[4] D. Hilbert, *Bericht über die Theorie der algebraischen Zahlkörper*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker — Vereinigung 4 (1894–1895), pp. 175–546.
[5] H. Nehrkorn, *Über absolute Idealklassengruppen und Einheiten in algebraischen Zahlkörpern*, Abh. Math. Sem. Uni. Hamburg 9 (1933), pp. 318–334.
[6] M. J. Weiss, *Fundamental systems of units in normal fields*, Amer. J. Math. 58 (1936), pp. 249–254.

UNIVERSITY OF SOUTH FLORIDA
Tampa, Florida

Received on 24. 12. 1970 (175)

ACTA ARITHMETICA
XX (1972)

Sur la repartition modulo 1 de la suite $n\alpha$

par

JACQUES LESCA (Talence)

§ 1. Introduction. Principaux resultats. Identifions le tore $T = \boldsymbol{R}/Z$ à un cercle orienté de longueur 1, muni d'une origine 0.

Si β est un point de T, $\{\beta\}$ désigne le représentant de β dans $\boldsymbol{R}$ caractérisé par

$$0 \leqslant \{\beta\} < 1.$$

Si β, γ sont des points distincts de T, $[\beta, \gamma[$ désigne l'*arc* défini par

$$\begin{aligned} &\{\delta \in T: \{\beta\} \leqslant \{\delta\} < \{\gamma\}\}, && \text{si } \{\beta\} < \{\gamma\}, \\ &\{\delta \in T: \{\delta\} < \{\gamma\} \text{ ou } \{\delta\} \geqslant \{\beta\}\}, && \text{si } \{\beta\} > \{\gamma\}. \end{aligned}$$

L'arc $]\beta, \gamma]$ est défini à partir de $[\beta, \gamma[$ par suppression de β et adjonction de γ.

Par la suite, *α est un irrationnel de T.*

On définit, pour $\beta, \gamma \in T$, $u \in \boldsymbol{N}^*$:

$$\begin{aligned} \Pi^+(\beta, \gamma; u) &= \operatorname{card}\{n:\ n\alpha \in\ ]\beta, \gamma];\ 1 \leqslant n \leqslant u\}, \\ \Pi^-(\beta, \gamma; u) &= \operatorname{card}\{n:\ n\alpha \in [\beta, \gamma[;\ 0 \leqslant n \leqslant u-1\}, \\ E^+(\beta, \gamma; u) &= \Pi^+(\beta, \gamma; u) - u \operatorname{mes}(]\beta, \gamma]) \end{aligned}$$

(mes $]\beta, \gamma]$ désignant la longueur de l'arc $]\beta, \gamma]$)

$$E^-(\beta, \gamma; u) = \Pi^-(\beta, \gamma; u) - u \operatorname{mes}([\beta, \gamma[)$$

enfin, pour $\beta = 0$, on pose:

$$\begin{aligned} E^+(\gamma; u) &= E^+(0, \gamma; u), \\ E^-(\gamma; u) &= E^-(0, \gamma; u). \end{aligned}$$

Ce papier est consacré à *l'étude des fonctions E^+ et E^-.*

THÉORÈME A (Rélation de réciprocité). *Pour tout $\beta \in T$, $u, v \in \boldsymbol{N}^*$*

$$E^+(\beta, \beta + u\alpha; v) = E^-(-\beta, -\beta + v\alpha; u)$$

et en particulier

$$E^+(u\alpha; v) = E^-(v\alpha; u).$$

Posons, pour $u \in N^*$

$$C(u) = \sum_{n=1}^{u} (\{n\alpha\} - 1/2).$$

Théorème B. *Pour tout $u \in N$, $u \geqslant 2$, on a*

$$C(u-1) = -(1/2)E^+(u\alpha; u-1).$$

Introduisons la *discrépance* de la suite $(n\alpha)$

$$D(n) = \frac{1}{n} \operatorname*{Sup}_{\beta \in T} |E^+(\beta, n)|.$$

Théorème C. (1) *Pour tout α irrationnel*

$$\liminf_{n\to\infty} nD(n) \leqslant 1.$$

(2) *Pour toute suite de nombres réels $(\psi(n))$ qui tend vers $+\infty$ avec n il existe des α irrationnels tels que*

$$\limsup_{n\to\infty} D(n)\psi(n) = +\infty.$$

On sait, (voir [8]) que, si on définit la fonction $E^+(\beta; u)$ pour une suite quelconque de points de T, il existe des β pour lesquels la suite $u \to E^+(\beta, u)$ est non bornée; cependant, pour certaines suites de points de T, $E^+(\beta, u)$ peut être majorée ou minorée; il n'en est pas ainsi pour les suites $(n\alpha)$:

