ACTA ARITHMETICA
XX (1972)

Eine einheitliche Herleitung einer gewissen Klasse von Transformationsformeln der analytischen Zahlentheorie (II)

von

HANS-JÜRGEN GLAESKE (Jena)

Im ersten Teil der Arbeit [5] wurden gewisse Hilfsfunktionen U, Q, U^*, Q^* untersucht, die die Grundlage für die im Titel der Arbeit angegebene Aufgabenstellung bilden. Entscheidend war eine Funktionalgleichung, die sich völlig elementar herleiten ließ (s. [5], (2.11)) und die geeignet ist, durch Spezialisierung der Parameter die oben erwähnte Klasse von Transformationsformeln zu liefern. Der Ausführung dient der zweite Teil.

Im ersten Paragraphen werden die wichtigsten Ergebnisse des ersten Teils angegeben und die Betrachtungen etwas weiter geführt.

Im Paragraphen 2 wird die Spezialisierung der Funktionalgleichung ([5], (2.11)) auf ganzzahlige s vorgenommen. Man erhält dann ein *Reziprozitätsgesetz* für die Hilfsfunktion U^*, *das äquivalent der Klasse der gesuchten Transformationsformeln* ist. Damit ist man an sich fertig.

Im Paragraphen 3 wird nun für spezielle Werte der Parameter der Zusammenhang zwischen den hier betrachteten Funktionen U^* und Q^* und den sonst üblichen Funktionen benutzt und damit der Anschluß an alte Ergebnisse hergestellt.

§ 1

1.1. In [5] wurden meromorphe Funktionen von s betrachtet, die für $\mathrm{Re}(s) = \sigma > \lambda^{-1}+\mu^{-1}$ durch die Reihen

$$Q\left(\omega; s; \begin{matrix}\alpha, & \beta\\ \lambda, & \mu\end{matrix}\right) = \Gamma(s) \sum_{g,h=0}^{\infty} [(g+\beta)^{\mu}+\omega(h+\alpha)^{\lambda}]^{-s} \tag{1}$$

für

$$|\arg(\omega)| < \pi;\ 0 \leqslant \alpha,\ \beta \leqslant 1,\ \alpha+\beta \neq 0;\ \lambda,\ \mu > 0 \tag{2}$$

bzw.

$$U\left(\omega; s; \begin{matrix}\alpha, & \beta\\ \lambda, & \mu\end{matrix}\right) = \Gamma(s) \sum_{g=-\infty}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} [(g+\beta)^{\mu}+\omega(h+\alpha)^{\lambda}]^{-s} \tag{1'}$$

für

$$(2') \qquad \pi(\mu_0-1) < \arg(\omega) < \pi;\ \lambda, \mu > 0,\ \mu = \mu_0+2k,\ 0 \leqslant \mu_0 < 2,$$
$$0 \leqslant k \equiv 0\ (1),\ 0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 1,\ \alpha+\beta(1-\beta) \neq 0$$

definiert waren. Aus (1.1′) entnimmt man leicht (s. [5], § 2)

$$(3) \qquad U = Q + e^{-\pi i \mu_0 s} Q\left(e^{-\pi i \mu_0}\omega; s; \frac{\alpha}{\lambda}, \frac{1-\beta}{\mu}\right).$$

1.2. Mit Hilfe eines Satzes aus der Theorie der Mellintransformation ergibt sich aus (1) nach leichter Rechnung für $\sigma > \mathrm{Max}(2/\lambda, 2/\mu)$

$$(4) \qquad Q = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\sigma/2)} \omega^{-u}\varphi_\lambda(u, \alpha)\varphi_\mu(s-u, \beta)\,du$$

für

$$(5) \qquad |\arg(\omega)| < \pi;\ \lambda, \mu > 0;\ 0 < \alpha, \beta \leqslant 1,$$

wobei

$$\varphi_\lambda(u, \alpha) = \Gamma(u)\zeta(\lambda u, \alpha), \qquad 0 < \alpha \leqslant 1$$

gesetzt werde und $\zeta(u, \alpha)$ die *Hurwitzsche Zetafunktion* sei. Im folgenden werde immer $\zeta(u, 0) = \zeta(u, 1) = \zeta(u)$ (*Riemannsche Zetafunktion*) definiert.

