\sum_p\left(\ln\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{1}{p}\right)\right].$$

Очевидно, что второе и третье слагаемое есть почти-периодические функции, следовательно, достаточно показать почти-периодичность

(8) $$P(\xi) = \sum_p\frac{e^{i\xi g(p)}-\tau(\xi)}{p}.$$

Это будет так, если ряд (8) сходится равномерно. На самом деле

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{e^{i\xi g(p)}-\tau(\xi)}{p} = \sum_\omega e^{i\xi\omega}\left(\sum_{\substack{p\leqslant x\\g(p)=\omega}}\frac{1}{p}-\tau_\omega\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}\right) =$$

$$= \sum_\omega e^{i\xi\omega}\left(\sum_{\substack{p\leqslant x\\g(p)=\omega}}\frac{1}{p}-\tau_\omega\ln\ln x-\gamma\tau_\omega+O(\tau_\omega e^{-\sqrt{\ln x}})\right) =$$

$$= \sum_\omega e^{i\xi\omega}\sum_{\substack{p\leqslant x\\g(p)=\omega}}\frac{1}{p}-\tau(\xi)\ln\ln x-\gamma\tau(\xi)+O(e^{-\sqrt{\ln x}}).$$

И так как $g(n)\in S_a$, то получаем

$$\sum_{\substack{p\leqslant x\\ g(p)=\omega}}\frac{1}{p}=\int_{2-0}^{x}\frac{1}{u}d\sum_{\substack{p\leqslant u\\ g(p)=\omega}}1=\int_{2-0}^{x}\frac{1}{u}d\left[\tau_\omega\pi(u)+\frac{\varepsilon_u(\omega)\pi(u)}{(\ln u)^a}\right]=$$

$$=\tau_\omega\left[\int_2^x\frac{du}{u\ln u}+c'+O(e^{-\sqrt{\ln x}})\right]+\int_2^x\frac{\varepsilon_u(\omega)\pi(u)}{u^2(\ln u)^a}du+O\left(\frac{|\varepsilon_x(\omega)|}{(\ln x)^{a+1}}\right)=$$

$$=\tau_\omega\left(\ln\ln x+c+O(e^{-\sqrt{\ln x}})\right)+\int_2^x\frac{\varepsilon_u(\omega)\pi(u)}{u^2(\ln u)^a}du+O\left(\frac{|\varepsilon_x(\omega)|}{(\ln x)^{a+1}}\right).$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{e^{i\xi g(p)}-\tau(\xi)}{p}=(c-\gamma)\tau(\xi)+C(\xi)-\int_x^\infty\frac{\left(\sum_\omega\varepsilon_u(\omega)e^{i\xi\omega}\right)\pi(u)}{u^2(\ln u)^a}du+O(\ln^{-a-1}x)$$

$$=(c-\gamma)\tau(\xi)+C(\xi)+O(\ln^{-a}x),$$

равномерно по ξ, $-\infty<\xi<+\infty$, что и доказывает лемму. Деля обе части равенства (7) на x, получим

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}e^{i\xi g(n)}=\frac{a(\xi)}{\ln x}(\ln x)^{\tau(\xi)}+O\left(\frac{1}{\ln x}\right).$$

Слева стоит почти-периодическая функция, первое слагаемое по лемме 3 также почти-периодическое. Почти-периодическую функцию можно разложить в ряд Фурье и по теореме единственности, этот ряд единственен. Используя это замечание, имеем

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left(\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}e^{i\xi g(n)}\right)e^{-i\xi\theta}d\xi=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_2^T\frac{a(\xi)}{\ln x}(\ln x)^{\tau(\xi)}e^{-i\xi\theta}d\xi+O\left(\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\frac{d\xi}{\ln x}\right),$$

или

(9) $$\frac{1}{x}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ g(n)=\theta}}1=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_q^T\frac{a(\xi)}{\ln x}(\ln x)^{\tau(\xi)}e^{-i\xi\theta}d\xi+O\left(\frac{1}{\ln x}\right).$$

