ACTA ARITHMETICA
XXI (1972)

Об одной линейной форме

Н. И. Фельдман (Москва)

В теории трансцендентных чисел и ее приложениях важную роль играют оценки снизу для модулей линейных форм

$$x_1\omega_1+\ldots+x_m\omega_m,$$

где x_i — целые рациональные. Оценки обычно получаются в виде функции от $X=\max|x_k|$. Рассматривают также и формы с алгебраическими коэффициентами, выражая оценивающую функцию через максимум высот коэффициентов. Лишь в очень немногих случаях удается получить оценки, зависящие от границ для каждого из x_k — для трансцендентных ω_k автору известны лишь работы [1] и [2]. В настоящей работе подобная оценка получена для линейной формы от чисел, являющихся в свою очередь линейными комбинациями логарифмов некоторых алгебраических чисел.

Лемма 1. *Пусть $\lambda_1,\ldots,\lambda_N$ — различные числа, отличные от $0,-1,-2,\ldots,-N+1$,*

$$\delta=\delta(\lambda_1,\ldots,\lambda_N)=\begin{vmatrix}\frac{1}{\lambda_1} & \ldots & \frac{1}{\lambda_N}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \frac{1}{\lambda_1+N-1} & \ldots & \frac{1}{\lambda_N+N-1}\end{vmatrix}, \tag{1}$$

$\delta_{\sigma,\varkappa}$ — алгебраическое дополнение элемента $\dfrac{1}{\lambda_\sigma+\varkappa}$. Тогда $\delta\neq 0$ и

$$\frac{\delta_{\sigma,\varkappa}}{\delta}=\frac{(-1)^\varkappa}{\varkappa!(N-1-\varkappa)!}\prod_{\nu=0}^{N-1}(\lambda_\sigma+\nu)\cdot\prod_{\substack{s=1\\ s\neq\sigma}}^{N}\frac{\lambda_s+\varkappa}{\lambda_s-\lambda_\sigma}. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть $\delta_\sigma(z)$ — определитель, получающийся из δ заменой λ_σ на z. Тогда

$$\delta_\sigma(z)=\sum_{t=0}^{N-1}\frac{\delta_{\sigma,t}}{z+t}=\frac{P_\sigma(z)}{z(z+1)\ldots(z+N-1)}.$$

Очевидно, $P_\sigma(z)$ — многочлен степени $N-1$, причем $P_\sigma(\lambda_k)=0$, $k\neq\sigma$, поэтому, учитывая, что $\delta_\sigma(\lambda_\sigma)=\delta$, имеем

$$\delta_\sigma(z)=\delta\prod_{\nu=0}^{N-1}\frac{\lambda_\sigma+\nu}{z+\nu}\cdot\prod_{\substack{s=1\\ s\neq\sigma}}^{N}\frac{z-\lambda_s}{\lambda_\sigma-\lambda_s}. \tag{3}$$

Заметим, что если $\delta=0$, то $\delta_\sigma(z)\equiv 0$, а тогда и $\delta_{\sigma,N-1}=$ $=\pm\delta(\lambda_1,\ldots,\lambda_{\sigma-1},\lambda_{\sigma+1},\ldots,\lambda_N)=0$. Так как $\delta(\lambda_1)=1/\lambda_1\neq 0$, то по индукции получаем, что $\delta\neq 0$. Равенство (2) выводим из (3), так как

$$\delta_{\sigma,\varkappa}=\lim_{z\to-\varkappa}[\delta_\sigma(z)(z+\varkappa)].$$

В дальнейшем числа $a_1,\ldots,a_m$ — рациональные, отличные от $0,-1,-2,\ldots$ и несравнимые по модулю 1. Положим

$$f_a(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n+a},\qquad |z|<1. \tag{4}$$

Лемма 2. *Пусть* $n_1,\ldots,n_m$ — *любые натуральные*,

$$n=\max_{1\leqslant k\leqslant m}n_k,\qquad N=n_1+\ldots+n_m,\qquad n_0=n, \tag{5}$$

$$\varphi_0(z)=1,\qquad \varphi_k(z)=f_{a_k}(z),\qquad k=1,\ldots,m, \tag{6}$$

$$\begin{gathered}B_{0,n}=-1,\qquad B_{0,n+1}=\ldots=B_{0,n+N-1}=0,\\ B_{t,n}=0,\ B_{t,u}=\frac{-1}{u-n+a_t};\quad t=1,\ldots,m,\ u=n+1,\ldots,n+N-1,\end{gathered} \tag{7}$$