Mittels (3) kann mann sofort eine analoge Integraldarstellung für U aufschreiben. Die Fälle $\alpha\beta = 0$ lassen sich sofort mittels

$$(6) \qquad Q = Q\left(\omega; s; \frac{\alpha+\delta_{\alpha 0}}{\lambda}, \frac{\beta+\delta_{\beta 0}}{\mu}\right) + \delta_{\alpha 0}\varphi_\mu(s, \beta) + \delta_{\beta 0}\varphi_\lambda(s, \alpha)\,\omega^{-s}$$

erledigen, wobei $\delta_{\alpha 0}$ das Kroneckersymbol sei und (6) für $\alpha^2+\beta^2 \neq 0$ eine Folgerung aus (1), für $\alpha = \beta = 0$ eine Definition ist.

Mit (3) ergibt sich dann analog für U die Beziehung

$$(6') \qquad U = U\left(\omega; s; \frac{\alpha+\delta_{\alpha 0}}{\lambda}, \frac{\beta+\delta_{\beta 0}}{\mu}\right) + \delta_{\alpha 0}\left(\varphi_\mu(s, \beta) + e^{-\pi i \mu_0 s}\varphi_\mu(s, 1-\beta)\right) +$$
$$+ (\delta_{\beta 0}+\delta_{\beta 1})\varphi_\lambda(s, \alpha)\,\omega^{-s}.$$

1.3. Die Darstellung (3) für alle s und $0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 1$ wird zur Definition einer Funktion Q^* verwendet. Diese hat für alle s einen Sinn (s. [5], § 3), wenn man das Integral als Cauchyschen Hauptwert auffaßt, falls Polstellen des Integranden auf dem Integrationsweg liegen. Wegen der Verabredung über $\zeta(u, 0)$ gilt hier an Stelle von (6)

$$(7) \qquad Q^* = Q^*\left(\omega; s; \frac{\alpha+\delta_{\alpha 0}}{\lambda}, \frac{\beta+\delta_{\beta 0}}{\mu}\right).$$

Offenbar entsteht Q^* aus Q indem man die Residuen der Polstellen von $\varphi_\mu(s-u, \beta)$ addiert, die links vom Wege $(\sigma/2)$ liegen und die Residuen der Polstellen von $\varphi_\lambda(u, \alpha)$ subtrahiert, die rechts von $(\sigma/2)$ liegen. Die Residuen der Polstellen auf $(\sigma/2)$ sind mit dem Faktor $1/2$ zu versehen. Abzuziehen sind also die Residuen der Polstellen bei

$$u = 0, -1, \ldots, -k, \qquad k \geqslant 0$$

wobei k so zu bestimmen ist, daß $-k > \sigma/2$, $-k-1 \leqslant \sigma/2$ gilt.

Wir setzen

$$(8) \qquad s = 4m+\varkappa, \quad m \equiv 0\ (1), \quad -2 < \mathrm{Re}(\varkappa) \leqslant 2.$$

Dann bestimmt sich die ganze Zahl k zu

$$(8') \qquad k = -2m-1-\left[\frac{\mathrm{Re}(\varkappa)}{2}\right],$$

wo $[x]$ die größte ganze Zahl bedeute, die kleiner oder gleich x ist.

