5. Proof of the theorem. For $\operatorname{Re} s > 1$ we have

$$\sum_{I \in \mathscr{A}} \frac{1}{N(I)^s} = \sum_{\tau \in T} \sum_{I \in S(\tau)} \frac{1}{N(I)^s}$$

with $d(\tau) \leqslant M$ for each $\tau \in T$, thus

$$\sum_{I \in \mathscr{A}} \frac{1}{N(I)^s} = \sum_{j=0}^{M} \sum_{\substack{\tau \in T \\ d(\tau)=j}} \sum_{I \in \tilde{S}(\tau)} \frac{1}{N(I)^s}$$

and by the last corollary this equals

$$\frac{g(s)\mathscr{V}\left(\log \frac{1}{s-1}\right)}{(s-1)^{1/h}}$$

with $\mathscr{V}(t)$ being a polynomial over Ω of degree M, with leading coefficient positive at $s = 1$ and $g(1) > 0$. Applying the tauberian theorem of H. Delange ([1]) we get our assertion.

References

[1] H. Delange, *Généralisation du théorème de Ikehara*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 71 (1954), pp. 213–242.

[2] W. Narkiewicz, *On algebraic number fields with nonunique factorization*, Colloq. Math. 12 (1964), pp. 59–68.

MATHEMATICAL INSTITUTE, WROCŁAW UNIVERSITY
UNIVERSITÈ BORDEAUX I

Received on 2. 8. 1971 (201)

ACTA ARITHMETICA
XXI (1972)

Über die Idealklassengruppe des Dirichletschen biquadratischen Zahlenkörpers

von

HANS REICHARDT (Berlin)

Zum Gedenken an W. Sierpiński

Gauß hat seine komplexen ganzen Zahlen nicht nur um ihrer selbst willen eingeführt, sondern um eine Theorie der biquadratischen Reste in Analogie zu der der quadratischen Reste aufzubauen, was ihm, solange er viele Jahre im Bereich der rationalen Zahlen blieb, nicht in befriedigender Weise gelingen wollte, aber dann im Komplexen sofort zum Reziprozitätsgesetz nebst Ergänzungssätzen für die 4. Potenzreste führte. Im Gegensatz zu Gauß schlug Dirichlet [1] vor, die ganzen Gaußschen Zahlen als selbständiges Forschungsobjekt zu betrachten und deren Theorie ganz nach dem Muster der Theorie der rationalen Zahlen soweit wie möglich aufzubauen. Es lag für ihn natürlich besonders nahe, seine eigenen neuen Methoden, vor allem die analytische Bestimmung der Klassenzahl quadratischer Formen, zu übertragen, also die Klassenzahlen solcher quadratischen Formen zu berechnen, deren Koeffizienten und deren Variable ganze Gaußsche Zahlen sind. Das für ihn überraschendste und schönste Ergebnis war die Erkenntnis, ausgedrückt in unserer heutigen idealtheoretischen Betrachtungsweise, daß die Klassenzahl h eines Körpers B, der von i und $\sqrt{D}$, wobei D die Diskriminante eines quadratischen Zahlkörpers über dem Körper Q der rationalen Zahlen ist, über Q erzeugt wird, gleich $h_1 h_2$ oder $h_1 h_2/2$ ist, wobei h_1 die Klassenzahl von $Q_1 = Q(\sqrt{D})$ und h_2 die von $Q_2 = Q(\sqrt{-D})$ ist. Dafür, welcher der beiden Fälle vorliegt, gab er ein einfaches Kriterium an.

Später hat Hilbert [3] den Vorschlag von Dirichlet weiterverfolgt und eine zur Gaußschen Geschlechtertheorie Q analoge über $Q_0 = Q(i)$ aufgebaut. Die Ergebnisse konnte er zu einem neuen und rein arithmetischen Beweis des Resultats von Dirichlet verwerten. Zwar lautet das Hilbertsche Kriterium anders als das von Dirichlet, doch lassen sich beide leicht ineinander überführen.

Die Formel $h = h_1 h_2$ oder $h_1 h_2/2$ legt die Vermutung nahe, daß die Klassengruppe von B sehr eng mit dem direkten Produkt der Klassengruppen von Q_1 und Q_2 zusammenhängt. Es wird sich zeigen, daß der ungerade Bestandteil der Klassengruppe von B tatsächlich gleich dem direkten Produkt der ungeraden Bestandteile der Klassengruppen von Q_1 und Q_2 ist.