Théorème D. *Pour tout α irrationnel, il existe des éléments $\beta \in T$ tels que la suite $u \to E^+(\beta; u)$ n'est ni majorée ni minorée.*

En outre, l'ensemble de tels éléments a la puissance du continu dans tout ouvert de T.

Nous obtiendrons enfin:

Théorème E. *Soit $u \in Z$, $u \neq 0$ et α irrationnel, considérons la suite*

$$n \to E^+\big((n+u)\alpha; n\big).$$

(1) *Pour tout α cette suite est non bornée.*

(2) *Il existe des α pour lesquels cette suite est majorée [resp. minorée] pour tout u.*

(3) *Pour toute suite de nombres réels $\psi(n)$ qui tend monotonement vers $+\infty$ avec n, il existe des α irrationnels tels que:*

$$\limsup_{n\to\infty} |E^+\big((n+u)\alpha; n\big)|\psi(n)/n = +\infty.$$

Remarquons que la relation de réciprocité peut être un outil de calcul pratique, elle nous a permis, par exemple, de redémontrer le résultat suivant du à H. Kesten [5]: La suite $n \to E^+(\beta, \gamma; n)$ est bornée si et seulement s'il existe $u, v \in Z$ tels que $\{\beta\} - \{\gamma\} = u\{\alpha\} + v$.

§ 2. Démonstration du théorème A. Traduisons le problème dans R; pour $\beta, \gamma \in R$, $\beta < \gamma$, et $v \in N^*$, posons:

$$\bar{\Pi}^+(\beta, \gamma; v) = \sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant v\\ m\in Z}} \chi_{]\beta,\gamma]}(n\alpha+m)$$

(χ_E désignant la fonction caractéristique de l'ensemble E).

$$\bar{\Pi}^-(\beta, \gamma; v) = \sum_{\substack{0\leqslant n\leqslant v-1\\ m\in Z}} \chi_{]\beta,\gamma]}(n\alpha+m),$$

$$\bar{E}^+(\beta, \gamma; v) = \bar{\Pi}^+(\beta, \gamma; v) - v(\gamma-\beta),$$

$$\bar{E}^-(\beta, \gamma; v) = \bar{\Pi}^-(\beta, \gamma; v) - v(\gamma-\beta).$$

Notons que si $\beta, \gamma, \delta \in R$, $\beta < \gamma < \delta$ et $v \in N^*$

$$\bar{E}^+(\beta, \delta; v) = \bar{E}^+(\beta, \gamma; v) + \bar{E}^+(\gamma, \delta; v),$$

$$\bar{E}^-(\beta, \delta; v) = \bar{E}^-(\beta, \gamma; v) + \bar{E}^-(\gamma, \delta; v).$$

D'autre part, pour tout $u \in N^*$, $\beta \in R$, $v \in N^*$

$$\bar{E}^+(\beta, \beta+u; v) = \bar{E}^-(\beta, \beta+u; v) = 0.$$

Si $\bar{\beta}$ et $\bar{\gamma}$ désignent les classes dans R/T des nombres réels β et γ

$$\bar{E}^+(\beta, \gamma; v) = E^+(\bar{\beta}, \bar{\gamma}; v),$$

$$\bar{E}^-(\beta, \gamma; v) = E^-(\bar{\beta}, \bar{\gamma}; v).$$

Il est maintenant clair que la relation de réciprocité se réduit à:

"Pour tout $\beta \in R$, $u, v \in N^*$:

$$\bar{\Pi}^+(\beta, \beta+u\alpha; v) = \bar{\Pi}^-(-\beta, -\beta+v\alpha; u)."$$

