4. Concluding remarks. It would be interesting to investigate the questions raised here for rings of analytic functions of several variables. For examples one could consider differential rings of functions $f(z_1, z_2, \ldots, z_k)$ finite dimensional over $\mathscr{L} = C[D_1, \ldots, D_k]$. It is clear that even for rings of entire functions the situation is more complicated since the product of solutions of linear differential equations with constant coefficients need not satisfy such an equation.

Reference

[1] A. Cayford and E. G. Straus, *Differential rings of entire functions* (to appear).

UNIVERSITY OF CALIFORNIA
Los Angeles, California

Received on 1. 8. 1971 (197)

ACTA ARITHMETICA
XXI (1972)

Sur les fonctions q-additives ou q-multiplicatives

par

HUBERT DELANGE (Paris)

Nous considérons ici des fonctions réelles ou complexes définies sur l'ensemble N des entiers $\geqslant 0$.

q étant un entier >1, nous disons que *la fonction f est q-additive si, quel que soit $r \geqslant 1$, on a*

$$f(aq^r+b) = f(aq^r)+f(b) \quad \textit{pour} \quad 1 \leqslant a \leqslant q-1 \;\; \textit{et} \;\; 0 \leqslant b < q^r\,(^1).$$

Ceci entraîne évidemment $f(0) = 0$. L'égalité a donc lieu aussi pour $a = 0$.

Un exemple simple de fonction q-additive est fourni par la fonction qui à l'entier $n \geqslant 0$ fait correspondre la somme des chiffres dans la représentation de n dans le système de numération à base q.

Nous disons que *f est q-multiplicative si l'on a $f(0) = 1$ et, quel que soit $r \geqslant 1$,*

(1) $$f(aq^r+b) = f(aq^r)f(b) \quad \textit{pour} \quad 1 \leqslant a \leqslant q-1 \;\; \textit{et} \;\; 0 \leqslant b < q^r.$$

Cette égalité a évidemment lieu aussi pour $a = 0$.

Une fonction q-additive, ou q-multiplicative, est complètement déterminée par ses valeurs pour tous les entiers de la forme aq^r, où $r \geqslant 0$ et $1 \leqslant a \leqslant q-1$, et celles-ci peuvent être égales à des nombres donnés arbitrairement.

En effet, en utilisant le système de numération à base q, on peut écrire, de façon unique,

$$n = \sum_{r=0}^{+\infty} e_r(n)q^r, \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant e_r(n) \leqslant q-1 \text{ pour tout } r \geqslant 0.$$

On a d'ailleurs $e_r(n) = 0$ pour $r > \log n/\log q$.

(1) Cette notion a été introduite par A. O. Gelfond (*Sur les nombres qui ont des propriétés additives et multiplicatives données*, Acta Arithmetica, 13, 1968, pp. 259–265).

Gelfond dit que f est "additive dans le système à base q".

On voit de suite que, si f est q-additive, on a

$$f(n) = \sum_{r=0}^{+\infty} f(e_r(n)q^r),$$

et, si f est q-multiplicative, on a la même formule avec le $\sum$ remplacé par $\prod$. De plus, ces formules permettent de définir une fonction q-additive et une fonction q-multiplicative prenant des valeurs choisies arbitrairement pour $n = aq^r$, avec $r \geqslant 0$ et $1 \leqslant a \leqslant q-1$.

Ceci est tout à fait analogue à la détermination d'une fonction arithmétique additive ou multiplicative, au sens ordinaire, par ses valeurs pour les puissances des nombres premiers.

On peut développer, pour la distribution des valeurs d'une fonction q-additive réelle, une théorie tout à fait semblable à celle de la distribution des valeurs d'une fonction arithmétique additive ordinaire.

Nous nous bornerons ici à établir le résultat correspondant au théorème classique d'Erdös et Wintner. Nous suivrons une méthode semblable à celle indiquée dans notre mémoire "Sur les fonctions arithmétiques multiplicatives". [2]

Nous donnerons d'abord quelques lemmes très simples, utiles pour la suite. Puis nous ferons une étude des fonctions q-multiplicatives de module $\leqslant 1$. Enfin, en utilisant les résultats concernant ces fonctions, nous obtiendrons une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction q-additive réelle possède une distribution limite.

1. Quelques lemmes.

1.1. LEMME 1. *Si* $|a_j| \leqslant 1$ *pour* $1 \leqslant j \leqslant k$ $(a_1, \ldots, a_k$ *complexes*), *on a*

$$|a_1 a_2 \ldots a_k - 1| \leqslant \sum_{j=1}^{k} |a_j - 1|.$$

Démonstration. Si $k \geqslant 2$, on a

$$a_1 a_2 \ldots a_k - 1 = (a_1 a_2 \ldots a_{k-1} - 1) a_k + a_k - 1,$$

d'où $|a_1 a_2 \ldots a_k - 1| \leqslant |a_1 a_2 \ldots a_{k-1} - 1| + |a_k - 1|$.

1.2. LEMME 2. *Si* $|z| \leqslant 1$, *on a* $|z-1|^2 \leqslant 2(1-\mathrm{Re}\, z)$.

Démonstration. Si $z = x+iy$, on a $|z-1|^2 = 1+x^2+y^2-2x \leqslant 2-2x$.