Die Summe dieser Residuen, einschließlich des Terms, der für $\alpha = 0$ in (6) hinzukommt, bezeichnen wir mit x_k. Eine einfache Rechnung liefert für $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$(9_1) \qquad x_k = \sum_{\nu=0}^{k} \frac{(-1)^\nu}{\nu!}\zeta(-\lambda\nu, \alpha)\varphi_\mu(s+\nu, \beta)\,\omega^\nu + \delta_{\alpha 0}\varphi_\mu(s, \beta).$$

Außerdem ist das Residuum bei $u = \lambda^{-1}$ zu subtrahierten falls $\sigma \leqslant 2\lambda^{-1}$ ist. Dieses sei $\tilde{x}_\lambda$:

$$(9_2) \qquad \tilde{x}_\lambda = \Gamma(1+\lambda^{-1})\varphi_\mu(s-\lambda^{-1}, \beta)\,\omega^{-\lambda^{-1}}.$$

Zu addieren sind die Residuen der Polstellen bei

$$u = s, s+1, \ldots, s+k'$$

wobei sich k' aus den Forderungen $\sigma+k' < \sigma/2$, $\sigma+k'+1 \geqslant \sigma/2$ eindeutig zu $k' = k$ ergibt.

Bezeichnet man die Summe dieser Residuen, einschließlich des für $\beta = 0$ hinzukommenden Terms mit y_k, so liefert eine einfache Rechnung für $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$(9_3) \qquad y_k = \sum_{\nu=0}^{k} \frac{(-1)^\nu}{\nu!}\zeta(-\mu\nu, \beta)\varphi_\lambda(s+\nu, \alpha)\,\omega^{-s-\nu} - \delta_{\beta 0}\varphi_\lambda(s, \alpha)\,\omega^{-s}.$$

Außerdem ist das Residuum der Polstelle bei $u = s-\mu^{-1}$ zu addieren, falls $\sigma \leqslant 2\mu^{-1}$ ist. Dieses sei $\tilde{y}_\mu$.

$$(9_4) \qquad \tilde{y}_\mu = -\Gamma(1+\mu^{-1})\varphi_\lambda(s-\lambda^{-1}, \alpha)\,\omega^{\mu^{-1}-s}.$$

Um die Polstellen auf der Integrationsgeraden mit dem richtigen Gewicht zu versehen, führen wir noch die Bezeichnung

$$(9_5)\qquad \varepsilon_\varrho = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad \sigma < 2\varrho, \\ \frac{1}{2} & \text{für} \quad \sigma = 2\varrho, \\ 0 & \text{für} \quad \sigma > 2\varrho \end{cases}$$

ein. Damit hat man den

Satz 1. *Für* $|\arg(\omega)| < \pi;\ \lambda, \mu > 0;\ 0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 1$ *gilt*

$$(9)\qquad Q^* = Q - \varepsilon_{1/\lambda}\tilde{x}_\lambda + \varepsilon_{1/\mu}\tilde{y}_\mu - x_k + y_k - \varepsilon_{-k-1}(x_{k+1} - x_k + y_k - y_{k+1}).$$

Bemerkung. Wie üblich sei für $k < 0$ $\sum_{\nu=0}^{k} = 0$.

1.4. Analog kann für U verfahren. Mit (3.4) erklärt man

$$(10)\qquad U^* = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\sigma/2)} \omega^{-u}\varphi_\lambda(u, \alpha)[\varphi_\mu(s-u, \beta) + e^{\pi i\mu_0(u-s)}\varphi_\mu(s-u, 1-\beta)]\,du$$

für

$$(11)\qquad \pi(\mu_0 - 1) < \arg(\omega) < \pi;\ 0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 1;\ 0 < \lambda, \mu,$$
$$\mu = \mu_0 + 2k,\ 0 \leqslant \mu_0 < 2,\ k \equiv 0\ (1).$$

Auch U^* stellt für jedes s eine wohldefinierte Funktion von ω dar und der Zusammenhang (3) besteht auch für U^* und Q^*. Durch analoge überlegungen wie oben beweist man den