On a:

$$\begin{aligned}
\bar{\Pi}^+(\beta, \beta+u\alpha; v) &= \sum_{1\leqslant n\leqslant v} \sum_{m\in Z} \sum_{0\leqslant k\leqslant u-1} \chi_{]\beta+k\alpha,\beta+(k+1)\alpha]}(n\alpha+m)\\
&= \sum_{1\leqslant n\leqslant v} \sum_{m\in Z} \sum_{0\leqslant k\leqslant u-1} \chi_{[(n-1)\alpha+m,n\alpha+m[}(\beta+k\alpha)\\
&= \sum_{1\leqslant n\leqslant v} \sum_{m\in Z} \sum_{0\leqslant k\leqslant u-1} \chi_{[-\beta+(n-1)\alpha,-\beta+n\alpha[}(k\alpha-m)\\
&= \bar{\Pi}^-(-\beta, -\beta+n\alpha; u).
\end{aligned}$$

§ 3. Applications du théorème A. Démonstration de la première partie du théorème C.

PROPOSITION A. *Pour tout* $\beta \in T$, $u \in Z$, $u \neq 0$, $v \in N^*$

$$|E^+(\beta, \beta+u\alpha; v)| \leqslant \operatorname{Min}\{|u|, v\}, \tag{3.1}$$

$$|E^-(\beta, \beta+u\alpha; v)| \leqslant \operatorname{Min}\{|u|, v\}. \tag{3.2}$$

Démonstration. La majoration par v est conséquence immédiate des définitions. Si u est positif, la majoration par u est conséquence de la relation de réciprocité.

Si u est négatif, on utilise, pour conclure

$$E^+(\beta, \beta+n\alpha; v) = -E^+(\beta+n\alpha, \beta; v).$$

C. Q. F. D.

Remarquons que le fait que la suite $(n\alpha)$ est équirépartie se déduit sans difficulté de la proposition A.

Considérons les fonctions

$$\beta \to E^+(\beta; u), \quad \beta \to E^-(\beta; u).$$

Elles sont linéaires en dehors de leurs points de discontinuité. La première est continue à gauche, la seconde à droite.

Soit $\beta \in T$, si $\{\beta\} < \{u\alpha\}$, alors $E^+(\beta; u)$ vaut $E^-(\beta; u)$ ou $E^-(\beta, u)-1$ suivant que β est ou n'est pas l'un des points $\{0, \alpha, 2\alpha, \ldots, (u-1)\alpha\}$.

Si $\{\beta\} \geqslant \{u\alpha\}$, alors $E^+(\beta; u)$ vaut $E^-(\beta, u)+1$ ou $E^-(\beta, u)$ suivant que β est ou n'est pas l'un des points $\{\alpha, 2\alpha, \ldots, u\alpha\}$.

Notons (q_n), la suite des dénominateurs des *convergents du développement en fraction continues de* α.

PROPOSITION B. (1) *Pour* $u \in N^*$

$$\lim_{n\to\infty} E^-(u\alpha; q_n) = 0. \tag{3.3}$$

(2) *Pour tout* $n \in N^*$ *et tout* $v \in N^*$

$$-1 < E^-(q_n\alpha; v) < 1. \tag{3.4}$$

(3) *Pour tout* $n \in N^*$ *et pour tout* $\beta \in T$

$$-1 < E^+(\beta; q_n) < 1. \tag{3.5}$$

Démonstration. 1) On a:

$$E^-(u\alpha; q_n) = E^+(q_n\alpha; u).$$

Or quand n tend vers l'infini $q_n\alpha$ tend vers 0 dans T; comme la fonction $\beta \to E^+(\beta; u)$ est continue au point 0, (3.3) est claire.

2) Supposons $v \leqslant q_n$, et n impair [resp. pair]; l'intervalle $]0, q_n\alpha]$ [resp. $[q_n\alpha, 0[$] ne contient aucun des points de discontinuité de la fonction $\beta \to E^-(\beta; v)$, alors

$$E^-(q_n\alpha; v) = 1 - v\lambda_n \quad [\text{resp. } E^-(q_n\alpha; v) = v\lambda_n]$$

λ_n désignant la longueur du petit intervalle d'extremités 0, $q_n\alpha$. Il est bien connu que λ_n est majoré par $1/q_{n+1}$, on a bien:

$$0 < E^-(q_n\alpha; v) < 1. \tag{3.6}$$

3) Pour tout $\beta \in T$, et pour tout $v \in N^*$, on peut écrire:

$$\operatorname*{Min}_{1\leqslant u\leqslant v} E^+(u\alpha; v) - 1 \leqslant E^+(\beta; v) \leqslant \operatorname*{Max}_{1\leqslant u\leqslant v} E^+(u\alpha; v).$$

Si on écrit ces inégalités pour $v = q_n$, si on utilise la formule de réciprocité et (3.6), on obtient (3.5).