1.3. LEMME 3. *Si* $|z_j| \leqslant 1$ *pour* $1 \leqslant j \leqslant q-1$, *on a*

$$\left|\frac{1}{q}(1+z_1+\ldots+z_{q-1})\right| \leqslant 1 - \frac{1}{2q} \operatorname*{Max}_{1 \leqslant j \leqslant q-1} (1-\mathrm{Re}\, z_j).$$

[2] Annales Scient. de l'Ecole Norm. Sup. 3, 78, 1961, pp. 273-304.

Démonstration. On voit d'abord que, si $|z| \leqslant 1$, on a

$$|1+z| \leqslant 2 - \tfrac{1}{2}(1-\mathrm{Re}\, z).$$

En effet, en posant $z = x+iy$, on a

$$\begin{aligned} 4(2-|1+z|) \geqslant (2+|1+z|)(2-|1+z|) &= 4-|1+z|^2 \\ = 3-x^2-y^2-2x \geqslant 2-2x &= 2(1-x). \end{aligned}$$

Ceci dit, pour chaque $j \geqslant 1$ et $\leqslant q-1$, on a

$$|1+z_j| \leqslant 2 - \tfrac{1}{2}(1-\mathrm{Re}\, z_j) \quad \text{et} \quad \Big|\sum_{k \neq j} z_k\Big| \leqslant q-2,$$

d'où $|1+z_1+\ldots+z_{q-1}| \leqslant q - \frac{1}{2}(1-\mathrm{Re}\, z_j)$.

1.4. LEMME 4. *On a pour tout* u *réel et tout* k *entier* $\geqslant 1$

$$\left|e^{iu} - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(iu)^j}{j!}\right| \leqslant \frac{|u|^k}{k!}.$$

Démonstration. On peut évidemment se borner au cas où $u > 0$. Le résultat est vrai pour $k = 1$ car

$$|e^{iu} - 1| = \left|\int_0^u ie^{it}\, dt\right| \leqslant \int_0^u dt.$$

S'il est vrai pour $k = m \geqslant 1$, il l'est aussi pour $k = m+1$ car

$$e^{iu} - \sum_{j=0}^{m} \frac{(iu)^j}{j!} = \int_0^u i\left(e^{it} - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(it)^j}{j!}\right) dt.$$

1.5. LEMME 5. *On a pour tout* u *réel*

$$1-\cos u \leqslant \frac{u^2}{2} \quad \textit{et} \quad |\sin u - u| \leqslant \frac{|u|^3}{6}.$$

Démonstration. On a $\cos u - 1 = \mathrm{Re}(e^{iu}-1-iu)$ et $\sin u - u = \mathrm{Im}\left(e^{iu}-1-iu+\dfrac{u^2}{2}\right)$. On applique le Lemme 4 avec $k = 2$ et avec $k = 3$.

1.6. LEMME 6. *Soient* $u_0, u_1, u_r, \ldots$ *et* $v_0, v_1, \ldots, v_r, \ldots$ *des fonctions complexes définies sur un même ensemble* A.

B étant une partie non vide de A, on suppose que, pour tout $r \geqslant 0$ et tout $t \in B$,

$$|u_r(t)| \leqslant U_r \quad \textit{et} \quad |u_r(t) - v_r(t)| \leqslant V_r$$

où les U_r et les V_r sont des constantes positives telles que

$$\sum_{r=0}^{+\infty} U_r^2 < +\infty \quad \textit{et} \quad \sum_{r=0}^{+\infty} V_r < +\infty.$$

Alors le produit infini $\prod_{r=0}^{+\infty}\big(1+u_r(t)\big)\exp\big(-v_r(t)\big)$ *est uniformément convergent pour* $t\in B$.

Démonstration. Il existe $U>0$ tel que $U_r\leqslant U$ et $V_r\leqslant U$ pour tout $r\geqslant 0$. Comme $\frac{(1+u)e^{-u}-1}{u^2}$ et $\frac{e^u-1}{u}$ sont des fonctions entières de u, il existe $M>0$ tel que, pour $|u|\leqslant U$

$$|(1+u)e^{-u}-1|\leqslant M|u|^2 \quad \text{et} \quad |e^u-1|\leqslant M|u|.$$

Ceci dit, posons $\big(1+u_r(t)\big)\exp\big(-v_r(t)\big)=1+w_r(t)$. On a pour tout $r\geqslant 0$ et tout $t\in B$

$$w_r(t)=\Big(\big(1+u_r(t)\big)\exp\big(-u_r(t)\big)-1\Big)\exp\big(u_r(t)-v_r(t)\big)+ \\ +\exp\big(u_r(t)-v_r(t)\big)-1$$

et, comme $|u_r(t)|\leqslant U_r\leqslant U$ et $|u_r(t)-v_r(t)|\leqslant V_r\leqslant U$,

$$|w_r(t)|\leqslant M|u_r(t)|^2\exp\big(|u_r(t)-v_r(t)|\big)+M|u_r(t)-v_r(t)|\leqslant W_r,$$

où $W_r=Me^UU_r^2+MV_r$.

