### Bibliographie


[1] Y. Amice, *Interpolation p-adique*, Bull. Soc. Math. France 92 (1964), p. 117–180.
[2] N. Bourbaki, *Topologie générale*, chapitre 1, 2 et 9.
[3] J. W. S. Cassels and A. Fröhlich, *Algebraic Number Theory*, Academic Press 1967.
[4] W. Narkiewicz, *Some unsolved problems*, Bull. Soc. Math. France, Mémoire 25(1971), p. 159–164.
[5] O. Zariski and P. Samuel, *Commutative Algebra*, t. 1, Van Nostrand 1965.


*Reçu le 12.7.1971* (181)

ACTA ARITHMETICA
XXII (1972)

# Une généralisation d'un théorème de Cugiani–Mahler

par

MAURICE MIGNOTTE (Paris)

## I. INTRODUCTION

Dans l'ouvrage de Mahler [2], on trouve le théorème suivant qui généralise un résultat de Cugiani [1].

THÉORÈME. *Soit $\xi$ un nombre algébrique non nul de degré $f$. On désigne par $g' \geqslant 2$ et $g'' \geqslant 2$ deux entiers premiers entre eux; par $\lambda$ et $\mu$ deux réels vérifiant*

$$0 \leqslant \lambda \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \mu \leqslant 1, \quad \lambda + \mu > 0;$$

*par $c_1, c_2$ et $c_3$ trois constantes positives; par $\varepsilon(H)$ la fonction*

$$\varepsilon(H) = 5\sqrt{\log(4f)}\,(\log\log\log H)^{-1/2},$$

*et par $\Sigma = \{K^{(1)}, K^{(2)}, \ldots\}$ une suite infinie de rationnels distincts*

$$K^{(h)} = \frac{P^{(h)}}{Q^{(h)}} \quad \textit{où} \quad P^{(h)} \neq 0,\ Q^{(h)} \neq 0,\ (P^{(h)}, Q^{(h)}) = 1,$$

$$H^{(h)} = \max(|P^{(h)}|, |Q^{(h)}|) > \exp e,$$

*tels que*

$$|K^{(k)} - \xi| \leqslant c_1 H^{(k)-\lambda-\mu-\varepsilon(H^{(k)})} \tag{1}$$

*et*

$$|P^{(k)}|_{g'} \leqslant c_2 H^{(k)\lambda-1}, \qquad |Q^{(k)}|_{g''} \leqslant c_3 H^{(k)\mu-1}. \tag{2}$$

*Alors*

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\log H^{(k+1)}}{\log H^{(k)}} = \infty.$$

Notre but est de démontrer le théorème 1 qui est légèrement plus fort que le théorème précédent.

THÉORÈME 1. *Les notations et les hypothèses sont les mêmes que dans le théorème précédent sauf que l'on définit $\varepsilon(H)$ par*

$$\varepsilon(H) = 4\left(\frac{\log(f+2)\log 2}{\alpha}\right)^{1/2} (\log\log\log H)^{-1/2}, \quad \alpha \textit{ réel},\ 0 < \alpha < 6.$$

*Alors, si $\varrho$ est un réel, et $1 < \varrho < 2^{(6-a)/a}$, on a*

$$\limsup \frac{\log H^{(k+1)}}{(\log H^{(k)})^{\varrho}} = \infty.$$

## II. PRÉLIMINAIRES

### 1. Le lemme de Roth.

LEMME 1. *Soit $0 < t \leqslant 1$. Soit $a$ un réel $\geqslant 1$. Soient $r_1, \ldots, r_m, H_1, \ldots$ $\ldots, H_m$ des entiers positifs, $m \geqslant 2$, tels que*

$$r_{h+1} \leqslant r_h t, \quad r_h \log H_h \geqslant r_1 \log H_1,$$
$$H_1 \geqslant 2^{(1/t)(m-1)m(2m+1)}, \quad a \leqslant H_1^{(1/m)r_1 t}.$$