$$\begin{gathered}a_{t,k,\tau}=\sum_{u=n}^{n+N-1}B_{t,u}\frac{(-1)^{u-n}}{(u-n)!(N-1-u+n)!}\prod_{\nu=0}^{N-1}(a_k+n-\tau+\nu)\times\\ \times\prod_{\varkappa\neq k}\prod_{i=1}^{n_\varkappa}\frac{u-n+i+a_\varkappa}{\tau-n+a_\varkappa-a_k+i}\cdot\prod_{\substack{j=1\\ j\neq n-\tau}}^{n_k}\frac{u-n+j+a_k}{\tau-n+j},\\ t=0,1,\ldots,m;\ k=1,\ldots,m;\ \tau=n-n_k,\ldots,n-1,\end{gathered} \tag{8}$$

и

$$\begin{gathered}a_{t,0,\tau}=B_{t,\tau}-\sum_{k=1}^{m}\left\{\frac{a_{t,k,\tau}}{a_k}+\frac{a_{t,k,\tau-1}}{1+a_k}+\ldots+\frac{a_{t,k,n-n_k}}{\tau-n+n_k+a_k}\right\},\\ t=0,1,\ldots,m;\ \tau=0,1,\ldots,n-1,\end{gathered} \tag{9}$$

где фигурная скобка равна нулю, если $\tau<n-n_k$.

Тогда для $|z|<1$

$$\begin{gathered}L_t(z)=\sum_{k=0}^{m}P_{t,k}(z)\varphi_k(z)=\sum_{u=n+N}^{\infty}A_{t,u}z^u,\qquad P_{t,k}(z)=\sum_{\tau=n-n_k}^{n-1}a_{t,k,\tau}z^\tau+\delta_{t,k}z^n,\\ t=0,1,\ldots,m,\qquad \delta_{t,k}=\begin{cases}1, & t=k,\\ 0, & t\neq k.\end{cases}\end{gathered} \tag{10}$$

Доказательство. Из (5), (6) и (10) получаем

$$L_t(z)=\sum_{u=0}^{\infty}A_{t,u}z^u,\qquad |z|<1,$$

$$\begin{gathered}A_{t,u}=\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{a_{t,k,n-1}}{u+1-n+a_k}+\ldots+\frac{a_{t,k,n-n_k}}{u+n_k-n+a_k}\right)-B_{t,u},\\ u=n,\ n+1,\ldots\end{gathered} \tag{11}$$

Для каждого $t=0,1,\ldots,m$ рассмотрим систему уравнений

$$A_{t,n}=A_{t,n+1}=\ldots=A_{t,n+N-1}=0.$$

Из леммы 1 при

$$\begin{array}{llll}\lambda_1=1+a_1, & \lambda_2=2+a_1, & \ldots, & \lambda_{n_1}=n_1+a_1,\\ \lambda_{n_1+1}=1+a_2, & \lambda_{n_1+2}=2+a_2, & \ldots, & \lambda_{n_1+n_2}=n_2+a_2,\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \lambda_{N-n_m+1}=1+a_m, & \lambda_{N-n_m+2}=2+a_m, & \ldots, & \lambda_N=n_m+a_m\end{array}$$

получаем, что решением такой системы является набор величин (8). Далее,

$$\begin{gathered}A_{t,u}=a_{t,0,u}+\sum_{k=1}^{m}\left\{\frac{a_{t,k,u}}{a_k}+\frac{a_{t,k,u-1}}{1+a_k}+\ldots+\frac{a_{t,k,n-n_k}}{u-n+n_k+a_k}\right\}-B_{t,u},\\ u=0,1,\ldots,n-1,\end{gathered}$$

(если $u<n-n_k$, то фигурная скобка, соответствующая такому k, считается равной нулю), поэтому при $a_{t,0,\tau}$, $\tau=0,1,\ldots,n-1$, определенных формулой (9), будут выполняться равенства $A_0=A_1=\ldots$ $\ldots=A_{n-1}$. Лемма доказана.

В дальнейшем символами $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\ldots$ будем обозначать положительные величины, зависящие только от $a_1,\ldots,a_m$.