Comme $\sum_{r=0}^{+\infty}W_r<+\infty$, ceci montre que le produit infini $\prod_{r=0}^{+\infty}\big(1+w_r(t)\big)$ est uniformément convergent pour $t\in B$.

2. Etude des fonctions q-additives de module $\leqslant 1$. Dans tout ce qui suit, F est une fonction q-multiplicative satisfaisant à

$$|F(n)|\leqslant 1 \quad \text{pour tout } n\geqslant 0.$$

On a évidemment $1-\operatorname{Re}F(aq^r)\geqslant 0$ pour tout $r\geqslant 0$ et tout a satisfaisant à $1\leqslant a\leqslant q-1$.

Nous posons $\varepsilon_r=\operatorname*{Max}_{1\leqslant a\leqslant q-1}\big(1-\operatorname{Re}F(aq^r)\big)$.

Nous définissons une suite $\{\Pi_k\}$ par $\Pi_0=1$ et, pour $k\geqslant 1$,

$$\Pi_k=\prod_{r=0}^{k-1}\frac{1}{q}\Big(1+\sum_{a=1}^{q-1}F(aq^r)\Big)=\frac{1}{q^k}\prod_{r=0}^{k-1}\Big(1+\sum_{a=1}^{q-1}F(aq^r)\Big).$$

Il est clair que l'on a $|\Pi_k|\leqslant 1$ pour $k\geqslant 0$.

2.1. PROPOSITION 1[3]. *Pour tout* $k\geqslant 0$,

$$\sum_{n=0}^{q^k-1}F(n)=q^k\Pi_k.$$

[3] Il est clair que cette proposition est valable sans l'hypothèse que $|F(n)|\leqslant 1$ pour tout $n\geqslant 0$.

Démonstration. Récurrence sur k, en remarquant que, pour tout $k\geqslant 0$,

$$\sum_{n=0}^{q^{k+1}-1}F(n)=\sum_{a=0}^{q-1}\Big(\sum_{m=0}^{q^k-1}F(aq^k+m)\Big).$$

2.2. PROPOSITION 2. *On a pour tout* $n\geqslant 1$

$$\Big|\sum_{m=0}^{n-1}F(m)\Big|\leqslant\sum_{r=0}^{\nu}e_r(n)q^r|\Pi_r|, \quad \text{où} \quad \nu=\Big[\frac{\log n}{\log q}\Big].$$

Démonstration. Le résultat est trivial pour $n<q$.

En le supposant vrai pour $n<q^N$, avec $N>0$, on montre qu'il l'est encore pour $q^N\leqslant n<q^{N+1}$. Pour cela, on écrit $n=cq^N+b$, avec $c=e_N(n)$ et $b=\sum_{r=0}^{N-1}e_r(n)q^r$, puis

$$\sum_{m=0}^{n-1}F(m)=\sum_{a=0}^{c-1}\Big(\sum_{l=0}^{q^N-1}F(aq^N+l)\Big)+\sum_{l=0}^{b-1}F(cq^N+l),$$

et on tient compte de (1) et de la Proposition 1.

2.3. PROPOSITION 3. *Pour tout* $N\geqslant 0$ *et tout* $h\geqslant 1$

$$|\Pi_{N+h+1}-\Pi_{N+1}|\leqslant\frac{q-1}{q}\sqrt{2h}\Big(\sum_{r=N+1}^{N+h}\varepsilon_r\Big)^{1/2}.$$

Démonstration. On a

$$\Pi_{N+h+1}-\Pi_{N+1}=\Pi_{N+1}\Big(\prod_{r=N+1}^{N+h}\frac{1}{q}\Big(1+\sum_{a=1}^{q-1}F(aq^r)\Big)-1\Big),$$

d'où

$$|\Pi_{N+h+1}-\Pi_{N+1}|\leqslant\Big|\prod_{r=N+1}^{N+h}\frac{1}{q}\Big(1+\sum_{a=1}^{q-1}F(aq^r)\Big)-1\Big| \\ \leqslant\sum_{r=N+1}^{N+h}\Big|\frac{1}{q}\Big(1+\sum_{a=1}^{q-1}F(aq^r)\Big)-1\Big|,$$

d'après le Lemme 1.

Mais

$$\frac{1}{q}\Big(1+\sum_{a=1}^{q-1}F(aq^r)\Big)-1=\frac{1}{q}\sum_{a=1}^{q-1}\big(F(aq^r)-1\big).$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy–Schwarz, on en déduit

$$\left|\frac{1}{q}\Big(1+\sum_{a=1}^{q-1}F(aq^r)\Big)-1\right| \leqslant \frac{1}{q}(q-1)^{1/2}\Big(\sum_{a=1}^{q-1}|F(aq^r)-1|^2\Big)^{1/2}$$

$$\leqslant \frac{1}{q}(q-1)^{1/2}\Big(\sum_{a=1}^{q-1}2\big(1-\operatorname{Re}F(aq^r)\big)\Big)^{1/2}, \quad \text{d'après le Lemme 2,}$$

$$\leqslant \frac{1}{q}(q-1)^{1/2}\big(2(q-1)\varepsilon_r\big)^{1/2} = \frac{q-1}{q}\sqrt{2}\,\varepsilon_r^{1/2}.$$

On voit ainsi que

$$|\Pi_{N+h+1}-\Pi_{N+1}| \leqslant \frac{q-1}{q}\sqrt{2}\sum_{r=N+1}^{N+h}\varepsilon_r^{1/2} \leqslant \frac{q-1}{q}\sqrt{2h}\Big(\sum_{r=N+1}^{N+h}\varepsilon_r\Big)^{1/2}.$$

2.4. Introduisons maintenant, pour chaque $N \geqslant 0$, la fonction F_N définie par

$$F_N(n) = \prod_{r=0}^{N} F\big(e_r(n)q^r\big).$$

Il est clair que $|F_N(n)| \leqslant 1$ pour tout $n \geqslant 0$.