*Soient $K_h = \dfrac{P_h}{Q_h}$ des rationnels tels que* $\max(|P_h|, |Q_h|) = H_h$. *Soit un polynôme à coefficients entiers*

$$A(x_1, \ldots, x_m) = \sum a_{i_1 \ldots i_m} x_1^{i_1} \ldots x_m^{i_m}$$

*avec*

$$\max |a_{i_1 \ldots i_m}| \leqslant a.$$

*Alors il existe des entiers $j_1, \ldots, j_m$ tels que*

$$\frac{\partial^{j_1 + \ldots + j_m}}{\partial x_1^{j_1} \ldots \partial x_m^{j_m}} A(K_1, \ldots, K_m) \neq 0$$

*avec*

$$\frac{j_1}{\varrho_1} + \ldots + \frac{j_m}{\varrho_m} \leqslant 2^{m+1} t^{2^{-(m-1)}}.$$

Démonstration. Voir [2], pages 77–97.

### 2. Le polynôme d'approximation.

LEMME 2. *Soit $F = F_0 x^f + F_1 x^{f-1} + \ldots + F_f$ un polynôme à coefficients entiers, de racines $\xi_1, \ldots, \xi_f$ distinctes. Pour tout entier $l \geqslant 0$, il existe des entiers $g_0^{(l)}, \ldots, g_{f-1}^{(l)}$, de valeur absolue $\leqslant (2\overline{|F|})^l$, tels que*

$$F_0^l \xi_\psi = g_0^{(l)} + g_1^{(l)} \xi_\psi + \ldots + g_{f-1}^{(l)} \xi_\psi^{f-1}$$
$$(\psi = 1, 2, \ldots, f;\ \overline{|F|} = \max(|F_0|, |F_1|, \ldots, |F_f|)).$$

Démonstration. Très facile, par récurrence sur $l$.

LEMME 3. *Soient $r_1, \ldots, r_m$ des entiers $> 0$. Soient $a, s, \varrho_1, \ldots, \varrho_m$*



*des réels positifs, $a < 6$. Il existe $\varepsilon = \varepsilon(a)$, tel que $0 < \varepsilon < 1/2$, et que les conditions*

$$r_i > \varepsilon^{-1}, \quad \left|\frac{r_i}{\varrho_i} - 1\right| < \varepsilon \quad (i = 1, \ldots, n) \quad \text{et} \quad s < \varepsilon$$

*impliquent le résultat qui suit:*

*Le nombre $N$ de solutions entières $i = (i_1, \ldots, i_m)$ des inégalités*

$$0 \leqslant i_h \leqslant r_h \quad (h = 1, \ldots, m), \qquad \sum_{h=1}^{m} \frac{i_h}{\varrho_h} \leqslant (\tfrac{1}{2} - s) \sum_{h=1}^{m} \frac{r_h}{\varrho_h}$$

*est majoré par*

$$(r_1+1) \ldots (r_m+1) \exp(-ams^2).$$

Démonstration. Soit $u$ une variable $\geqslant 0$. On pose

$$F_h(u) = \sum_{i_h=0}^{r_h} \exp\left[u\left(\frac{i_h}{\varrho_h} - \frac{r_h}{2\varrho_h}\right)\right], \quad h = 1, \ldots, m,$$

$$F(u) = \prod_{h=1}^{m} F_h(u) = \sum_{i_1=0}^{r_1} \ldots \sum_{i_m=0}^{r_m} \exp\left[u \sum_{h=1}^{m} \left(\frac{i_h}{\varrho_h} - \frac{r_h}{2\varrho_h}\right)\right].$$

On remarque que

$$F_h(u) = \frac{\operatorname{sh}[(r_h+1)(u/2\varrho_h)]}{\operatorname{sh}(u/2\varrho_h)} \leqslant (r_h+1)\frac{\operatorname{sh} t}{t}, \quad \text{avec} \quad t = (r_h+1)\frac{u}{2\varrho_h}.$$

En calculant les dérivées successives de la fonction $\log\left(\dfrac{\operatorname{sh} t}{t}\right)$, et en lui appliquant la formule de Taylor, on montre l'existence d'une constante $c$ telle que

$$\frac{\operatorname{sh} t}{t} \leqslant \exp\left(\frac{t^2}{6} + ct^4\right), \quad \text{pour tout } t.$$