4) Enfin, (3.4) est conséquence de la formule de réciprocité et de (3.5). C. Q. F. D.

La première partie du théorème C est conséquence de (3.5).

Remarques: (1) fonction $\beta \to E^+(\beta; q_n)$ s'annule exactement une fois entre deux points de discontinuité.

(2) Pour tout $\beta \in T$, n, $v \in N^*$

$$|E^+(\beta, \beta+q_n\alpha; v)| \leqslant 2, \quad |E^-(\beta, \beta+q_n\alpha; v)| \leqslant 2.$$

§ 4. Démonstration du théorème D.

LEMME A. *La suite double* $u, v \to E^+(u\alpha; v)$ *n'est ni minorée, ni majorée.*

Démonstration. Prouvons tout d'abord que, quels que soient u_0, v_0, on peut trouver deux autres entiers u, v tels que:

$$E^+(u\alpha; v) < E^+(u_0\alpha; v_0) - 1/2.$$

1) Si $u_0 \leqslant v_0$, on utilise le fait que

$$\lim_{\substack{\beta\to u_0\alpha \\ \{\beta\}<\{u_0\alpha\}}} E^+(\beta, v_0) = E^+(u_0\alpha; v_0) - 1$$

ainsi que le fait que la suite $n\alpha$ est dense dans T, pour conclure.

2) Si $u_0 > v_0$, on écrit $E^+(u_0\alpha; v_0) = E^-(v_0\alpha; u_0)$. En utilisant le fait que $\beta \to E^-(\beta; u_0)$ est continue à gauche et le fait que la suite $(n\alpha)$ est partout dense, on obtient un premier entier $v > u_0$ tel que

$$E^-(v\alpha; u_0) \leqslant E^+(u_0\alpha; v_0) + 1/4.$$

On écrit alors:

$$E^+(u_0\alpha; v) = E^-(v\alpha; u_0)$$

et on termine comme ci-dessus.

On démontre de façon analogue: pour tout couple d'entiers (u_0, v_0), il existe u, v, tels que

$$E^+(u\alpha; v) > E^+(u_0\alpha, v_0)+1/2.$$

C. Q. F. D.

Lemme B. *Pour tout $A \in \boldsymbol{R}$ et tout $\eta > 0$:*

(1) *il existe $r \in \boldsymbol{N}$ tel que, dans tout intervalle I de T de longueur supérieure à η, il existe deux points $u\alpha$ $(u \in \boldsymbol{N})$ tels que*

$$E^+(u\alpha; r) > A. \tag{4.1}$$

(2) *Il existe $s \in \boldsymbol{N}$ tel que, dans tout intervalle I de T de longueur supérieure à η, il existe deux points $u\alpha$ $(u \in \boldsymbol{N})$ tels que*

$$E^+(u\alpha; s) < -A.$$

Démonstration. Soit u_0 un entier assez grand pour que tout intervalle de longueur supérieure à η recontre deux des points de l'ensemble $\{0, \alpha, 2\alpha, \ldots, u_0\alpha\}$. Si r et v sont des entiers tels que:

$$E^+(v\alpha; r) > A+u_0 \tag{4.2}$$

et I un intervalle de longueur supérieure à η, I contient deux des points de l'ensemble $\{v\alpha, (v+x)\alpha, \ldots, (v+u_0)\alpha\}$.

Si $(v+x)\alpha$ est un tel point, (4.1) est vérifié avec, $u = v+x$, en effet:

$$E^+\big((v+x)\alpha; r\big)-E^+(v\alpha, r) = E^+\big(v\alpha, (v+x)\alpha; r\big).$$

La deuxième partie du lemme s'obtient de façon analogue. C. Q. F. D.