Очевидно, что

(10) $$\frac{1}{x}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ g(n)=\theta}}1=\frac{1}{\ln x}\sum_{\lambda_l+\mu_q=\theta}A_{\lambda_l}B_{\mu_q}(x)+O\left(\frac{1}{\ln x}\right),$$

где

$$A_{\lambda_l}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\frac{1}{\Gamma(\tau(\xi))}\prod_p\left(1+\sum_{r=1}^\infty\frac{e^{i\xi g(p^r)}}{p^r}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\tau(\xi)}e^{-i\xi\lambda_l}d\xi$$

и

(11) $$B_{\mu_q}(x)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T e^{\tau(\xi)\ln\ln x-i\xi\mu_q}d\xi.$$

Из (11) получаем

$$B_{\mu_q}(x)=\sum_{m=0}^\infty\frac{(\ln\ln x)^m}{m!}a_{m,q},$$

где

$$a_{m,q}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left(\tau(\xi)\right)^m e^{-i\xi\mu_q}d\xi=\sum_{\omega_1+\ldots+\omega_m=\mu_q}\tau_{\omega_1}\ldots\tau_{\omega_m},$$

$\omega_1,\ldots,\omega_m$, независимо друг от друга пробегают возможные значения.

Отсюда на основании (10), получаем

(12) $$\frac{1}{x}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ g(n)=\theta}}1=$$

$$=\frac{1}{\ln x}\sum_\lambda A_\lambda\sum_{m=0}^\infty\frac{(\ln\ln x)^m}{m!}\sum_{\omega_1+\ldots+\omega_m=\theta-\lambda}\tau_{\omega_1}\ldots\tau_{\omega_m}+O\left(\frac{1}{\ln x}\right).$$

Теорема 1. *Пусть $g(n)\in S_a$, тогда для любого вещественного θ*

(13) $$\frac{1}{x}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ g(n)=\theta}}1=$$

$$=\frac{1}{(\ln x)^{1-\tau_0}}\sum_\lambda A_\lambda\sum_{m=0}^\infty\frac{(\ln\ln x)^m}{m!}\sum_{\substack{\omega_1+\ldots+\omega_m=\theta-\lambda\\ \omega_i\neq 0}}\tau_{\omega_1}\ldots\tau_{\omega_m}+O\left(\frac{1}{\ln x}\right)$$

(ниже показано, что ряд справа в (13) абсолютно сходится).

Доказательство. На основании (12)

$$\frac{1}{x}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ g(n)=\theta}}1=\frac{1}{\ln x}\sum_\lambda A_\lambda\sum_{m=0}^\infty\frac{(\ln\ln x)^m}{m!}\sum_{k=0}^m C_m^k\tau_0^k\times$$

$$\times\sum_{\substack{\omega_1+\ldots+\omega_{m-k}=\theta-\lambda\\ \omega_i\neq 0}}\tau_{\omega_1}\ldots\tau_{\omega_{m-k}}+O\left(\frac{1}{\ln x}\right)=$$

$$= \frac{1}{\ln x} \sum_{\lambda} A_\lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\ln\ln x)^k}{k!} \tau_0^k \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\ln\ln x)^m}{m!} \times$$

$$\times \sum_{\substack{\omega_1+\ldots+\omega_m=\theta-\lambda \\ \omega_i\neq 0}} \tau_{\omega_1}\ldots\tau_{\omega_m} + O\left(\frac{1}{\ln x}\right) =$$

$$= \frac{1}{(\ln x)^{1-\tau_0}} \sum_{\lambda} A_\lambda \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\ln\ln x)^m}{m!} \sum_{\substack{\omega_1+\ldots+\omega_m=\theta-\lambda \\ \omega_i\neq 0}} \tau_{\omega_1}\ldots\tau_{\omega_m} + O\left(\frac{1}{\ln x}\right).$$

Доказанная выше теорема хотя и дает ответ на поставленный во введении вопрос, однако в такой форме, которая не позволяет судить о поведении главного члена при $x\to\infty$. Для исследования этого вопроса весьма важна арифметическая природа чисел ω, для которых $\tau_\omega\neq 0$ и множества показателей Фурье функции (12).