2.4.1. Proposition 4. *Si $n < q^{N+h+1}$ avec $h \geqslant 1$, on a*

$$|F(n)-F_N(n)| \leqslant \sqrt{2h}\Big(\sum_{r=N+1}^{N+h}\varepsilon_r\Big)^{1/2}.$$

Démonstration. Si $n < q^{N+1}$, on a $F_N(n) = F(n)$. Si $q^{N+1} \leqslant n < q^{N+h+1}$, on a

$$F(n) = F_N(n)\prod_{r=N+1}^{N+h}F\big(e_r(n)q^r\big),$$

d'où

$$|F(n)-F_N(n)| = |F_N(n)|\left|\prod_{r=N+1}^{N+h}F\big(e_r(n)q^r\big)-1\right|$$

$$\leqslant \sum_{r=N+1}^{N+h}\big|F\big(e_r(n)q^r\big)-1\big|, \quad \text{d'après le Lemme 1,}$$

$$\leqslant \sqrt{h}\Big(\sum_{r=N+1}^{N+h}\big|F\big(e_r(n)q^r\big)-1\big|^2\Big)^{1/2}$$

$$\leqslant \sqrt{2h}\Big(\sum_{r=N+1}^{N+h}\big(1-\operatorname{Re}F\big(e_r(n)q^r\big)\big)\Big)^{1/2}, \quad \text{d'après le Lemme 2,}$$

$$\leqslant \sqrt{2h}\Big(\sum_{r=N+1}^{N+h}\varepsilon_r\Big)^{1/2}.$$

2.4.2. Proposition 5. *Pour tout $n \geqslant 1$, on a*

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}F_N(m)-\Pi_{N+1}\right| < 2\frac{q^{N+1}}{n}.$$

Démonstration. Remarquons d'abord que, quel que soit $a \geqslant 0$, on a

$$F_N(aq^{N+1}+m) = F(m) \quad \text{lorsque} \quad 0 \leqslant m < q^{N+1},$$

car alors, pour $r \leqslant N$, $e_r(aq^{N+1}+m) = e_r(m)$.

Il en résulte que, pour tout $k \geqslant 1$,

$$\sum_{m=0}^{kq^{N+1}-1}F_N(m) = k\sum_{m=0}^{q^{N+1}-1}F(m) = kq^{N+1}\Pi_{N+1}$$

d'après la Proposition 1.

Ainsi, si $n = kq^{N+1}$, on a

$$\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}F_N(m)-\Pi_{N+1} = 0.$$

Si maintenant $kq^{N+1} < n < (k+1)q^{N+1}$, avec $k \geqslant 1$, on a

$$\sum_{m=0}^{n-1}F_N(m)-n\Pi_{N+1} = -(n-kq^{N+1})\Pi_{N+1}+\sum_{m=kq^{N+1}}^{n-1}F_N(m),$$

d'où

$$\left|\sum_{m=0}^{n-1}F_N(m)-n\Pi_{N+1}\right| \leqslant 2(n-kq^{N+1}) < 2q^{N+1}.$$

Enfin, l'inégalité à établir est évidente si $1 \leqslant n < q^{N+1}$ car on a toujours

$$\left|\sum_{m=0}^{n-1}F_N(m)-n\Pi_{N+1}\right| \leqslant 2n.$$

2.4.3. Proposition 6. *Quel que soit $h \geqslant 1$, on a pour tout $n \geqslant q^h$*

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}F(m)-\prod_{r\leqslant \log n/\log q}\frac{1}{q}\Big(1+\sum_{a=1}^{q-1}F(aq^r)\Big)\right| \leqslant \frac{2}{q^{h-1}}+2\sqrt{2h}\Big(\sum_{r=\nu-h+1}^{\nu}\varepsilon_r\Big)^{1/2},$$

où $\nu = [\log n/\log q]$.

Démonstration. Soit $N = \nu - h$ (donc $N \geqslant 0$).