Satz 2. *Für* (11) *gilt*

$$(12)\qquad U^* = U - \varepsilon_{1/\lambda}\tilde{u}_\lambda + \varepsilon_{1/\mu}\tilde{v}_\mu - u_k + v_k - \varepsilon_{-k-1}(u_{k+1} - u_k + v_k - v_{k+1})$$

wobei die folgenden Abkürzungen benutzt wurden:

$$(12_1)\qquad \tilde{u}_\lambda = \Gamma(1+\lambda^{-1})[\varphi_\mu(s-\lambda^{-1}, \beta) + e^{\pi i\mu_0(\lambda^{-1}-s)}\varphi_\mu(s-\lambda^{-1}, 1-\beta)]\,\omega^{-1/\lambda},$$

$$(12_2)\qquad u_k = \sum_{\nu=0}^{k}\frac{(-1)^\nu}{\nu!}\zeta(-\lambda\nu, \alpha)[\varphi_\mu(s+\nu, \beta) + e^{-\pi i\mu_0(s+\nu)}\varphi_\mu(s+\nu, 1-\beta)]\,\omega^\nu$$
$$+ \delta_{\alpha 0}[\varphi_\mu(s, \beta) + e^{-\pi i\mu_0 s}\varphi_\mu(s, 1-\beta)],$$

$$(12_3)\qquad \tilde{v}_\mu = \Gamma(1+\mu^{-1})(1 + e^{-\pi i\mu_0/\mu})\varphi_\lambda(s-\mu^{-1}, \alpha)\,\omega^{\mu^{-1}-s},$$

$$(12_4)\qquad v_k = -\sum_{\nu=0}^{k}\frac{(-1)^\nu}{\nu!}\varphi_\lambda(s+\nu, \alpha)[\zeta(-\mu\nu, \beta) + e^{\pi i\mu_0\nu}\zeta(-\mu\nu, 1-\beta)]\,\omega^{-s-\nu}$$
$$-(\delta_{\beta 0} + \delta_{\beta 1})\varphi_\lambda(s, \alpha)\,\omega^{-s}.$$

§ 2

Ausgangspunkt unserer Betrachtungen ist jetzt die Funktionalgleichung (2.11) aus [5]:

$$U^*\left(\omega; s; \frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\mu}\right) + U^*\left(\omega; s; \frac{\alpha}{\mu}, \frac{\beta}{\lambda}\right) + e^{-\pi i\mu_0 s}\left[U^*\left(\omega; s; \frac{1-\alpha}{\lambda}, \frac{1-\beta}{\mu}\right) + \right.$$
$$\left. + U^*\left(\omega; s; \frac{1-\alpha}{\mu}, \frac{1-\beta}{\lambda}\right)\right] -$$
$$-\omega^{-s}\left\{U^*\left(e^{\pi i\mu_0}\omega^{-1}; s; \frac{1-\beta}{\lambda}, \frac{\alpha}{\mu}\right) + U^*\left(e^{\pi i\mu_0}\omega^{-1}; s; \frac{1-\beta}{\mu}, \frac{\alpha}{\lambda}\right) + \right.$$
$$\left. + e^{-\pi i\mu_0 s}\left[U^*\left(e^{\pi i\mu_0}\omega^{-1}; s; \frac{\beta}{\lambda}, \frac{1-\alpha}{\mu}\right) + U^*\left(e^{\pi i\mu_0}\omega^{-1}; s; \frac{\beta}{\mu}, \frac{1-\alpha}{\lambda}\right)\right]\right\} +$$
$$= (1 - e^{-2\pi i\mu_0 s})\left[Q^*\left(\omega; s; \frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\mu}\right) + Q^*\left(\omega; s; \frac{\alpha}{\mu}, \frac{\beta}{\lambda}\right)\right], \qquad \lambda \equiv \mu\ (2).$$