Будем далее предполагать, что только для r значений $\omega_i\neq 0$. Покажем, что ряд (13) абсолютно сходится. Это следует из следующей последовательности неравенств:

$$(\ln x)^{\tau_{\omega_1}+\ldots+\tau_{\omega_r}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\ln\ln x)^m}{m!} \sum_{k_1+\ldots+k_r=m} \frac{m!}{k_1!\ldots k_m!} \tau_{\omega_1}^{k_1}\ldots\tau_{\omega_r}^{k_r} \geqslant$$

$$\geqslant c \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\ln\ln x)^m}{m!} \sum_{k_1+\ldots+k_r=m} \frac{m!}{k_1!\ldots k_r!} \tau_{\omega_1}^{k_1}\ldots\tau_{\omega_r}^{k_r} |A_{\theta-k_1\omega_1-\ldots-k_r\omega_r}| \geqslant$$

$$\geqslant c \left| \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\ln\ln x)^m}{m!} \sum_{k_1+\ldots+k_r=m} \frac{m!}{k_1!\ldots k_r!} \tau_{\omega_1}^{k_1}\ldots\tau_{\omega_r}^{k_r} A_{\theta-k_1\omega_1-\ldots-k_r\omega_r} \right| =$$

$$= c \left| \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\ln\ln x)^m}{m!} \sum_{\lambda} A_\lambda \sum_{\substack{\omega_1+\ldots+\omega_m=\theta-\lambda \\ \omega_i\neq 0}} \tau_{\omega_1}\ldots\tau_{\omega_m} \right|.$$

Это показывает, что последний ряд абсолютно сходится, следовательно и полученный из него перестановкой ряд (13) также абсолютно сходится. Поэтому (13) можно переписать в виде

$$(*)\qquad \frac{1}{x} \sum_{\substack{n\leqslant x \\ g(n)=\theta}} 1 = \frac{1}{(\ln x)^{1-\tau_0}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\ln\ln x)^m}{m!} \sum_{k_1+\ldots+k_2=m} \frac{m!\,\tau_{\omega_1}^{k_1}\ldots\tau_{\omega_r}^{k_2}}{k_1!\ldots k_r!} \times$$

$$\times A_{\theta-k_1\omega_1-\ldots-k_r\omega_r} + O\left(\frac{1}{\ln x}\right).$$

Пусть далее $g(n)\geqslant 0$ для всех $n\in\boldsymbol{N}$, $s=\sigma+i\xi$. Тогда очевидно функция

$$F(\sigma+i\xi) = \frac{1}{\Gamma(\tau(-is))} \prod_p \left(1+\sum_{r=1}^{\infty} \frac{e^{sg(p^r)}}{p^r}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\tau(-is)}$$

аналитична в полуполосе $(-\infty, 0)$ и непрерывна в $(-\infty, 0]$. Так как $|\tau(s)|\leqslant 1$ и $\operatorname{Re} sg(p^r)\leqslant 0$, то $F(s)$ ограничена в $(-\infty, 0]$, а отсюда по теореме 1.3.10 из [7], стр. 320, получаем, что все показатели Фурье этой функции неотрицательны.

Теорема 2. *Пусть* $g(n)\geqslant 0$, $g(n)\in S_a$, *тогда*

$$(14)\qquad \frac{1}{x}\sum_{\substack{n\leqslant x \\ g(n)=\theta}} 1 = \frac{1}{(\ln x)^{1-\tau_0}} P_\Delta(\ln\ln x) + O\left(\frac{1}{\ln x}\right),$$

где $P_\Delta(u)$ — *полином степени не выше* $\sup\limits_{\substack{0<m\leqslant r \\ \omega_m\neq 0}} \left[\frac{\theta}{\omega_m}\right] = \Delta$.