Wie die 2-Klassengruppe von B sich auf die von Q_1 und Q_2 reduzieren läßt, erfordert jedoch Hilfsmittel aus der Klassenkörpertheorie und wird hier nur für den Fall durchgeführt, daß D eine positive oder negative ungerade Primdiskriminante ist.

1. Die Produktformel für die Klassenzahl. Die Formel von Dirichlet für h erhält man am einfachsten, indem man aus den Darstellungen der Dedekindschen ζ-Funktionen von Q_0, Q_1, Q_2 und B als Produkt der Riemannschen ζ-Funktion mit den jeweiligen L-Reihen und aus den Führer-Diskriminanten-Formeln für $Q_0/Q, Q_1/Q, Q_2/Q$ und B/Q die L-Reihen eliminiert und das bekannte Verhalten dieser Funktionen bei $s = 1$ ausnützt.

Berücksichtigt man in der so entstehenden Formel noch die Realitätsverhaltnisse und die Anzahl der Einheitswurzeln in den einzelnen Körpern, so erhält man, wenn ε_1 die durch $\varepsilon_1 > 1$ eindeutig festgelegte Grundeinheit von Q_1 und ε eine der durch $|\varepsilon| > 1$ bis auf eine Potenz von i eindeutig bestimmte Grundeinheit von B ist, die Formel

$$h = h_1 h_2 \frac{\ln \varepsilon_1}{2 \ln |\varepsilon|}. \tag{1}$$

(Den Fall, daß B der Körper der 8. oder 12. Einheitswurzeln ist, schliessen wir aus, weil in diesen Körpern die Klassenzahl bekanntlich 1 ist.)

Die Beziehungen zwischen den Grundeinheiten ε_1 und ε kann man folgendermassen ermitteln; Bedeutet "$\bar{\ }$" den Automorphismus von B, der Q_1 elementweise festläßt, so ist $\varepsilon\bar{\varepsilon}$ eine Einheit in Q_1, hat also wegen der obigen Normierungen die Gestalt

$$\varepsilon\bar{\varepsilon} = \varepsilon_1^a, \tag{2}$$

wobei a eine natürliche Zahl ist. Andererseits ist ε_1 Einheit auch in B und hat daher die Form

$$\varepsilon_1 = i^b \varepsilon^c, \tag{3}$$

wobei b zunächst $\bmod 4$ bestimmt ist, aber $\bmod c$ noch abgeändert werden kann, indem man ε mit einer beliebigen Potenz von i multipliziert. Es folgt jetzt $\varepsilon\bar{\varepsilon} = i^{ab}\varepsilon^{ac}$ und daraus durch Übergang zu den absoluten Beträgen

$$ac = 2. \tag{4}$$

Da also $c|2$ und b insgesamt mod $(4, c)$ bestimmt ist, kommt es bei b schließlich nur auf die Restklasse mod c an. Ist nun $a = 1$, so ist $c = 2$, und von den beiden nur in Betracht zu ziehenden Fällen $b = 0$ oder 1 scheidet der erste aus, weil sonst wegen $\varepsilon_1 = \varepsilon^2$ der Körper B von ε über Q_1 erzeugt würde und daher reell wäre. Hier ist also $\varepsilon_1 = i\varepsilon^2$. Bedeutet "$'$" den Automorphismus von B, der i festläßt, so ist $\varepsilon_1\varepsilon_1' = i\varepsilon^2\cdot i\varepsilon'^2$. Andererseits ist $\varepsilon_1' = \varepsilon'\varepsilon^{-1} > 0$, also $\varepsilon_1\varepsilon_1' = 1$ und damit schließlich $\varepsilon^2\varepsilon'^2 = -1$, also $\varepsilon\varepsilon' = \pm i$.

Ist dagegen $a = 2$, so ist $c = 1$, und b kann gleich 0 gewählt werden. Also ist $\varepsilon_1 = \varepsilon$ und damit $\varepsilon\varepsilon' = \pm 1$.

Die Formel (1) geht nun über in

$$h = \frac{h_1 h_2}{a}, \tag{5}$$

und damit haben wir das Hilbertsche Kriterium: Ist $\varepsilon\varepsilon' = \pm i$, so ist $h = h_1 h_2$, und ist $\varepsilon\varepsilon' = \pm 1$, so ist $h = h_1 h_2/2$. Ausserdem hat sich nebenbei ergeben: Ist $\varepsilon\varepsilon' = \pm i$, so ist $\varepsilon_1\varepsilon_1' = 1$.