Лемма 3. *Существуют такие $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ и γ_4, что для всех чисел $a_{t,k,\tau}$, определенных равенствами* (8) *и* (9), *будут выполняться условия*

1) $|a_{t,k,\tau}| < e^{\gamma_1 N}$,

2) *числа* $a_{t,k,\tau} e^{\gamma_2 N} \prod\limits_{p \leqslant \gamma_3 N} p^{\gamma_4 \left[\frac{\ln(\gamma_3 N)}{\ln p}\right]}$, p — *простые, будут целыми, рациональными.*

Доказательство. Пусть $a_k = \dfrac{p_k}{q_k}$, $(p_k, q_k) = 1$, $q_k > 0$, p_k — целые, $a_k - a_l = \dfrac{p_{k,l}}{q_{k,l}}$, $(p_{k,l}, q_{k,l}) = 1$, $q_{k,l} > 0$ и $p_{k,l}$ — целые. Из (8) получаем, что

$$a_{t,k,\tau} = \sum_{u=n}^{n+N-1} B_{t,u} \frac{(-1)^{u+n}}{(u-n)!(N-1-u+n)!} \prod_{\nu=0}^{N-1} \frac{p_k + q_k(n-\tau+\nu)}{q_k} \times \tag{12}$$

$$\times \prod_{\substack{\varkappa=1 \\ \varkappa \neq k}}^{m} \prod_{i=1}^{n_\varkappa} \left\{ \frac{p_\varkappa + q_\varkappa(u-n+1)}{p_{\varkappa,k} + q_{\varkappa,k}(\tau-n+1)} \frac{q_{\varkappa,k}}{q_\varkappa} \right\} \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq n-\tau}}^{n_k} \frac{p_k + q_k(u-n+j)}{q_k(\tau-n+j)} =$$

$$= \sum_{u=n}^{n+N-1} (-1)^{n+u} B_{t,u} C_{t,k,\tau,u},$$

$$t = 0, 1, \ldots, m; \; k = 1, \ldots, m; \; \tau = n-n_k, \ldots, n-1.$$

Пусть $\mathscr{P}$ — произведение всех простых чисел, входящих в $q_1, \ldots, q_m$. Для каждого набора t, k, τ, u рациональное число $C_{t,k,\tau,u} = C$ представим в виде

$$C = \frac{E}{F} \cdot \frac{D}{G}, \quad E = E_1 E_2, \quad F = F_1 F_2, \quad D = \prod_{\varkappa \neq k} q^{n_\varkappa}, \quad G = q_k^{N+n_k} \prod_{\varkappa \neq k} q_\varkappa^{n_\varkappa},$$

E, E_1, E_2, F, F_1, F_2 — целые, $(E, F) = 1$, в состав E_1 и E_2 входят только те простые, которые делят $\mathscr{P}$, а $(E_2, \mathscr{P}) = (F_2, \mathscr{P}) = 1$.

Пусть p входит в $\mathscr{P}$. Тогда в E и F оно входит в степенях, не превосходящих

$$\left[\frac{N}{p}\right] + \left[\frac{N}{p^2}\right] + \ldots + \frac{\ln(\gamma_5 N)}{\ln p} + \sum_{\varkappa=1}^{m} \left(\left[\frac{n_\varkappa}{p}\right] + \left[\frac{n_\varkappa}{p^2}\right] + \ldots + \frac{\ln(\gamma_5 N)}{\ln p} \right) \leqslant \gamma_6 N,$$

а в D и G — в степенях, не превосходящих $\gamma_7 N$. Таким образом числа DE_1 и GF_1 являются делителями числа

$$\prod_{p | \mathscr{P}} p^{(\gamma_6 + \gamma_7) N} = \gamma_8^N. \tag{13}$$

Пусть теперь $(p, \mathscr{P}) = 1$. Такое p не может быть делителем D, G, E_1 и F_1. Очевидно, достаточно рассмотреть лишь $p \leqslant \gamma_9 N$. Подсчитаем степени λ_p и μ_p, в которых p входит в E_2 и F_2. Пусть $\delta_p = \delta = \left[\dfrac{\ln(\gamma_9 N)}{\ln p}\right]$. Тогда

$$\lambda_p = \left[\frac{N}{p}\right] + \ldots + \left[\frac{N}{p^\delta}\right] + \delta\theta_0 + \sum_{\varkappa=1}^{m} \left\{ \left[\frac{n_\varkappa}{p}\right] + \ldots + \left[\frac{n_\varkappa}{p^\delta}\right] + \delta\theta_\varkappa \right\},$$

$$\mu_p = \left[\frac{u-n}{p}\right] + \ldots + \left[\frac{u-n}{p^\delta}\right] + \delta\eta' + \left[\frac{N-1-u+n}{p}\right] + \ldots +$$

$$+ \left[\frac{N-1-u+n}{p^\delta}\right] + \delta\eta'' + \sum_{\varkappa=1}^{m} \left\{ \left[\frac{n_\varkappa}{p}\right] + \ldots + \left[\frac{n_\varkappa}{p^\delta}\right] + \delta\eta_\varkappa \right\},$$

$$0 \leqslant \theta_0, \theta_\varkappa, \eta', \eta'', \eta_\varkappa \leqslant 1, \quad \varkappa \neq k, \quad |\theta_\varkappa|, |\eta_\varkappa| \leqslant 1,$$