On a $n \geqslant q^{N+h}$ et la Proposition 5 donne

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}F_N(m)-\Pi_{N+1}\right| \leqslant \frac{2}{q^{h-1}}. \tag{2}$$

La Proposition 3 donne

$$(3)\qquad |\Pi_{N+h+1}-\Pi_{N+1}| \leqslant \sqrt{2h}\Big(\sum_{r=N+1}^{N+h}\varepsilon_r\Big)^{1/2}.$$

D'autre part, puisque $n<q^{N+h+1}$, on a d'après la Proposition 4

$$|F(m)-F_N(m)| \leqslant \sqrt{2h}\Big(\sum_{r=N+1}^{N+h}\varepsilon_r\Big)^{1/2} \quad \text{pour} \quad 0\leqslant m\leqslant n-1,$$

et par suite

$$(4)\qquad \Big|\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}F(m)-\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}F_N(m)\Big| \leqslant \sqrt{2h}\Big(\sum_{r=N+1}^{N+h}\varepsilon_r\Big)^{1/2}.$$

Il résulte de (2), (3) et (4) que l'on a

$$\Big|\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}F(m)-\Pi_{N+h+1}\Big| \leqslant \frac{2}{q^{h-1}}+2\sqrt{2h}\Big(\sum_{r=N+1}^{N+h}\varepsilon_r\Big)^{1/2},$$

ce qui n'est autre que l'inégalité annoncée.

2.5. THÉORÈME 1[4]. *On a quand n tend vers $+\infty$*

$$\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}F(m)=\prod_{r\leqslant \log n/\log q}\frac{1}{q}\Big(1+\sum_{a=1}^{q-1}F(aq^r)\Big)+o(1).$$

Démonstration. Si l'on a $\sum_{r=0}^{+\infty}\varepsilon_r<+\infty$, le résultat est une conséquence immédiate de la Proposition 6, qui montre alors que, pour tout $h\geqslant 1$,

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\Big|\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}F(m)-\prod_{r\leqslant\log n/\log q}\frac{1}{q}\Big(1+\sum_{a=1}^{q-1}F(aq^r)\Big)\Big|\leqslant\frac{2}{q^{h-1}}.$$

Il reste donc à traiter le cas où $\sum_{r=0}^{+\infty}\varepsilon_r=+\infty$.

Remarquons d'abord que, d'après le Lemme 3, on a pour chaque $r\geqslant 0$

$$\Big|\frac{1}{q}\Big(1+\sum_{a=1}^{q-1}F(aq^r)\Big)\Big|\leqslant 1-\frac{\varepsilon_r}{2q}\leqslant \exp\Big(-\frac{\varepsilon_r}{2q}\Big).$$

[4] Ce théorème est analogue au Théorème 2 de notre article "On a class of multiplicative arithmetical functions" (Scripta Mathematica, 26, 1961, pp. 121–141).

Il en résulte que, pour chaque $k\geqslant 1$,

$$(5)\qquad |\Pi_k|\leqslant \exp\Big(-\frac{1}{2q}\sum_{r=0}^{k-1}\varepsilon_r\Big).$$

L'hypothèse que $\sum_{r=0}^{+\infty}\varepsilon_r=+\infty$ entraîne donc que la suite $\{\Pi_k\}$ tend vers zéro.

Nous devons donc montrer que, dans ce cas, $\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}F(m)$ tend vers zéro quand n tend vers $+\infty$.

Etant donné $\varepsilon>0$ quelconque, il existe K entier >0 tel que $|\Pi_k|\leqslant\varepsilon$ pour $k\geqslant K$. Si $n>q^K$, on a d'après la Proposition 2

$$\Big|\sum_{m=0}^{n-1}F(m)\Big|\leqslant\sum_{r=0}^{K-1}e_r(n)q^r|\Pi_r|+\sum_{r=K}^{\nu}e_r(n)q^r|\Pi_r| \qquad \Big(\nu=\Big[\frac{\log n}{\log q}\Big]\Big)$$

$$\leqslant\sum_{r=0}^{K-1}e_r(n)q^r|\Pi_r|+\varepsilon n.$$

Il en résulte que

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\Big|\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}F(m)\Big|\leqslant\varepsilon.$$

2.6. Du Théorème 1 nous allons déduire un théorème qui fournit des conditions nécessaires et suffisantes pour que F possède une valeur moyenne non nulle [5].

THÉORÈME 2. I. *Si F possède une valeur moyenne non nulle,*

1° *La série*

$$(\mathrm{S})\qquad \sum_{r=0}^{+\infty}\Big(q-1-\sum_{a=1}^{q-1}F(aq^r)\Big)$$

est convergente;

2° *On a $1+\sum_{a=1}^{q-1}F(aq^r)\neq 0$ pour tout $r>0$.*

II. *Si la série* (S) *est convergente, le produit infini*

$$(\mathrm{P})\qquad \prod_{r=0}^{+\infty}\frac{1}{q}\Big(1+\sum_{a=1}^{q-1}F(aq^r)\Big)$$

[5] Nous appelons "valeur moyenne" de F la limite pour n tendant vers $+\infty$ de $\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}F(m)$, si cette limite existe et est finie.

est convergent et F possède une valeur moyenne égale à la valeur de ce produit infini [6].

(Naturellement, cette valeur est nulle si, et seulement si, au moins un des facteurs du produit est nul.)

Démonstration. On vient de voir que, si l'on a $\sum_{r=0}^{+\infty}\varepsilon_r = +\infty$, F possède une valeur moyenne nulle.

Si l'on suppose, au contraire, que $\sum_{r=0}^{+\infty}\varepsilon_r < +\infty$, le produit infini (P) est convergent ou non en même temps que la série (S).