Il en résulte que

$$F(u) \leqslant (r_1+1) \ldots (r_m+1) \exp\left[\frac{u^2}{24} \sum_{h=1}^{m} \left(\frac{r_h+1}{\varrho_h}\right)^2 + c \sum_{h=1}^{m} \left(\frac{r_h+1}{2\varrho_h}\right)^4 u^4\right].$$

En effectuant la transformation $i_h \to r_h - i_h$ $(h = 1, \ldots, m)$, nous constatons que $N$ est aussi égal au nombre de solutions des inégalités

$$0 \leqslant i_h \leqslant r_h \quad (h = 1, \ldots, m), \qquad \sum_{h=1}^{m} \frac{i_h}{\varrho_h} \geqslant (\tfrac{1}{2} + s) \sum_{h=1}^{m} \frac{r_h}{\varrho_h}.$$

Il en résulte aisément que

$$F(u) \geqslant N \exp\Big(su \sum_{h=1}^{m} \frac{r_h}{\varrho_h}\Big).$$

En comparant les deux inégalités portant sur $F(u)$, il vient

$$N \leqslant (r_1+1) \ldots (r_m+1) \exp\Big(-msuc_1 + \frac{u^2}{24} mc_2 + u^4 mc_4 c\Big)$$

avec

$$c_1 = \frac{1}{m} \sum_{h=1}^{m} \frac{r_h}{\varrho_h}, \qquad c_i = \frac{1}{m} \sum_{h=1}^{m} \Big(\frac{r_h+1}{\varrho_h}\Big)^i, \qquad i = 2, 4.$$

On choisit $u = 12 \dfrac{c_1}{c_2} s$, ainsi

$$N \leqslant (r_1+1) \ldots (r_m+1) \exp\Big[-m\Big(\frac{6c_1^2}{c_2} s^2 - 144c \frac{c_1^4}{c_2^4} c_4 s^4\Big)\Big].$$

Il est clair que si $\varepsilon$ est assez petit, alors

$$N \leqslant (r_1+1) \ldots (r_m+1) \exp(-ams^2).$$

LEMME 4. *On suppose vérifiées les conditions du lemme* 3. *Soient* $\sigma_1, \ldots, \sigma_m, \tau_1, \ldots, \tau_m$ *des réels positifs, tels que*

$$|r_h \sigma_h^{-1} - 1| < \varepsilon, \qquad |r_h \tau_h^{-1} - 1| < \varepsilon, \qquad h = 1, \ldots, m.$$

*On suppose, de plus,* $ams^2 > \log(f+2)$. *Il existe alors une constante* $c$, *ne dépendant que de* $F$ *et de* $a$, *telle qu'il existe un polynôme*

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sum_{i_1=0}^{r_1} \ldots \sum_{i_m=0}^{r_m} a_{i_1 \ldots i_m} x_1^{i_1} \ldots x_m^{i_m}$$

*non nul qui possède les propriétés suivantes*

(i) $\overline{|A|} \leqslant c^{r_1+\ldots+r_m}$.

(ii) $\dfrac{i_1}{\varrho_1} + \ldots + \dfrac{i_m}{\varrho_h} \leqslant \Big(\dfrac{1}{2} - s\Big)\Big(\dfrac{r_1}{\varrho_1} + \ldots + \dfrac{r_m}{\varrho_m}\Big)$

*ou*

$$\frac{i_1}{\sigma_1} + \ldots + \frac{i_m}{\sigma_m} \geqslant \Big(\frac{1}{2} + s\Big)\Big(\frac{r_1}{\sigma_1} + \ldots + \frac{r_m}{\sigma_m}\Big)$$

*implique* $a_{i_1 \ldots i_m} = 0$.

(iii) $F(t)$ *divise* $\dfrac{\partial^{j_1+\ldots+j_m}}{\partial x_1^{j_1} \ldots \partial x_m^{j_m}} A(t, \ldots, t)$ *pour tous les* $(j_1, \ldots, j_m)$ *tels que*

$$0 \leqslant j_h \leqslant r_h \quad (h = 1, \ldots, m) \quad \text{et} \quad \sum_{h=1}^{m} \frac{j_h}{\tau_h} \leqslant (\tfrac{1}{2} - s) \sum_{h=1}^{m} \frac{r_h}{\tau_h}.$$