Доказательство. Из $(*)$ на основании $A_\lambda=0$ при $\lambda<0$ получаем

$$\frac{1}{x}\sum_{\substack{n\leqslant x \\ g(n)=\theta}} 1 = \frac{1}{(\ln x)^{1-\tau_0}} \sum_{m=0}^{\infty} (\ln\ln x)^m \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_r=m \\ k_1\omega_1+\ldots+k_r\omega_r\leqslant\theta}} \frac{\tau_1^{k_1}\ldots\tau_r^{k_r}}{k_1!\ldots k_r!} \times$$

$$\times A_{\theta-k_1\omega_1-\ldots-k_r\omega_r} + O\left(\frac{1}{\ln x}\right) =$$

$$= \frac{1}{(\ln x)^{1-\tau_0}} \sum_{m=0}^{\Delta} (\ln\ln x)^m B_m(\omega, \theta, \tau) + O\left(\frac{1}{\ln x}\right).$$

§ 2. Теорема 3. *Пусть* $g(n)\in S_a$ *и* $\sum\limits_{\substack{p \\ g(p)\notin \boldsymbol{Z}}} 1/p < +\infty$, *не существует* $h\geqslant 2$, $h\in\boldsymbol{N}$ *такого, что* $\sum\limits_{k\equiv 0 \pmod h} \tau_k = 1$ *и* $\sigma^2 = \sum \tau_k k^2 < +\infty$, *тогда положив* $u=\ln\ln N$, $E=\sum\limits_k \tau_k k$, *получаем*

$$(15)\qquad d_N(\theta) = \frac{1}{N}\sum_{\substack{n\leqslant N \\ g(n)=\theta}} 1 = \frac{A(\theta)}{\sigma\sqrt{2\pi\ln\ln N}} e^{-\frac{(uE-\theta)^2}{2\sigma^2 u}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\ln\ln N}}\right).$$

В дальнейшем $d^* = p_{i_1}^{r_{i_1}}\ldots p_{i_k}^{r_{i_k}}$, если $n = p_1^{r_1}\ldots p_l^{r_l}$, $0\leqslant i_j\leqslant l$, $d^{**} = p_{i_1}^{r_{i_1}-1}\ldots p_{i_k}^{r_{i_k}-1}$. Заметим, что $\tau_\omega = 0$, если $\omega\notin\boldsymbol{Z}$.

Для доказательства теоремы нам потребуются следующие две леммы.

Лемма 4. *Существует $\delta > 0$ такое, что для всех $\xi \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$*

$$\varphi(\xi) = \sum \tau_k \sin^2 \pi k \xi \geqslant \delta \xi^2.$$

Доказательство. Так как $\sigma^2 < +\infty$, то

$$\sum_k \tau_k \sin^2 \pi k \xi \geqslant 2 \sum_k \tau_k \|k\xi\|^2 \geqslant 2\xi^2 \sum_{|k| < 1/2|\xi|} \tau_k k^2$$

и, следовательно, при достаточно малом $|\xi| \leqslant \delta_1$, получим

$$\varphi(\xi) \geqslant \sigma^2 \xi^2.$$

Пусть теперь $|\xi| > \delta_1$ и

$$\gamma = \inf_{\frac{1}{2} \geqslant |\xi| > \delta_1} \frac{\varphi(\xi)}{\xi^2};$$

если $\gamma \neq 0$, то все доказано. Предположим, что $\gamma = 0$, тогда ввиду непрерывности $\frac{\varphi(\xi)}{\xi^2}$ при $|\xi| > \delta_1$ существует ξ_0 такое, что

$$\frac{1}{\xi_0^2} \sum_k \tau_k \sin^2 \pi k \xi_0 = 0,$$

т.е. $\sum_{\sin \pi k \xi_0 = 0} \tau_k = 1$. Это можно переписать так

$$1 = \sum_{\|k\xi_0\| = 0} \tau_k.$$

Множество целых $k \neq 0$, для которых $\|k\xi_0\| = 0$, не пусто лишь в том случае, если ξ_0 рационально, что с $|\xi_0| > \delta_1$, дает $\xi_0 = p/q$, $p, q \in \mathbf{Z}$, $(p, q) = 1$, $q \neq 1$ и, следовательно,

$$\sum_{k \equiv 0 \pmod q} \tau_k = 1.$$

Это противоречит условию теоремы. Следовательно, $\gamma > 0$. Беря $\delta = \min(\gamma, \sigma^2)$ получаем утверждение леммы.