(границы для θ_k и η_k подиктованы условием $j \neq n-\tau$). Отсюда

$$|\lambda_p - \mu_p| \leqslant \frac{1}{p-1} + 2\delta(m+1) \leqslant \gamma_{10} \frac{\ln(\gamma_9 N)}{\ln p}. \tag{14}$$

Теперь, из (7), (8), (9), (13) и (14) и асимптотического закона распределения простых чисел получаем неравенство

$$|a_{t,k,\tau}| \leqslant \gamma_{11} N m \max |C_{t,u,k,\tau}| \leqslant \gamma_{11} N m \gamma_8^N \prod_{p \leqslant \gamma_9 N} p^{\gamma_{10} \frac{\ln(\gamma_9 N)}{\ln p}} \leqslant e^{\gamma_1 N}.$$

Для доказательства второго утверждения леммы заметим, что при $t > 0$, $u \neq n$, имеем $B_{t,u} = -q_t \{p_t + (u-n) q_t\}^{-1}$, и, как хорошо известно, общее наименьшее кратное знаменателей всех $B_{t,u}$ не превосходит $\exp(\gamma_{12} N)$. Это относится и к о.н.к. знаменателей в (9). Отсюда и из (8), (13) и (14) получаем требуемое.

Лемма 4. *Функции $L_t(z)$, рассмотренные в лемме 2, удовлетворяют неравенству*

$$|L_t(z)| \leqslant (\gamma_{13} |z|)^{N+n} \frac{1}{1-|z|}, \quad |z| < 1, \quad t = 0, 1, \ldots, m. \tag{15}$$

Доказательство. Воспользуемся (7), (10), (11) и леммой 3. Имеем

$$|L_t(z)| \leqslant \sum_{u=n+N}^{\infty} |z|^u (N e^{\gamma_1 N} + 1) = (N e^{\gamma_1 N} + 1) \sum_{u=n+N}^{\infty} |z|^u \leqslant (\gamma_{13} |z|)^{N+n} \frac{1}{1-|z|}.$$

Лемма 5. *Если $z \neq 0$, то определитель*

$$\Delta(z) = \begin{vmatrix} P_{0,0}(z) & \dots & P_{0,m}(z) \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ P_{m,0}(z) & \dots & P_{m,m}(z) \end{vmatrix} \neq 0. \tag{16}$$

Доказательство. Как видно из (10) многочлены $P_{0,0}(z), P_{1,1}(z), \dots, P_{m,m}(z)$ имеют степень n (причем коэффициенты при z^n равны единице), а степени многочленов $P_{h,k}(z)$, $h \neq k$, не превосходят $n-1$, поэтому $\Delta(z)$ — многочлен степени $(m+1)n$ и его старший коэффициент равен единице. Прибавим к первому столбцу определителя остальные, умножив предварительно s-й столбец на $\varphi_{s-1}(z)$, $s = 2, 3, \dots, m+1$ и разложим определитель по элементам первого столбца. Тогда

$$\Delta(z) = \sum_{t=0}^{m} L_t(z)\Delta_t(z), \tag{17}$$

где $\Delta_t(z)$ — алгебраические дополнения элементов первого столбца определителя $\Delta(z)$. Так как вследствие (10) $L_t(z)$ делится на z^{n+N}, а $P_{t,k}(z)$ делится на z^{n-n_k}, то из (16) и (17) получаем, что $\Delta(z)$ делится на

$$z^{n+N}z^{n-n_1}z^{n-n_2}\dots z^{n-n_m} = z^{(m+1)n}.$$

Таким образом $\Delta(z)$ совпадает со своим старшим членом, т.е. $\Delta(z) = z^{(m+1)n}$. Лемма доказана.