Achevons la démonstration du théorème D. Nous construisons les intervalles fermés de T: $I_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$ $(i_j = 0$ ou $1)$, tels que:

(1) Pour toute suite finie d'indices $i_1, \ldots, i_n$

$$I_{i_1,\ldots,i_n,0} \subset I_{i_1,\ldots,i_n},$$
$$I_{i_1,\ldots,i_n,1} \subset I_{i_1,\ldots,i_n},$$
$$I_{i_1,\ldots,i_n,0} \cap I_{i_1,\ldots,i_n,1} = \emptyset.$$

(2) I_0 et I_1 sont disjoints et sont inclus dans l'intervalle donné.

(3) Si n est impair, il existe un entier r_n tel que pour $\beta \in I_{i_1,\ldots,i_n}$, $E^+(\beta; r_n) \geqslant n$.

Si n est pair, il existe un entier r_n tel que pour tout $\beta \in I_{i_1,\ldots,i_n}$, $E^+(\beta; r_n) \leqslant -n$.

Il est clair que la construction ainsi définie démontre le théorème D. Tant qu'à la possibilité de la construction, c'est une conséquence immédiate du lemme qui précède et du fait que la fonction $\beta \to E^+(\beta; r_n)$ est continue à droite.

§ 5. Démonstration du théorème B. Si β est un point de T, $\langle\beta\rangle$ désigne le représentant de β dans $\boldsymbol{R}$ vérifiant:

$$-\tfrac{1}{2} \leqslant \langle\beta\rangle < \tfrac{1}{2}.$$

Pour tout $\beta \in T$, on a:

$$\{\beta\}-1/2 = \langle\beta-1/2\rangle.$$

Désignons par γ et γ' les milieux des arcs d'extrémités 0 et $n\alpha$ $(n \in \boldsymbol{N}^*)$, ce sont les points d'abscisses respectives $(\{n\alpha\}+1)/2$, $\{n\alpha\}/2$. Remarquons que, pour tout $\beta \in T$;

$$\begin{aligned} &\text{si } \beta \in [\gamma', 0[,\ \langle\beta-1/2\rangle = \langle\beta-\gamma\rangle+\{\gamma\}-1/2,\\ &\text{si } \beta \in [0, \gamma'[,\ \langle\beta-1/2\rangle = \langle\beta-\gamma\rangle+\{\gamma\}-1/2-1. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Désignons par S l'ensemble des points de T: $\{\alpha, 2\alpha, \ldots, (n-1)\alpha\}$.

1) Si $\gamma' \notin S$ (n est impair ou $\frac{n}{2}\alpha = \gamma$), on peut écrire:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \langle\alpha i-\gamma\rangle = 0$$

et on a, d'après (5.1)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n-1} \langle\alpha i-\tfrac{1}{2}\rangle &= (n-1)(\{\gamma\}-1/2)-\Pi^+(0, \gamma'; n-1)\\ &= -E^+(\gamma'; n-1)\\ &= -\tfrac{1}{2}E^+(n\alpha; n-1).\end{aligned}$$

2) Si γ' est le point d'abscisse, $\frac{n}{2}\alpha$ (n pair)

$$\sum_{i=1}^{n-1} \langle\alpha i-\gamma\rangle = -1/2$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n-1} \langle\alpha i-1/2\rangle &= (n-1)(\{\gamma\}-1/2)+1/2-\Pi^+(0, \gamma'; n-1)\\ &= -\tfrac{1}{2}E^+(n\alpha; n-1).\end{aligned}$$

§ 6. Application du théorème B. Fin de la démonstration du théorème C et démonstration du théorème E. Les résultats restant à prouver sont traduction immédiate des trois résultats connus suivants, concernant la suite c_n. (Il suffit d'utiliser que, pour tout $u \in Z$,

$$\left|E^+\big((n+u)\alpha; n\big) - E^+(n\alpha; n-1)\right|$$

est majorée par $|u|+1$.)

1) Résultat du à A. Ostrowski [9]. La suite c_n n'est pas bornée.

2) Résultat du à V. T. Sos [11]. Il existe des α pour lesquels la suite c_n est minorée [resp. majorée].