En effet, posons $\frac{1}{q}\Big(1+\sum_{a=1}^{q-1}F(aq^r)\Big) = 1+u_r$, d'ou

$$u_r = \frac{1}{q}\sum_{a=1}^{q-1}\big(F(aq^r)-1\big).$$

On a pour chaque $r \geqslant 0$

$$\begin{aligned}|u_r|^2 &\leqslant \frac{1}{q^2}\Big(\sum_{a=1}^{q-1}|F(aq^r)-1|\Big)^2 \leqslant \frac{q-1}{q^2}\sum_{a=1}^{q-1}|F(aq^r)-1|^2\\ &\leqslant \frac{2(q-1)}{q^2}\sum_{a=1}^{q-1}\big(1-\operatorname{Re}F(aq^r)\big), \quad \text{d'après le Lemme 2,}\\ &\leqslant \frac{2(q-1)^2}{q^2}\varepsilon_r.\end{aligned}$$

L'hypothèse que $\sum_{r=0}^{+\infty}\varepsilon_r < +\infty$ implique donc $\sum_{r=0}^{+\infty}|u_r|^2 < +\infty$, et l'on sait alors que le produit infini $\prod_{r=0}^{+\infty}(1+u_r)$ est convergent ou non en même temps que la série $\sum_{r=0}^{+\infty}u_r$.

Mais $q-1-\sum_{a=1}^{q-1}F(aq^r) = -qu_r$.

Ceci dit, si la série (S) est convergente, on voit d'abord que l'on a $\sum_{r=0}^{+\infty}\varepsilon_r < +\infty$ car on a pour chaque $r \geqslant 0$

$$\operatorname{Re}\Big(q-1-\sum_{a=1}^{q-1}F(aq^r)\Big) = \sum_{a=1}^{q-1}\big(1-\operatorname{Re}F(aq^r)\big) \geqslant \varepsilon_r.$$

[6] Rappelons que le produit infini $\prod_{r=0}^{+\infty}(1+u_r)$ est dit convergent s'il n'a pas une infinité de facteurs nuls et le produit $\prod_{\substack{0\leqslant r\leqslant x\\ u_r\neq 0}}(1+u_r)$ tend vers une limite finie *non nulle* quand x tend vers $+\infty$. La valeur de $\prod_{r=0}^{+\infty}(1+u_r)$ est alors $\lim_{x\to+\infty}\prod_{0\leqslant r\leqslant x}(1+u_r)$.

Alors le produit infini (P) est convergent et le Théorème 1 montre que F possède une valeur moyenne égale à la valeur de ce produit.

Si maintenant on suppose que F possède une valeur moyenne $M(F)$ non nulle, on voit d'abord que l'on a nécessairement $\sum_{r=0}^{+\infty}\varepsilon_r < +\infty$, puisque dans le cas contraire F devrait avoir une valeur moyenne nulle.

De plus, le Théorème 1 montre que le produit infini (P) a tous ses facteurs non nuls et est convergent avec pour valeur $M(F)$. Alors la série (S) est convergente.

2.6.1. On peut compléter le Théorème 2 en ajoutant que, lorsque F possède une valeur moyenne $M(F)$ non nulle, on a

$$\sum_{r=0}^{+\infty}\varepsilon_r \leqslant 2q\log\frac{1}{|M(F)|}. \tag{6}$$

En effet, pour tout $k \geqslant 1$, $\Pi_k \neq 0$ et l'inégalité (5) peut s'écrire

$$\sum_{r=0}^{k-1}\varepsilon_r \leqslant 2q\log\frac{1}{|\Pi_k|}.$$

Par passage à la limite, cette dernière inégalité donne (6).

3. Application à l'étude des fonctions q-additives réelles. f étant une fonction réelle définie sur l'ensemble des entiers $\geqslant 0$, soit $\gamma_n(u)$ le nombre des entiers m satisfaisant à $0 \leqslant m \leqslant n-1$ pour lesquels $f(m) \leqslant u$, et soit $\sigma_n(u) = \frac{1}{n}\gamma_n(u)$.

On dira que f possède une distribution limite s'il existe une fonction de distribution σ, c'est à dire une fonction réelle non décroissante sur $\boldsymbol{R}$, satisfaisant à

$$\lim_{u\to-\infty}\sigma(u) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{u\to+\infty}\sigma(u) = 1,$$

telle que la suite $\{\sigma_n(u)\}$ converge vers $\sigma(u)$ en tout point de continuité de σ.

On sait que, pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que la suite

$$\Big\{\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itu}d\sigma_n(u)\Big\}, \quad \text{c'est à dire } \Big\{\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}\exp\big(itf(m)\big)\Big\},$$

converge pour tout t réel, la limite étant une fonction continue de t.

On a d'ailleurs $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itu}d\sigma(u) = \lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itu}d\sigma_n(u)$.

Si, pour chaque t réel, on définit une fonction F_t sur l'ensemble des entiers $\geqslant 0$ par

$$F_t(n) = \exp\big(itf(n)\big),$$

la condition ci-dessus signifie que, pour chaque t réel, F_t doit posséder une valeur moyenne $\Phi(t)$, la fonction Φ étant continue sur $\boldsymbol{R}$.