(iv) $\dfrac{\partial^{j_1+\ldots+j_m *}}{\partial x_1^{j_1} \ldots \partial x_m^{j_m}} A(x_1, \ldots, x_m) \ll c^{r_1+\ldots+r_m}(1+x_1)^{r_1} \ldots (1+x_m)^{r_m}$,

$$\frac{\partial^{j_1+\ldots+j_m *}}{\partial x_1^{j_1} \ldots \partial x_m^{j_m}} A(t, \ldots, t) \ll c^{r_1+\ldots+r_m}(1+t)^{r_1+\ldots+r_m}$$

où $\dfrac{\partial^{j_1 *}}{\partial x_1^{j_1}} = \dfrac{1}{j_1!} \dfrac{\partial^{j_1}}{\partial x_1^{j_1}} \ldots$

Démonstration. Soit $a < a' < 6$ tel que $a'ms^2 > \log(f+2)$, et $a$ un entier $> 0$ qui sera fixé ultérieurement.

Considérons l'ensemble des polynômes du type

$$B(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{i_1=0}^{r_1} \ldots \sum_{i_m=0}^{r_m} b_{i_1 \ldots i_m} x_1^{i_1} \ldots x_m^{i_m}, \quad \overline{|B|} \leqslant a, \qquad b_{i_1 \ldots i_m} \text{ entiers} \geqslant 0,$$

et

$$b_{i_1 \ldots i_m} = 0 \quad \text{si} \quad \sum_{h=1}^{m} \frac{i_h}{\varrho_h} \leqslant (\tfrac{1}{2} - s) \sum_{h=1}^{m} \frac{r_h}{\varrho_h} \quad \text{ou} \quad \sum_{h=1}^{m} \frac{i_h}{\sigma_h} \geqslant (\tfrac{1}{2} + s) \sum_{h=1}^{m} \frac{r_h}{\sigma_h}.$$

D'après le lemme 3, ces conditions exigent l'annulation d'au plus

$$2(r_1+1) \ldots (r_m+1) \exp(-ams^2) \leqslant \frac{2}{f+2} (r_1+1) \ldots (r_m+1)$$

coefficients. Il y a donc au moins

$$M = (a+1)^{(f/(f+2))(r_1+1)\ldots(r_m+1)}$$

polynômes $B$. On voit facilement que

$$\frac{\partial^{j_1+\ldots+j_m *}}{\partial x_1^{j_1} \ldots \partial x_m^{j_m}} B(t, \ldots, t) \ll a 2^{r_1+\ldots+r_m} (1 + x + \ldots + x^{r_1+\ldots+r_m}).$$

D'après le lemme 2, on a une égalité du type

$$F_0^{r_1+\ldots+r_m} \frac{\partial^{j_1+\ldots+j_m *}}{\partial x_1^{j_1} \ldots \partial x_m^{j_m}} B(\xi_\psi, \ldots, \xi_\psi) = \sum_{\varphi=0}^{f-1} B_\varphi^{(j)} \xi_\psi^\varphi \qquad (\psi = 1, \ldots, f),$$

avec

$$B_\varphi^{(j)} \text{ entier}, \qquad |B_\varphi^{(j)}| \leqslant 2a(8\overline{|F|})^{r_1+\ldots+r_m}, \qquad j = (j_1, \ldots, j_m).$$

Soit $j = (j_1, \ldots, j_m)$ vérifiant

$$(*) \qquad 0 \leqslant j_h \leqslant r_h \quad (h = 1, \ldots, m) \quad \text{et} \quad \sum_{h=1}^{m} \frac{j_h}{\tau_h} \leqslant (\tfrac{1}{2} - s) \sum_{h=1}^{m} \frac{r_h}{\tau_h}.$$