Лемма 5.

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \sum_{-[T/2\pi]}^{[T/2\pi]} a(2\pi\xi + 2\pi k) e^{-2\pi i k \theta} = A(\theta) + \frac{1}{2\pi} \varepsilon_1(\xi)$$

где $\varepsilon_1(\xi) \to 0$, *как только* $\xi \to 0$.

Доказательство. Так как $a(\xi)$ есть равномерно почти-периодическая функция, то

$$a(2\pi\xi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{2\pi i \lambda_n \xi},$$

тогда

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \sum_{-[T/2\pi]}^{[T/2\pi]} a(2\pi k + 2\pi \xi) e^{-2\pi i k \theta} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \sum_{-[T/2\pi]}^{[T/2\pi]} \left(\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{2\pi i \lambda_n (k+\xi)} \right) e^{-2\pi i k \theta} =$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{2\pi i \lambda_n \xi} \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \sum_{-[T/2\pi]}^{[T/2\pi]} e^{2\pi i k (\lambda_n - \theta)} = \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{-\infty \\ \lambda_n \equiv \theta \pmod 1}}^{+\infty} a_n e^{2\pi i \lambda_n \xi} = \frac{1}{2\pi} a_\theta(\xi).$$

Так как $a_\theta(\xi)$, так же равномерно почти-периодическая функция, то

$$a_\theta(\xi) = a_\theta(0) + \varepsilon_1(\xi).$$

Теперь вычислим $a_\theta(0)$.

$$\frac{1}{2\pi} a_\theta(0) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{[T/2\pi]} e^{-2\pi i k \theta} \prod_p \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i k g(p^r)}}{p^r}\right)\left(1 - \frac{1}{p}\right) =$$

$$= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{[T/2\pi]} e^{-2\pi i k \theta} \prod_p \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i k g(p^r)} - e^{2\pi i k g(p^{r-1})}}{p^r}\right).$$

Но

$$\prod_p \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i k g(p^r)} - e^{2\pi i k g(p^{r-1})}}{p^r}\right) =$$

$$= \sum_{\substack{n=1 \\ p^r \| n \to g(p^r) \not\equiv g(p^{r-1}) \pmod 1}}^{\infty} \frac{e^{2\pi i k g(n)}}{n} \sum_{d|m} e^{2\pi i k (g(d^*) - g(d^{**}))} (-1)^{\nu(d^*)}.$$

Этот ряд абсолютно сходится, ибо мажорируется рядом

$$\sum_{\substack{1 \\ p^r \| n \to g(p^r) \not\equiv g(p^{r-1}) \pmod 1}}^{\infty} \frac{d(n)}{n} \leqslant \prod_{g(p) \equiv 0 \pmod 1} \left(1 + \frac{3}{p^2} + \frac{4}{p^3} + \ldots\right) \times$$

$$\times \prod_{g(p) \not\equiv 0 \pmod 1} \left(1 + \frac{2}{p} + \frac{3}{p^2} + \ldots\right) \leqslant$$

$$\leqslant \prod_p \left(1 + \frac{3 - 2/p^2}{(p-1)^2}\right) \exp\left(2 \sum_{g(p) \not\equiv 0 \pmod 1} \frac{1}{p}\right) = O(1)$$

Следовательно,

$$a_\theta(0) = \sum_{\substack{n=1 \\ p^r \| n \to g(p^r) \not\equiv g(p^{r-1}) \pmod 1}}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{\substack{d^* | n \\ g\left(\frac{n}{d^*}\right) - g(d^{**}) \equiv \theta \pmod 1}} (-1)^{\nu(d^*)}.$$

Беря $A(\theta) = \frac{1}{2\pi} a_\theta(0)$, получаем утверждение леммы 5.

Теперь перейдем к доказательству теоремы.