Теорема. *Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ отличные от $0, -1, -2, \dots$ рациональные числа, несравнимые по $\operatorname{mod} 1$, $\varepsilon > 0$, K — мнимое квадратичное поле. Существует такая постоянная $\gamma \geqslant 1$, зависящая лишь от $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, ε, что если a и b — целые числа поля K, удовлетворяющие условию*

$$\gamma|a|^{m+1} < |b|^{\frac{\varepsilon}{m+1+m\varepsilon}}, \tag{18}$$

то для любых целых чисел $x_0, x_1, \dots, x_m$ поля K, удовлетворяющих условию

$$|x_1 \dots x_m| = X \geqslant X_0 > 0, \tag{19}$$

где эффективная постоянная X_0 зависит лишь от $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, ε, a и b, справедливо неравенство

$$|x_0 + x_1\beta_1 + \dots + x_m\beta_m| > X^{-1-\varepsilon}, \quad \beta_k = f_{\alpha_k}(a/b). \tag{20}$$

Доказательство. Положим

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{m+1}, \quad n_k = \left[\frac{\ln(|x_k|X^{\varepsilon_1})}{\ln b}\right]. \tag{21}$$

Учитывая (5) и (19) отсюда получаем неравенства

$$|x_k|X^{\varepsilon_1}|b|^{-1} \leqslant |b|^{n_k} \leqslant |x_k|X^{\varepsilon_1}; \quad |b|^N \leqslant X^{1+m\varepsilon_1}; \quad |x_k| \leqslant |b|^{n_k+1-\frac{N\varepsilon_1}{1+m\varepsilon_1}}. \tag{22}$$

Очевидно, что вследствие (18) имеем неравенство $|a| < |b|$, поэтому ряды $L_t(a/b)$, определенные в лемме 2, сходятся. Суммы этих рядов при $t = 0, 1, \dots, m$ образуют систему линейных форм относительно чисел $1, \beta_1, \dots, \beta_m$. По лемме 5 эта система форм линейно независимая, следовательно можно выбрать m форм системы (пусть это $L_1(a/b), \dots, L_m(a/b)$), образующих линейно независимую систему с формой

$$l = x_0 + x_1\beta_1 + \dots + x_m\beta_m.$$

Тогда определитель

$$D = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_m \\ P_{1,0}(a/b) & P_{1,1}(a/b) & \dots & P_{1,m}(a/b) \\ \cdot & \cdots & \cdots & \cdot \\ P_{m,0}(a/b) & P_{m,1}(a/b) & \dots & P_{m,m}(a/b) \end{vmatrix} \tag{23}$$

не равен нулю. Из (10) и леммы 3 получаем, что

$$Db^{mn}e^{\gamma_2 mN}\prod_{p \leqslant \gamma_3 N} p^{\gamma_4 m\cdot\left[\frac{\ln(\gamma_3 N)}{\ln p}\right]}$$

целое число поля K следовательно его модуль не меньше единицы. Теперь из асимптотического закона распределения простых получаем неравенство

$$|D| \geqslant b^{-mn}e^{-\gamma_{14}N}. \tag{24}$$

Пусть $D_0, \dots, D_m$ — алгебраические дополнения элементов первого столбца определителя (23). Из (10), (23) и леммы 3 имеем

$$\begin{aligned} |D_0| &\leqslant m!\prod_{k=1}^{m}\max_{1\leqslant t\leqslant m}\left|P_{t,k}\left(\frac{a}{b}\right)\right| \leqslant \\ &\leqslant m!\prod_{k=1}^{m}\left\{(n_k+1)e^{\gamma_1 N}\left|\frac{a}{b}\right|^{n-n_k}\right\} \leqslant e^{\gamma_{15}N}|a|^{mn-N}|b|^{N-mn}, \\ |D_t| &\leqslant \sum_{k=1}^{m}|x_k|(m-1)!\prod_{\substack{r=1\\ r\neq k}}^{m}\max_{1\leqslant s\leqslant m}\left|P_{s,r}\left(\frac{a}{b}\right)\right| \leqslant \\ &\leqslant m!\max_{1\leqslant k\leqslant m}\left\{|x_k|\prod_{\substack{r=1\\ r\neq k}}^{m}\left((n_k+1)\,e^{\gamma_1 N}\left|\frac{a}{b}\right|^{n-n_r}\right)\right\}, \quad t = 1, \dots, m. \end{aligned} \tag{25}$$

Вследствие (22)

$$|x_k|\cdot\prod_{\substack{r=1\\ r\neq k}}^{m}|b|^{n_r-n} \leqslant |b|^{N-(m-1)n+1-N\varepsilon_1/(1+m\varepsilon_1)},$$