D'après le lemme 3, il y a au plus

$$\Big(\frac{1}{f+2}\Big)^{a'/a} (r_1+1) \ldots (r_m+1)$$

choix de $j$ possibles (on applique le lemme avec $a'$). Il y a donc au plus

$$M^* = \left(4a(8\overline{|F|})^{r_1+\ldots+r_m}\right)^{f(f+2)\cdot a'/a(r_1+1)\ldots(r_m+1)}$$

valeurs de $\dfrac{\partial^{j_1+\ldots+j_m}}{\partial x_1^{j_1}\ldots\partial x_m^{j_m}} B(\xi_\psi, \ldots, \xi_\psi)$ possibles. Il suffit de choisir $a = \left(4(8\overline{|F|})^{r_1+\ldots+r_m}\right)^k$, $k = k(a)$ étant un entier assez grand pour que $M > M^*$; autrement dit, il existe deux polynômes $B_1$ et $B_2$ distincts tels que

$$\frac{\partial^{j_1+\ldots+j_m}}{\partial x_1^{j_1}\ldots\partial x_m^{j_m}} B_1(\xi_\psi, \ldots, \xi_\psi) = \frac{\partial^{j_1+\ldots+j_m}}{\partial x_1^{j_1}\ldots\partial x_m^{j_m}} B_2(\xi_\psi, \ldots, \xi_\psi) \qquad (\psi = 1, 2, \ldots, f),$$

pour tout $(j_1, \ldots, j_m)$ vérifiant (*).

Il est clair que $A = B_1 - B_2$ convient.

### III. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

On va supposer que l'assertion du théorème est fausse; il est facile de voir que l'on peut se limiter à supposer que cette limite supérieure est $< 1$. Posons $a = \left(\log(f+2)\log 2/\alpha\right)^{1/2}$. Soit $m$ un entier positif très grand. Soit $\eta > 0$ assez petit. Choisissons

$$s = \frac{1}{1-\eta}[\log(f+2)/6m]^{1/2}, \qquad t = \exp(-2^{m-1}m), \qquad X_1 = X = \exp\left(\frac{2}{t}m^3\right).$$

Par hypothèse, $\Sigma$ est infinie, donc $\lim\limits_{h\to\infty} H^{(h)} = \infty$. Il est donc possible de choisir $m$ éléments

$$K_h = K^{(i_h)} = \frac{P_h}{Q_h},$$

de poids $H_h$, et qui vérifient

$$X_h \leqslant H_h \leqslant \exp[(\log X_h)^\varrho], \quad \text{avec} \quad X_{h+1} = H_h^{2/t}, \quad h = 1, \ldots, m-1.$$

On en déduit

$$\log X_m \leqslant \left(\frac{2}{t}\right)^{1+\varrho+\ldots+\varrho^{m-2}} (\log X_1)^{\varrho^{m-1}} \leqslant (2e)^{2m^4(2\varrho)^{m-1}}.$$

Soit $\varrho < \varrho' < 2^{(6-a)/a}$; alors, si $m$ est assez grand,

$$\log X_m \leqslant \exp\left|\exp[m\log(2\varrho')]\right|.$$

D'où l'on tire

$$\sigma = \sum_{h=1}^{m} \varepsilon(H_h) > m\varepsilon(H_m) \geqslant \frac{\sqrt{m}}{\log(2\varrho')} > 4(1+\eta')s,$$



pour un certain $\eta' > 0$ assez petit. On choisit $r_1$ très grand, puis $m-1$ entiers positifs $r_2, \ldots, r_m$ tels que

$$(r_h - 1)\log H_h < r_1 \log H_1 \leqslant r_h(\log H_h) \qquad (h = 2, \ldots, m),$$

de sorte que

$$\vartheta = \max_h \frac{1}{r_h - 1} \leqslant \frac{1}{m}.$$

Ces conditions entraînent $r_{h-1} > \dfrac{1}{t} r_h$ pour $h = 2, \ldots, m$.

On peut appliquer le lemme 4, où $F(x)$ désigne le polynôme unitaire irréductible de racine $\xi$, et où on pose

$$\varrho_h = \sigma_h = r_h \quad \text{et} \quad \tau_h = \frac{(\lambda+\mu)^{r_h}}{\lambda+\mu+\varepsilon(H_h)}.$$

Les conditions sont vérifiées pourvu que $m$ et $r_1$ soient assez grands. D'où l'existence d'un polynôme $A$ vérifiant les conditions de ce lemme.