На основании (9) имеем

$$d_N(\theta) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} a(\xi)(\ln N)^{\tau(\xi)-1} e^{-i\xi\theta} d\xi + O\left(\frac{1}{\ln N}\right).$$

Пусть

$$I^* \overset{\text{def}}{=} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} a(\xi)(\ln N)^{\tau(\xi)-1} e^{-i\xi\theta} d\xi =$$

$$= 2\pi \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T/2\pi}^{T/2\pi} a(2\pi\xi)(\ln N)^{\tau(2\pi\xi)-1} e^{-2\pi i\xi\theta} d\xi.$$

Ввиду периодичности $\tau(2\pi\xi)$ получаем, что

$$I^* = 2\pi \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-[T/2\pi]}^{[T/2\pi]} a(2\pi\xi)(\ln N)^{\tau(2\pi\xi)-1} e^{-2\pi i\xi\theta} d\xi =$$

$$= 2\pi \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \sum_{-[T/2\pi]}^{[T/2\pi]} \int_{-1/2}^{1/2} (\ln N)^{\tau(2\pi\xi)-1} e^{-2\pi i\xi\theta} a\big(2\pi(\xi+k)\big) e^{-2\pi ik\theta} d\xi =$$

$$= 2\pi \int_{-1/2}^{1/2} (\ln N)^{\tau(2\pi\xi)-1} e^{-2\pi i\xi\theta} \left[\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \sum_{-[T/2\pi]}^{[T/2\pi]} a\big(2\pi(\xi+k)\big) e^{-2\pi ik\theta}\right] d\xi.$$

Используя лемму 5, находим, что

$$I^* = \int_{-1/2}^{1/2} (\ln N)^{\tau(2\pi\xi)-1} e^{-2\pi i\xi\theta} a_0(\xi) d\xi =$$

$$= a_0(0) \int_{-1/2}^{1/2} (\ln N)^{\tau(2\pi\xi)-1} e^{-2\pi i\xi\theta} d\xi + \int_{-1/2}^{1/2} (\ln N)^{\tau(2\pi\xi)-1} e^{-2\pi i\xi\theta} \varepsilon_1(\xi) d\xi =$$

$$= a_0(0) I + I'.$$

Так как $\tau''(2\pi\xi)$ непрерывна в точке $\xi = 0$, то

$$\tau(2\pi\xi) = 1 + 2\pi\tau'(0)\xi + \frac{\tau''(0)(2\pi\xi)^2}{2} + \varepsilon(\xi)\xi^2,$$

где $\varepsilon(\xi) \to 0$ при $\xi \to 0$. То есть

$$\tau(2\pi\xi) = 1 + 2\pi i\xi E - \frac{4\pi^2\sigma^2\xi^2}{2} + \varepsilon(\xi)\xi^2.$$

Возьмем $\varepsilon_2(\xi) = \max\big(|\varepsilon_1(\xi)|, |\varepsilon(\xi)|\big)$, далее очевидно можно считать, что $\varepsilon_2(\xi)$ монотонно убывает при $\xi \to 0$.

Очевидно, что

$$|I'| \leqslant \int_{-1/2}^{1/2} e^{u(\mathrm{Re}\,\tau(2\pi\xi)-1)} \varepsilon_2(\xi) d\xi =$$

$$= \int_{|\xi| \leqslant \frac{\varrho(u)}{\sqrt{u}}} e^{u(\mathrm{Re}\,\tau(2\pi\xi)-1)} \varepsilon_2(\xi) d\xi + \int_{|\xi| > \frac{\varrho(u)}{\sqrt{u}}} |e^{u(\mathrm{Re}\,\tau(2\pi\xi)-1)}| d\xi,$$

где $\varrho(u) \to +\infty$ будет выбрано позднее в зависимости от $\varepsilon_2(\xi)$. Применяя к первому и второму интегралам лемму 4 получим, что

$$|I'| = O\left(\frac{\varrho^2(u)\,\varepsilon_2\left(\frac{\varrho(u)}{\sqrt{u}}\right)}{\sqrt{u}}\right) + O\left(\frac{e^{-2\delta\varrho^2(u)}}{\sqrt{u}}\right). \tag{16}$$