следовательно

$$|D_l| \leqslant e^{\gamma_{16}N} |a|^{mn-N} |b|^{N+n+1-mn-N\varepsilon_1/(1+m\varepsilon_1)}, \quad l = 1, \ldots, m. \tag{26}$$

Прибавим к первому столбцу определителя (23) остальные, умножив каждый из них на соответствующее β_k. Тогда первый столбец будет состоять из чисел l, $L_1(a/b), \ldots, L_m(a/b)$. Разложив полученный определитель по элементам первого столбца получим равенство

$$D = \sum_{l=1}^{m} D_l L_l\left(\frac{a}{b}\right) + lD_0.$$

Отсюда, вследствие (15), (24), (25) и (26) получаем неравенство

$$|b|^{-mn} e^{-\gamma_{14}N} \leqslant m e^{\gamma_{16}N} |a|^{mn-N} |b|^{N+n+1-mn-N\varepsilon_1/(1+m\varepsilon_1)} \gamma_{13}^{2N+n} \times$$
$$\times \left|\frac{a}{b}\right|^{N+n} \left|\frac{b}{b-a}\right| + |l| e^{\gamma_{15}N} \left|\frac{a}{b}\right|^{mn-N},$$

откуда

$$|l| e^{\gamma_{17}N} |a|^{mn-N} |b|^N \geqslant 1 - \frac{m|b|}{|b-a|} e^{\gamma_{18}N} |a|^{(m+1)n} |b|^{1-\frac{N\varepsilon_1}{1+m\varepsilon_1}}. \tag{27}$$

Пусть

$$\gamma = \max(2e^{\gamma_{17}}, e^{\gamma_{18}}). \tag{28}$$

Тогда, вследствие (18) и (21)

$$e^{\gamma_{18}} |a|^{m+1} |b|^{-\varepsilon_1/(1+m\varepsilon_1)} < 1,$$

и для достаточно больших N (т.е. для $X > X_0$), правая часть (27) будет больше 1/2, а

$$|l| > (2e^{\gamma_{17}N} |a|^{mn-N} |b|^N)^{-1}. \tag{29}$$

Вследствие (18), (21), (22) и (28)

$$2e^{\gamma_{17}N} |a|^{mn-N} |b|^N < (2e^{\gamma_{17}} |a|^{m-1} |b|)^N \leqslant$$
$$\leqslant (\gamma |a|^{m-1} |b|)^N < |b|^{\left(1+\frac{\varepsilon}{m+1+m\varepsilon}\right)N} < X^{(1+m\varepsilon_1)\left(1+\frac{\varepsilon}{m+1+m\varepsilon}\right)} = X^{1+\varepsilon}.$$

Доказательство теоремы завершим заменой правой части неравенства (29) меньшей величиной $X^{-1-\varepsilon}$.

Замечание 1. Пользуясь принципом Дирихле легко показать, что существует нетривиальный набор целых чисел поля K, удовлетворяющий неравенствам

$$|y_0 + y_1\beta_1 + \ldots + y_m\beta_m| < \gamma_0 X^{-1},$$
$$|y_k| + 1 \leqslant x_k, \quad k = 1, \ldots, m, \quad X = x_1 \ldots x_m.$$

Замечание 2. Пусть p и q — натуральные, $(p, q) = 1, p \leqslant q$, тогда

$$f_{p/q}(z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{q}{p+\mu q} z^{\mu} = \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu\equiv p \pmod q}}^{\infty} \frac{q}{\nu} z^{(\nu-p)/q} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} z^{(\nu-p)/q} \sum_{t=0}^{q-1} \varrho^{(\nu-p)t} =$$
$$= \sum_{t=0}^{q-1} \varrho^{-pt} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \varrho^{\nu t} z^{(\nu-p)/q} = -z^{-p/q} \sum_{t=0}^{q-1} \varrho^{-pt} \ln(1-\varrho^t z^{1/q}),$$
$$|z| < 1, \ \varrho = e^{2\pi i/q}.$$

Кроме того, имеем

$$f_{a+1}(z) = \frac{1}{z} f_a(z) - \frac{1}{az}.$$

Литература

[1] A. Baker, *On some diophantine inequalities involving the exponential function*, Canadian Journ. Math. 17 (4) (1965), стр. 616–626.

[2] Н. И. Фельдман, *Оценки снизу для некоторых линейных форм*, Вестн. МГУ (1), 2 (1967), стр. 63–72.

Получено 7. 8. 1971 (199)