Le lemme de Roth s'applique aussi, pourvu que

$$H_1 \geqslant 2^{(1/t)m(m-1)(2m+1)} \quad \text{et} \quad c^{mr_1} \leqslant H_1^{(1/m)r_1 t}.$$

Ces inégalités sont vérifiées pour $m$ assez grand car

$$H_1 \geqslant X = \exp\left(\frac{2}{t}m^3\right).$$

Par suite, il existe $(l_1, \ldots, l_m)$ tels que $0 \leqslant l_h \leqslant r_h$, $h = 1, \ldots, m$,

$$A = \sum_{h=1}^{m} \frac{l_h}{r_h} \leqslant 1 \quad \text{et} \quad A_{(l)} = \frac{\partial^{l_1+\ldots+l_m{}^*}}{\partial x_1^{l_1}\ldots\partial x_m^{l_m}} A(K_1, \ldots, K_m) \neq 0$$

une borne supérieure de $A_{(l)}$.

Soit $J^*$ l'ensemble des $j = (j_1, \ldots, j_m)$ tels que

$$l_h \leqslant j_h \leqslant r_h \quad (h = 1, \ldots, m) \quad \text{et} \quad \sum_{h=1}^{m} \frac{j_h}{\tau_h} > (\tfrac{1}{2} - s) \sum_{h=1}^{m} \frac{r_h}{\tau_h}.$$

Alors

$$A_{(l)} = \sum_{j\in J^*} \frac{\partial^{j_1+\ldots+j_m}}{\partial x_1^{j_1}\ldots\partial x_m^{j_m}} A(\xi, \ldots, \xi)\binom{j_1}{l_1}\ldots\binom{j_m}{l_m}(K_1-\xi)^{j_1-l_1}\ldots(K_1-\xi)^{j_m-l_m}$$

et

$$\sum_{0\leqslant j_1\leqslant r_1} \ldots \sum_{0\leqslant j_m\leqslant r_m} \frac{\partial^{j_1+\ldots+j_m}}{\partial x_1^{j_1}\ldots\partial x_m^{j_m}} A(\xi, \ldots, \xi)\binom{j_1}{l_1}\ldots\binom{j_m}{l_m} \leqslant c_5^{r_1+\ldots+r_m}.$$

D'après le choix de $H_h$, $r_h$ et $\tau_h$, on a

$$\max_{j\in J^*}|K_1-\xi|^{j_1-l_1}\ldots|K_m-\xi|^{j_m-l_m}\leqslant c_1^{r_1+\ldots+r_m}\max_{j\in J^*}\prod_{h=1}^{m}H_h^{-(j_h-l_h)(\lambda+\mu+\varepsilon(H_h))}$$

$$\leqslant c_1^{mr_1}H_1^{-(\lambda+\mu)r_1\left[(\frac12-s)\left(\sum_{h=1}^{m}\frac{r_h}{\tau_h}\right)-\sum_{h=1}^{m}\frac{l_h}{\tau_h}\right]}.$$

En remarquant que $\sum_{h=1}^{m}\frac{r_h}{\tau_h}=m+\frac{\sigma}{\lambda+\mu}$ et $\tau_h\geqslant(1-\varepsilon)r_h\geqslant\frac12 r_h$, on obtient aisément l'inégalité

$$A_{(l)}\leqslant(c_1c_5)^{mr_1}H_1^{-(\lambda+\mu)r_1\left[(\frac12-s)\left(m+\frac{\sigma}{\lambda+\mu}\right)-2\right]}.$$

Posons $A_{(l)}=\frac{N_{(l)}}{D_{(l)}}$, avec $(N_{(l)},D_{(l)})=1$. Pour obtenir une borne inférieure de $A_{(l)}$, on va majorer $D_{(l)}$, et minimiser $N_{(l)}$.

Une majoration de $D_{(l)}$. On a

$$\frac{N_{(l)}}{D_{(l)}}=\sum_{i_1=0}^{r_1}\ldots\sum_{i_m=0}^{r_m}a_{i_1\ldots i_m}\binom{i_1}{l_1}\ldots\binom{i_m}{l_m}\left(\frac{P_1}{Q_1}\right)^{i_1-l_1}\ldots\left(\frac{P_m}{Q_m}\right)^{i_m-l_m}$$

$$=\sum_{i_1,\ldots,i_m\in I}a_{i_1\ldots i_m}\binom{i_1}{l_1}\ldots\binom{i_m}{l_m}\left(\frac{P_1}{Q_1}\right)^{i_1-l_1}\ldots\left(\frac{P_m}{Q_m}\right)^{i_m-l_m}$$

où $I$ désigne l'ensemble des $(i_1,\ldots,i_m)$ tels que $0\leqslant i_h-l_h\leqslant r_h-l_h$ $(h=1,\ldots,m)$ et

$$S_1<\sum_{h=1}^{m}\frac{i_h-l_h}{r_h}<S_2$$

avec $S_1=(\frac12-s)m-\Lambda$ et $S_2=(\frac12+s)m+\Lambda$.