Теперь вычислим интеграл

$$I = \int_{-1/2}^{1/2} (\ln N)^{\tau(2\pi\xi)-1} e^{-2\pi i\xi\theta} d\xi = \tag{17}$$

$$= \int_{|\xi| \leqslant \frac{\varrho(u)}{\sqrt{u}}} (\ln N)^{\tau(2\pi\xi)-1} e^{-2\pi i\xi\theta} d\xi + \int_{\frac{1}{2} > |\xi| > \frac{\varrho(u)}{\sqrt{u}}} (\ln N)^{\tau(2\pi\xi)-1} e^{-2\pi i\xi\theta} d\xi =$$

$$= I_1 + I_2.$$

Вначале оценим I_2.

$$I_2 = O\left(\int_{\frac{\varrho(u)}{\sqrt{u}}}^{1/2} e^{u(\mathrm{Re}\,\tau(2\pi\xi)-1)} d\xi\right) = O\left(\int_{\frac{\varrho(u)}{\sqrt{u}}}^{1/2} e^{-u\sum_k \tau_k \sin^2 k\pi\xi} d\xi\right). \tag{18}$$

Отсюда ввиду леммы 4 получаем

$$I_2 = O\left(\int_{\frac{\varrho(u)}{\sqrt{u}}}^{1/2} e^{-\delta u\xi^2} d\xi\right) = O\left(\frac{1}{\sqrt{u}} e^{-\varrho^2(u)\delta}\right). \tag{18'}$$

Теперь вычислим I_1, который даст главный член.

$$I_1 = \int_{|\xi| \leqslant \frac{\varrho(u)}{\sqrt{u}}} e^{-4\pi^2\sigma^2 u\frac{\xi^2}{2}} e^{2\pi i(uE-\theta)\xi} e^{u\varepsilon(\xi)\xi^2} d\xi = \tag{19}$$

$$= \int_{|\xi| \leqslant \frac{\varrho(u)}{\sqrt{u}}} e^{-4u\pi^2\sigma^2 u\frac{\xi^2}{2}} e^{2\pi i(uE-\theta)\xi} d\xi + O\left(\frac{\varrho^2(u)\,\varepsilon_2\left(\frac{\varrho(u)}{\sqrt{u}}\right)}{\sqrt{u}}\right).$$

Так как

$$\text{(20)}\qquad \int\limits_{|\xi|\leqslant \frac{\varrho(u)}{\sqrt{u}}} e^{-4\pi^2\sigma^2 u\frac{\xi^2}{2}} e^{2\pi i(uE-\theta)\xi} d\xi = \frac{1}{2\pi\sigma\sqrt{u}} \int\limits_{-2\pi\sigma\varrho(u)}^{2\pi\sigma\varrho(u)} e^{-z^2/2} e^{i\left(\frac{uE-\theta}{\sigma\sqrt{u}}\right)z} dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma\sqrt{u}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2/2} e^{i\left(\frac{uE-\theta}{\sigma\sqrt{u}}\right)z} dz + O\left(\frac{e^{-\varrho^2(u)}}{\sqrt{u}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi u}} e^{-\left(\frac{uE-\theta}{2\sigma^2 u}\right)^2} + O\left(\frac{e^{-4\pi^2\sigma^2\varrho^2(u)}}{\sqrt{u}}\right),$$

то из (16)-(20) получаем с $\gamma = \text{const} > 0$

$$d_N(\theta) = \frac{A(\theta)}{\sigma\sqrt{2\pi u}} e^{-\left(\frac{uE-\theta}{2\sigma^2 u}\right)^2} + O\left(\frac{e^{-\gamma\varrho^2(u)}}{\sqrt{u}}\right) + O\left(\frac{\varrho^2(u)\,\varepsilon_2\left(\frac{\varrho(u)}{\sqrt{u}}\right)}{\sqrt{u}}\right) + O\left(\frac{1}{\ln N}\right).$$

Покажем теперь, что $\varrho(u)$ можно выбрать так, что $\varrho(u) \to \infty$,

$$\varrho^2(u)\,\varepsilon_2\left(\frac{\varrho(u)}{\sqrt{u}}\right) \to 0, \quad \text{если} \quad u \to \infty.$$

Возьмем $\varrho(u) = \min\left(\varepsilon_2^{-1/4}(u^{-1/4}),\, u^{1/4}\right)$.