3.1. Ceci dit, nous allons établir le théorème suivant:

THÉORÈME 3. *Soit f une fonction q-additive réelle. Pour que f possède une distribution limite, il faut et il suffit que les deux séries*

$$(\mathrm{S}_1)\quad \sum_{r=0}^{+\infty}\Big(\sum_{a=1}^{q-1} f(aq^r)\Big) \quad \text{et} \quad (\mathrm{S}_2)\quad \sum_{r=0}^{+\infty}\Big(\sum_{a=1}^{q-1} f(aq^r)^2\Big)$$

soient convergentes.

Quand ceci a lieu, la distribution limite a pour fonction caractéristique le produit infini

$$\prod_{r=0}^{+\infty}\frac{1}{q}\Big(1+\sum_{a=1}^{q-1}\exp\big(itf(aq^r)\big)\Big),$$

convergent pour tout t réel.

3.2. Remarquons d'abord que, dans le cas considéré ici, la fonction F_t définie plus haut est q-multiplicative. Comme elle satisfait à

$$|F_t(n)| = 1 \quad \text{pour tout } n \geqslant 0,$$

on peut lui appliquer les résultats de la section précédente.

3.2.1. Ceci dit, supposons d'abord que f possède une distribution limite.

Il existe Φ continue sur $\boldsymbol{R}$ telle que, pour tout t réel, F_t possède une valeur moyenne égale à $\Phi(t)$, et, comme $\Phi(0) = 1$, il existe $T > 0$ tel que

$$|\Phi(t)| \geqslant \tfrac{1}{2} \quad \text{pour } |t| \leqslant T.$$

D'après le Théorème 2, pour tout t réel de module $\leqslant T$, la série

$$(\mathrm{S}^*)\qquad \sum_{r=0}^{+\infty}\Big(q-1-\sum_{a=1}^{q-1}F_t(aq^r)\Big)$$

est convergente, autrement dit les séries

$$(\mathrm{S}')\quad \sum_{r=0}^{+\infty}\Big(q-1-\sum_{a=1}^{q-1}\cos\big(tf(aq^r)\big)\Big) \quad \text{et} \quad (\mathrm{S}'')\quad \sum_{r=0}^{+\infty}\Big(\sum_{a=1}^{q-1}\sin\big(tf(aq^r)\big)\Big)$$

sont convergentes.

De plus, d'après la remarque du paragraphe 2.6.1, on a pour $|t| \leqslant T$ et $1 \leqslant a \leqslant q-1$

$$(7)\qquad \sum_{r=0}^{+\infty}\Big(1-\cos\big(tf(aq^r)\big)\Big) \leqslant 2q\log 2.$$

En intégrant (7) de 0 à T et multipliant par $1/T$, on voit que, pour chaque $a \geqslant 1$ et $\leqslant q-1$, on a

$$(8)\qquad \sum_{r=0}^{+\infty} g\big(Tf(aq^r)\big) \leqslant 2q\log 2,$$

où $g(u) = 1-\dfrac{\sin u}{u}$ pour $u \neq 0$ et $g(0) = 0$.

Comme $g(u) \geqslant 0$ pour tout u réel et $g(u) \geqslant \frac{1}{2}$ pour $u \geqslant 2$, ceci montre qu'il y a au plus un nombre fini (ne dépassant pas $4q\log 2$) de r pour lesquels $|f(aq^r)| \geqslant 2/T$.

Par suite, il existe $M_a > 0$ tel que $|f(aq^r)| \leqslant M_a$ pour tout $r \geqslant 0$.

Il existe $m_a > 0$ tel que $g(u) \geqslant m_a u^2$ pour $|u| \leqslant TM_a$, car la fonction qui prend la valeur $\dfrac{g(u)}{u^2}$ pour $u \neq 0$ et la valeur $\frac{1}{6}$ pour $u = 0$ est continue sur $\boldsymbol{R}$ et est toujours > 0.

Ainsi (8) donne

$$\sum_{r=0}^{+\infty} f(aq^r)^2 \leqslant \frac{2q\log 2}{m_a T^2}.$$

La série (S_2) est donc convergente.

Maintenant, si $M = \max\limits_{1\leqslant a\leqslant q-1} M_a$, le Lemme 5 montre que l'on a pour tout $r \geqslant 0$, tout $a \geqslant 1$ et $\leqslant q-1$, et tout t réel

$$\big|\sin\big(tf(aq^r)\big)-tf(aq^r)\big| \leqslant \frac{|tf(aq^r)|^3}{6} \leqslant \frac{M|t|^3}{6} f(aq^r)^2,$$

et par suite on a pour tout $r \geqslant 0$ et tout t réel

$$(9)\qquad \Big|t\sum_{a=1}^{q-1} f(aq^r)-\sum_{a=1}^{q-1}\sin\big(tf(aq^r)\big)\Big| \leqslant \frac{M|t|^3}{6}\sum_{a=1}^{q-1} f(aq^r)^2.$$

Alors la convergence de la série (S'') pour $|t| \leqslant T$ et celle de la série (S_2) entraînent la convergence de la série (S_1).