Ainsi

$$|D_{(l)}|\leqslant D=\mathop{\mathrm{p.p.c.m}}_{i\in I}(Q^{i_1-l_1}\ldots Q^{i_m-l_m}).$$

D'après l'inégalité $|Q_h|_{g''}\leqslant c_4H_h^{\mu-1}$, on peut écrire $Q_h=Q_h^*Q_h^{**}$ où $Q_h^*$ est une puissance de $g''$ et où

$$\frac{1}{c_4g''}H_h^{1-\mu}\leqslant|Q_h^*|\leqslant\frac{1}{c_4}H_h^{1-\mu}\leqslant c_6H_h^{1-\mu}\ (\text{avec } c_6\geqslant1),\qquad |Q_h^{**}|\leqslant c_4g''H_h^{\mu}.$$

Il est clair que $D\leqslant D^*D^{**}$, avec $D^*=\mathop{\mathrm{p.p.c.m.}}_{i\in I}(Q_1^{*i_1-l_1}\ldots Q_m^{*i_m-l_m})$ et $D^{**}=\mathop{\mathrm{p.p.c.m.}}_{i\in I}(Q_1^{**i_1-l_1}\ldots Q_m^{**i_m-l_m})$.



Ainsi

$$D^*=\max_{i\in I}(Q_1^{*i_1-l_1}\ldots Q_m^{*i_m-l_m})\leqslant c_6^{mr_1}H_1^{(1-\mu)(1+\vartheta)S_2r_1}$$

et

$$D^{**}\leqslant c_7^{mr_1}H_1^{\mu(1+\vartheta)S_3r_1}\quad\text{avec}\quad S_3=m-\Lambda,$$

d'où

$$|D_{(l)}|\leqslant c_8^{mr_1}H_1^{(1-\mu)(1+\vartheta)r_1[(\frac12+s)m-\Lambda]+\mu(1+\vartheta)r_1(m-\Lambda)}.$$

Une borne inférieure pour $N_{(l)}$. Le même type de raisonnement donne

$$|N_{(l)}|\geqslant c_9^{-mr_1}H_1^{(1-\lambda)r_1[(\frac12-s)m-\Lambda]}.$$

Conclusion. *Il résulte de ces inégalités que*

$$|A_{(l)}|\geqslant c_{10}^{-mr_1}H_1^{E^*r_1},$$

*avec*

$$E^*=(1-\lambda)[(\tfrac12-s)m-\Lambda)]-(1-\mu)(1+\vartheta)[(\tfrac12+s)m-\Lambda]-\mu(1-\vartheta)(m-\Lambda).$$

*En comparant ceci avec la majoration de* $|A_{(l)}|$, *il vient*

$$H_1^E\leqslant c_{11}^m,$$

*avec*

$$E=(\tfrac12-s)\sigma-[2+\vartheta(1-\mu)]ms-\left(\frac{1+\mu}{2}\right)\vartheta m-(\lambda+2\mu-\vartheta)\Lambda.$$

Les inégalités vérifiées par tous ces paramètres conduisent à $E>\frac{\eta'}{2}\sqrt{m}-c_{12}$. On en tire $H_1\leqslant c_{13}^{\sqrt{m}}$ pour $m$ assez grand. Ceci contredit $H_1\geqslant\exp\left(\frac{2}{t}m^3\right)$, ce qui achève la démonstration.