2. Der ungerade Bestandteil der Klassengruppe. Setzt man allgemeiner als bisher voraus, daß der Körper B ein beliebiger absolut abelscher Körper vom Typ $(2, 2)$ ist, so läßt sich aus der Produktdarstellung der Dedekindschen ζ-Funktionen und aus der Führer-Diskriminanten-Formel für B und für seine drei quadratischen Teilkörper Q_1, Q_2, Q_3 mit den Diskriminanten D_1, D_2, D_3 und den Klassenzahlen h_1, h_2, h_3 der Satz herleiten, daß sich die Klassenzahl h von B nur um eine Potenz von 2 von dem Produkt $h_1 h_2 h_3$ unterscheidet, wobei man im Falle, daß der Körper B reell ist, ein Ergebnis von Amberg (vergleiche etwa l.c. [2]) heranzuziehen hat, nach dem sich der Regulator von B auch nur um eine Potenz von 2 vom Produkt $\ln\varepsilon_1\cdot\ln\varepsilon_2\cdot\ln\varepsilon_3$ unterscheidet, wobei die $\varepsilon_\varkappa$ die Grundeinheiten mit $\varepsilon_\varkappa > 1$ von $Q_\varkappa$ sind.

Dieses Ergebnis kann man leicht dadurch erhalten, daß man einerseits diese Grundeinheiten durch ein System von Grundeinheiten η_1, η_2, η_3 von B (gegebenenfalls noch mit geeigneten Einheitswurzeln multipliziert) darstellt, andererseits die Relativnormen der $\eta_\varkappa$ bezüglich Q_λ $(\varkappa, \lambda = 1, 2, 3)$ als Potenzen von ε_λ schreibt und auf die dabei auftretenden Matrizen von Exponenten den Multiplikationssatz der Determinanten anwendet.

Ist $\hat{h}$ der größte ungerade Teiler von h, so folgt jetzt $\hat{h} = \hat{h}_1\hat{h}_2\hat{h}_3$. Es sei nun $\mathfrak{a}$ ein Ideal von B, dessen Klasse eine ungerade Ordnung u hat, $\mathfrak{a}^u \sim (1)$. Dann ist, wenn "$'$" und "$\bar{\ }$" die Automorphismen von B bezeichnen, die Q_1' bzw. Q_2 elementweise ungeändert lassen,

$$\mathfrak{a}^2 N(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}\mathfrak{a}'\cdot\mathfrak{a}\bar{\mathfrak{a}}\cdot\mathfrak{a}\bar{\mathfrak{a}}'.$$

Daher ist $\mathfrak{a}^2 \sim \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3$, wobei jedes $\mathfrak{b}_\varkappa$ ein Ideal aus $Q_\varkappa$ ist, z.B. $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{a}\mathfrak{a}'$. Daher ist

$$\mathfrak{a} \sim \mathfrak{a}^{2^{\frac{u+1}{2}}} \sim (\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3)^{\frac{u+1}{2}},$$

also läßt sich jede Idealklasse ungerader Ordnungen von B durch ein Produkt von Idealen aus Q_1, Q_2, Q_3 darstellen, die in ihren Körpern auch von ungerader Ordnung sind; denn es ist z.B., wenn $\mathfrak{a}^u = (\alpha)$, $(\mathfrak{a}\mathfrak{a}')^u = (\alpha\alpha')$, d.h., $(\mathfrak{a}\mathfrak{a}')^u$ ist Hauptideal schon in Q_1. Nimmt man für die Klasse von $\mathfrak{a}$ einen anderen Repräsentanten, so ändert sich $\mathfrak{b}_\varkappa^{(u+1)/2}$ offenbar nur um einen Hauptidealfaktor aus $Q_\varkappa$. Daraus folgt nun, daß die Gruppe $\mathfrak{A}$ der Idealklassen ungerader Ordnungen von B sich aus Idealklassen ungerader Ordnungen von Q_1, Q_2, Q_3 (genauer gesagt, aus den diesen Klassen entsprechenden Klassen von B) erzeugen läßt. Bestünde nun zwischen diesen Klassen eine echte Relation, so würden sie eine Gruppe erzeugen, deren Ordnung kleiner als $\hat{h}_1\hat{h}_2\hat{h}_3$ wäre, was im Widerspruch zu $\hat{h} = \hat{h}_1\hat{h}_2\hat{h}_3$ stehen würde. Also ist $\mathfrak{A}$ das direkte Produkt der ungeraden Bestandteile der Idealklassen von Q_1, Q_2 und Q_3. (Vergleiche dazu auch H.-W. Leopoldt [4].)