Так как $\varepsilon^{-1/4}(u^{1/4}) \to \infty$, $u \to \infty$, то $\varrho(u) \to \infty$, при $u \to \infty$. И очевидно, что $\varrho^2(u)\,\varepsilon_2\left(\frac{\varrho(u)}{\sqrt{u}}\right) \to 0$ при $u \to \infty$, так как

$$\varrho^2(u)\,\varepsilon_2\left(\frac{\varrho(u)}{\sqrt{u}}\right) \leqslant \varepsilon_2^{-1/2}(u^{-1/4})\,\varepsilon_2\left(\frac{u^{1/4}}{u^{1/2}}\right) = \varepsilon^{1/2}(u^{-1/4}) \to 0,$$

то есть, окончательно получаем

$$d_N(\theta) = \frac{A(\theta)}{\sigma\sqrt{2\pi\ln\ln N}} e^{-\frac{(uE-\theta)^2}{2\sigma^2 u}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\ln\ln N}}\right).$$

Следствие 1. *Если* $E \neq 0$ *и* θ *не зависит от* N, *то*

$$\text{(21)}\qquad \frac{1}{N}\sum_{\substack{n\leqslant N\\ g(n)=\theta}} 1 = o\left(\frac{1}{\sqrt{\ln\ln N}}\right).$$

Следствие 2. *Если* $E = 0$ *и* θ *не зависит от* N, *то*

$$\text{(22)}\qquad \frac{1}{N}\sum_{\substack{n\leqslant N\\ g(n)=\theta}} 1 = \frac{A(\theta)}{\sigma\sqrt{2\pi\ln\ln N}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\ln\ln N}}\right).$$

Следствие 3. *Если* $|uE-\theta| = \lambda\sigma\sqrt{u} + o(u^{1/2})$, *то*

$$\text{(23)}\qquad \frac{1}{N}\sum_{\substack{n\leqslant N\\ g(n)=\theta}} 1 = \frac{A(\theta)e^{-\lambda^2/2}}{\sigma\sqrt{2\pi\ln\ln N}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\ln\ln N}}\right).$$

Литература

[1] H. Delange, *Sur un théorème de Rényi*, Acta Arith. 11 (1965), стр. 241–252.
[2] А. С. Файнлейб, *Локальные теоремы с остаточным членом для одного класса арифметических функций*, Acta Math. Acad. Sci. Hung, 21 (3–4) (1970), стр. 271–281.
[3] I. Kátai, *Egy megiegures H. Delange „Sur un théorème de Rényi", cimü dolgozatahoz*, Magyar Tut. Akad. Mat. ès. Fis. Tud. Oszt. Kozl. 16, 2 (1966), стр. 269–273.
[4] И. Кубилюс, *Вероятностные методы в теории чисел*, Вильнюс 1962.
[5] I. Kubilus, *On local theorems for additive number theoretic functions*, Abhandl. aus Zahlentheorie und Analysis, Berlin 1968, стр. 175–191.
[6] Б. В. Левин, А. С. Файнлейб, *Применение некоторых интегральных уравнений к вопросам теории чисел*, УМН 22 (3) (1967), стр. 119–197.
[7] Б. М. Левитан, *Почти-периодические функции*, Москва 1953.
[8] A. Rényi, *On the density of certain sequences of integers*, Putes. Inst. Math. Acad. Serbe. Sci. 8 (1955), стр. 157–162.
[9] A. Wintner, *The distribution of primes*, Duke Math. Journ. 8 (1942), стр. 425–430.
[10] — *Eratoshenian averages*, Baltimore 1943.

Получено 15. 9. 1971 (221)