## IV. APPLICATIONS

Théorème 2. *Soit $p$ un nombre premier, $q$ un entier tel que $p>q\geqslant2$. Soit $\Sigma=\{n^{(1)},n^{(2)},\ldots\}$ une suite strictement croissante d'entiers $>0$ tels que*

$$\left|\left(\frac{p}{q}\right)^n-g_n\right|\leqslant\exp\left(-\frac{\vartheta_n\log p}{\sqrt{\log\log n}}\right)\quad si\quad n\in\Sigma$$

*avec $g_n=$ l'entier le plus proche de $\left(\frac{p}{q}\right)^n$ et $\vartheta=4\left(\frac{\log3\log2}{\alpha}\right)^{1/2}$, $0<\alpha<6$. Alors*

$$\limsup\frac{n^{(h+1)}}{(n^{(h)})^{\varrho}}=\infty,\quad si\quad 1<\varrho<2^{(6-\alpha)/\alpha}.$$

Démonstration. C'est la même que celle de Mahler ([2], p. 177) à ceci près qu'on utilise le théorème 1.

THÉORÈME 3. *Soit $g \geqslant 2$ un entier fixé. Soit $(\vartheta_n)$ une suite de réels, $0 < \vartheta_n < 1$. Soit $(\omega_n)$ une suite de réels $> 0$ qui tendent vers l'infini. Soit $(\nu_n)$ une suite d'entiers qui vérifient*

$$\nu_1 \geqslant 3, \quad \ldots, \quad \nu_{n+1} \geqslant \nu_n \left(1 + \frac{\omega_n}{\sqrt{\log\log \nu_n}}\right), \quad \ldots$$

*Soit $(a_n)$ une suite d'entiers $> 0$ premiers à $g$ qui vérifient*

$$a_{n+1} \leqslant g^{\vartheta_n(\nu_{n+1}-\nu_n)}.$$

*Si on suppose que la suite $(1-\vartheta_n)\omega_n$ tend vers l'infini, et qu'il existe $\varrho > 1$ tel que $(1-\vartheta_n)\nu_n^{\varrho}$ tend vers l'infini, alors le nombre*

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n g^{-\nu_n}$$

*est transcendant.*

Démonstration. Posons

$$P_N = g^{\nu_N} \sum_{n=1}^{N} a_n g^{-\nu_n}, \quad Q_N = g^{\nu_N}, \quad R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n g^{-\nu_n},$$

de sorte que

$$\xi - \frac{P_N}{Q_N} = R_N > 0.$$

On voit facilement que $(P_N, Q_N) = 1$. De plus,

$$0 < R_N < a_{N+1} g^{-\nu_{N+1}} + \sum_{m=\nu_{N+1}}^{\infty} g^{-m} \leqslant 3a_{N+1} g^{-\nu_{N+1}},$$

donc

$$0 < R_N < 3Q_N^{-1-(1-\vartheta_N)\omega_N(\log\log\log Q_N/\log g)^{-1/2}}$$
$$\leqslant Q_N^{-1-\frac{1}{2}(1-\vartheta_N)\omega_N(\log\log\log Q_N)^{-1/2}},$$

si $N$ assez grand.

Supposons $\xi$ algébrique de degré $f$. Appliquons le théorème 1 avec $\varrho' = \varrho+1$, $\lambda = 1$, $\mu = 0$, $g'' = g$, $c_1 = 1$, $c_2 = 1$, $g'$ entier arbitraire premier avec $g$, ce qui est légitime car $(1-\vartheta_n)\omega_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$.

On obtient

$$\limsup \frac{\log Q_{N+1}}{(\log Q_N)^{\varrho'}} = \infty, \text{ ce qui équivaut à } \limsup \frac{\nu_{N+1}}{\nu_N^{\varrho'}} = \infty.$$



Il en résulte que

$$(1-\vartheta_N)\nu_{N+1} \geqslant (1-\vartheta_N)\nu_N^{\varrho+1} \geqslant (f+1)\nu_N \quad \text{si } N \text{ assez grand.}$$

Ainsi

$$0 < R_N < cQ_N^{-(f+1)}$$

si $N$ assez grand, ceci contredit le théorème de Liouville, donc $\xi$ est transcendant.

### Bibliographie


[1] Marco Cugiani, *Sull' approssimazione di numeri algebrici mediante razionali*, Collectanea Mathematica, N. 169, Milano 1958.

[2] Kurt Mahler, *Lectures on diophantine approximations*, Part 1, Notre Dame 1961.


*Reçu le 18.8.1971* (209)