3. Die 2-Klassengruppe. Wir betrachten hier wieder nur den Dirichletschen Fall, in dem B die drei quadratischen Teilkörper $Q_0 = Q(i)$, $Q_1 = Q(\sqrt{D_1})$ und $Q_2 = Q(i\sqrt{D_1})$ ist mit $D_1 > 0$, und zwar beschränken wir uns auf die beiden Fälle, daß D_1 oder D_2 eine ungerade Primdiskriminante ist, daß also $D_1 = p \equiv 1 \pmod 4$ bzw. $D_1 = 4p \equiv 12 \pmod{16}$ ist. Im ersten Fall mit $D_1 = p$ ist nach einem Gaußschen Satz $\varepsilon_1\varepsilon_1' = -1$ und $2 \nmid h_1$, aber $2 \mid h_2$, und die 2-Klassengruppe von Q_2 ist zyklisch. Auf Grund der einfachsten Eigenschaften der Trägheitsgruppe ist B/Q_2 unverzweigt, und daher liegt B im absoluten 2-Klassenkörper von Q_2. Da $\varepsilon_1\varepsilon_1' = -1$, kann, wie im 1. Abschnitt gezeigt, a nicht gleich 1 sein, und daher ist $a = 2$. Hieraus folgt $h = h_1h_2/2$, und daraus ergibt sich, daß der 2-Klassenkörper von B einen halb so grossen Grad hat. Andererseits umfaßt er nach obiger Betrachtung den 2-Klassenkörper von Q_2 und hat den gleichen Grad über B wie dieser. Also fallen beide 2-Klassenkörper miteinander zusammen, und damit ist die Struktur der 2-Klassengruppe von B bekannt: Sie ist zyklisch von halb so großer Ordnung wie die 2-Klassengruppe von Q_2.

Im 2. Fall $D_1 = 4p$ ist $D_2 = -p$ eine Primdiskriminante. Daher ist hier $2 \nmid h_2$. Wegen $p \equiv 3 \pmod 4$ ist $\varepsilon_1\varepsilon_1' = 1$, also ist die im engeren Sinne genommene Klassenzahl von Q_1 gleich $2h_2$. Jedoch ist sie nach dem Kriterium von Rédei [5] nicht durch 4 teilbar, da die im wesentlichen einzige echte D-Zerfällung $D_1 = (-4)(-p)$ nicht von zweiter Art ist, was schon daraus folgt, daß die beiden Faktoren -4 und $-p$ negativ

sind. Also ist h_1 selbst ungerade, und die Gleichung $h = h_1h_2/a$, in der a nur 1 oder 2 sein kann, ist nur möglich, wenn $a = 1$ ist. Daraus folgt, daß die Klassenzahl h in diesem Fall ungerade ist, und außerdem hat sich nebenbei noch ergeben (vergleiche Abschnitt 1), daß $\varepsilon\bar{\varepsilon} = \varepsilon_1$, $\varepsilon_1 = i\varepsilon^2$ und $\varepsilon\varepsilon' = \pm i$ ist.

Literaturverzeichnis

[1] Dirichlet, *Recherches sur les formes quadratiques à coefficients et à indéterminées complexes*, Journ. Reine Angew. Math. 24 (1842), S. 291–371, oder *Werke*, Bd. I, S. 533–618.

[2] H. Hasse, *Über die Klassenzahl abelscher Zahlkörper*, Berlin 1952. Hier sind hauptsächlich im Abschnitt 26 die soeben skizzierten Betrachtungen ausführlich dargestellt.

[3] D. Hilbert, *Über den Dirichletschen biquadratischen Zahlkörper*, Math. Ann. 45 (1894), S. 309–340, oder *Ges. Werke*, Bd. I, S. 24–52.

[4] H.-W. Leopoldt, *Zur Arithmetik in abelschen Zahlkörpern*, Journ. Reine Angew. Math. 209 (1962), S. 54–71.

[5] L. Rédei und H. Reichardt, *Die Anzahl der durch 4 teilbaren Invarianten der Klassengruppe eines beliebigen quadratischen Zahlkörpers*, Journ. Reine Angew. Math. 170 (1934), S. 69–74.

DEUTSCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
zu Berlin
INSTITUTSKOMPLEX MATHEMATIK
INSTITUT FÜR REINE MATHEMATIK

Eingegangen 2. 8. 1971 (192)