3.2.2. Supposons maintenant que les séries (S_1) et (S_2) soient convergentes.

Comme, d'après le Lemme 5, on a pour tout $r \geqslant 0$ et tout t réel

$$q-1-\sum_{a=1}^{q-1}\cos\big(tf(aq^r)\big) = \sum_{a=1}^{q-1}\Big(1-\cos\big(tf(aq^r)\big)\Big) \leqslant \frac{t^2}{2}\sum_{a=1}^{q-1} f(aq^r)^2,$$

la convergence de la série (S_2) entraîne la convergence de la série (S') pour tout t réel.

Par ailleurs, la convergence de la série (S_2) entraîne l'existence d'un $M > 0$ tel que

$$|f(aq^r)| \leqslant M \quad \text{pour } r \geqslant 0 \text{ et } 1 \leqslant a \leqslant q-1.$$

On a alors (9) et la convergence des séries (S_1) et (S_2) entraîne celle de la série (S'') pour tout t réel.

La série (S^*) est convergente pout tout t réel puisque (S') et (S'') le sont.

D'après le Théorème 2, pour tout t réel, F_t possède une valeur moyenne égale à

$$\prod_{r=0}^{+\infty} \frac{1}{q}\Big(1+\sum_{a=1}^{q-1} F_t(aq^r)\Big).$$

On va voir que cette valeur moyenne est une fonction continue de t. En effet, si l'on pose

$$\frac{1}{q}\Big(1+\sum_{a=1}^{q-1} F_t(aq^r)\Big) = 1+u_r(t), \quad \text{d'où } u_r(t) = \frac{1}{q}\sum_{a=1}^{q-1}(e^{itf(aq^r)}-1),$$

et

$$v_r(t) = \frac{it}{q}\sum_{a=1}^{q-1} f(aq^r),$$

le Lemme 4 (avec $k=1$, puis avec $k=2$) montre que l'on a pour $|t| \leqslant T$

$$|u_r(t)| \leqslant \frac{T}{q}\sum_{a=1}^{q-1}|f(aq^r)|, \quad \text{d'où } |u_r(t)|^2 \leqslant \frac{T^2(q-1)}{q^2}\sum_{a=1}^{q-1} f(aq^r)^2$$

et

$$|u_r(t)-v_r(t)| \leqslant \frac{T^2}{2q}\sum_{a=1}^{q-1} f(aq^r)^2.$$

Le produit infini $\prod_{r=0}^{+\infty}\big(1+u_r(t)\big)e^{-v_r(t)}$ est donc uniformément convergent sur tout intervalle $[-T, +T]$, d'après le Lemme 6, et par suite sa valeur est une fonction de t continue sur $\boldsymbol{R}$. Or il est égal à

$$\Big(\prod_{r=0}^{+\infty}\frac{1}{q}\Big(1+\sum_{a=1}^{q-1}F_t(aq^r)\Big)\Big)\exp\Big(-\frac{it}{q}\sum_{r=0}^{+\infty}\Big(\sum_{a=1}^{q-1}f(aq^r)\Big)\Big).$$

Reçu le 2. 8. 1971 (189)

ACTA ARITHMETICA
XXI (1972)

On the diophantine equation $a(x^n-1)/(x-1) = y^m$

by

K. Inkeri (Turku)

1. Among the diophantine equations $p(x) = y^m$, where $p(x)$ is a polynomial with integer coefficients, the equation

$$(1) \quad a(x^{n-1}+\ldots+x+1) = a\frac{x^n-1}{x-1} = y^m \quad (n \geqslant 1,\ |x|>1,\ m\geqslant 2)$$

is an interesting special case. In addition to x and y, also a, n, and m can be integral variables in (1). The problem of determining the solvability in integers of (1) when all these numbers are variables seems to be unfeasible. Various special cases arise by fixing, or specializing in some other way, one or more of the variables in (1). Particularly the case $a = 1$ with certain other restrictions has been treated by many authors. Obláth [12] has determined all solutions of (1) when $x = 10$, $1 < a < 10$. More accurately and by a slightly different route, he has proved that all numbers which are perfect powers and whose digits in the scale of 10 are identical and not equal to 1, are 4, 8 and 9. Sierpiński also has discussed this problem in his monograph ([14], p. 276)(1).

As, from our point of view, the cases $n = 1$ and $n = 2$ can be regarded as trivial, we assume in the following that $n \geqslant 3$. Without loss of generality, it can also be assumed that m is a prime.

We shall make use of the following results concerning the case $a = 1$ which were given by Nagell and Ljunggren.

(A) If $4\,|\,n$, then the only solution of (1) in integers is $n = 4$, $x = 7$, $m = 2$, $y = \pm 20$ (cf. [8]).

(B) If $m = 2$, (1) has only the solutions $n = 4$, $x = 7$, $y = \pm 20$ and $n = 5$, $x = 3$, $y = \pm 11$ (cf. [6], [9] and also, because of the used method, [2]).

(1) Note also the problem presented by Obláth (J.-ber. Deutsch. Math. Verein. 47 (1937), p. 64, Aufgabe 258) and three solutions of that problem (ibid. 50 (1940), pp. 3–5). The solution given by J. Eröd is not, however, complete, since the theorem of Siegel [13] has been applied incorrectly.