3) Résultat du à Hardy and Littlewood [4]. Quelle que soit la suite φ qui tend monotonement vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, alors il existe des α tels que

$$\limsup_{n\to\infty} |c_n| \varphi(n)/n = +\infty.$$

Bibliographie

[1] P. Bohl, *Über ein in der Theorie der säkularen Störungen vorkommendes Problem*, Journ. Reine Angew. Math. 135 (1909), p. 189–283.
[2] J. Cigler and G. Helmberg, Jahresbericht der Deutschen Matematiker Vereinigung (1961).
[3] P. Erdös, *Problems and results on diophantine approximations*, Compositio mathematica 16 (1964), p. 52–65.
[4] G. H. Hardy and J. Littlewood, *The lattice points of a right-angled triangle*, Proc. London Math. Soc. (3), 20 (1922), p. 15–36 (IX–7. 8. 9).
[5] H. Kesten, *On a conjecture of Erdös and Szüsz related to uniform distribution mod 1*, Acta Arith. 12 (1966), p. 193–212.
[6] J. F. Koksma, *Diophantische Approximationen Ergebnisse des mathematik*, Chelsea Publishing.
[7] J. Lesca, *Thèse de troisième cycle*, Grenoble.
[8] — *Démonstration d'une conjecture de P. Erdös*, Acta Arith. 14 (1968), p. 425–427.
[9] A. Ostrowski, *Bemerkungen zur Theorie der diophantischen Approximationen*, Abhandlungen der mathematischen Seminar Hamburg, 1 (1922), p. 77–98.
[10] F. Roth, *On irregularities of distribution*, Mathematika 1 (1954), p. 73–79.
[11] V. T. Sos, *On the theory of diophantine approximations I*, Acta Mathematica Ac. Sci. Hungaricae VIII, 34, (1957), p. 461–472.
[12] T. Van Aardenne-Ehrenfest, *On the impossibility of a just distribution*, Indagationes Math. 11 (1949), p. 264–269.

UNIVERSITÉ DE BORDEAUX
DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, Talence, France

Reçu le 18. 1. 1971 (135)

ACTA ARITHMETICA
XX (1972)

Fonctions zêta p-adiques des corps de nombres abeliens réels

par

YVETTE AMICE (Paris) et JEAN FRESNEL (Bordeaux)

0. INTRODUCTION

Soit K un corps de nombres algébriques, la fonction zêta du corps K est définie par:

$$Z(s, K) = \sum_{\mathfrak{a}} N(\mathfrak{a})^{-s} = \prod_{\mathfrak{q}} \big(1 - N(\mathfrak{q})^{-s}\big)^{-1} \quad \text{pour} \quad \operatorname{Re}(s) > 1$$

où la somme est étendue à tous les idéaux entiers non nuls de K et où le produit est étendu à tous les idéaux premiers non nuls de K.

Supposons désormais que K soit une extension abélienne réelle finie du corps $\boldsymbol{Q}$ des nombres rationnels. Soit $\mathfrak{X}$ l'ensemble des caractères primitifs du corps K. A chaque $\chi \in \mathfrak{X}$ on associe la fonction $L(\cdot, \chi)$ définie par:

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s} = \prod_{q} \big(1 - \chi(q) q^{-s}\big)^{-1} \quad \text{pour} \quad \operatorname{Re}(s) > 1$$

où le produit est étendu à tous les nombres premiers. On peut alors factoriser la fonction zêta sous la forme:

$$Z(s, K) = \prod_{\chi \in \mathfrak{X}} L(s, \chi).$$

Soit $\boldsymbol{Z}$ l'anneau des entiers rationnels, $\boldsymbol{Q}$ le corps des rationnels, $\boldsymbol{Q}_p$ le corps p-adique élémentaire, $\boldsymbol{Z}_p$ son anneau de valuation, $\boldsymbol{C}_p$ le complété d'une clôture algébrique de $\boldsymbol{Q}_p$ muni de sa valeur absolue $|\cdot|_p$.

Si χ est un caractère primitif de conducteur f, *la fonction L p-adique* $L_p(\cdot, \chi)$ définie par Kubota et Leopoldt [10] est l'application continue de $\boldsymbol{Z}_p$ dans $\boldsymbol{Q}_p(\chi) = \boldsymbol{Q}_p\big(\chi(1), \chi(2), \ldots, \chi(f)\big)$ telle que:

$$L_p(1-m, \chi) = \big(1 - \chi(p) p^{m-1}\big) L(1-m, \chi)$$