Wir wollen s so wählen, daß die rechte Seite dieser Funktionalgleichung verschwindet. Das ist für $s\mu_0 = k \equiv 0\ (1)$ der Fall. Im Hinblick auf die bekannten Spezialfälle wollen wir $\mu \equiv 0\ (1)$ wählen. Da nach (1.3) für gerade μ die Funktion U im wesentlichen eine Summe von Q — Funktionen ist, sei darüber hinaus $\mu \equiv 1\ (2)$, d.h. $\mu_0 = 1$. Da wir oben $\lambda \equiv \mu(2)$ gefordert haben, muß dann auch $\lambda \equiv 1\ (2)$ gelten. Setzt man noch $s = n$, so hat man für

$$(1)\qquad \operatorname{Im}(\omega) > 0; \quad n \equiv 0\ (1); \quad 0 < \lambda, \mu \equiv 1\ (2); \quad 0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 1$$

die *Funktionalgleichung*

$$(2)\qquad U^*\left(\omega; n; \frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\mu}\right) + U^*\left(\omega; n; \frac{\alpha}{\mu}, \frac{\beta}{\lambda}\right) +$$
$$+ (-1)^n\left[U^*\left(\omega; n; \frac{1-\alpha}{\lambda}, \frac{1-\beta}{\mu}\right) + U^*\left(\omega; n; \frac{1-\alpha}{\mu}, \frac{1-\beta}{\lambda}\right)\right]$$
$$= \omega^{-n}\left\{U^*\left(-\omega^{-1}; n; \frac{1-\beta}{\lambda}, \frac{\alpha}{\mu}\right) + U^*\left(-\omega^{-1}; n; \frac{1-\beta}{\mu}, \frac{\alpha}{\lambda}\right) + \right.$$
$$\left. + (-1)^n\left[U^*\left(-\omega^{-1}; n; \frac{\beta}{\lambda}, \frac{1-\alpha}{\mu}\right) + U^*\left(-\omega^{-1}; n; \frac{\beta}{\mu}, \frac{1-\alpha}{\lambda}\right)\right]\right\}.$$

Bemerkungen. 1. Man kann (2) auch direkt mittels (1.3) und (1.1) auf völlig elementare Weise, d.h. ohne die Betrachtungen in [5] verifizieren, falls man noch die Bemerkung verwendet, daß (1.3) auch für U^* und Q^* gilt.

2. Eine Vereinfachung ergibt sich für $\lambda = \mu$. Schreibt man der Einfachheit halber

$$(3)\qquad U^*\left(\omega; s; \frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right) = U^*_\lambda(\omega; s; \alpha, \beta)$$

so wird aus (2)

$$U_\lambda^*(\omega; n; \alpha, \beta) + (-1)^n U_\lambda^*(\omega; n; 1-\alpha, 1-\beta) = \omega^{-n}[U_\lambda^*(-\omega^{-1}; n; 1-\beta, \alpha) + (-1)^n U_\lambda^*(-\omega^{-1}; n; \beta, 1-\alpha)]. \tag{4}$$

Durch Spezialisierung von $n, \lambda, \mu, \alpha, \beta$ erhält man nun alle in dieser Richtung bekannten Transformationsformeln. Diese sehen in U^* besonders einfach aus. Um diese auf die in Spezialfällen in der Literatur bekannte Gestalt zu bringen, muß man die Ergebnisse von § 1 verwenden. Nur deshalb sind die folgenden, rechnerisch etwas mühseligen, aber völlig einheitlichen Betrachtungen nötig.

Das Vorgehen ist dabei das Folgende: Gemäß (1. Satz 2) wird U^* auf U zurückgeführt und in (2) eingetragen. Das soll nur beispielhaft geschehen.

§ 3

3.1. Der Fall $s = 0$. Wir wollen hier die Rechnung nicht im allgemeinen Fall durchführen, sondern nur den bekannten Fall $\lambda = \mu = 1$ betrachten. Nach (1.8) wird $m = \varkappa = 0$ und nach (1.8′) deshalb $k = -1$. Also wird $(\mu_0 = 1)$

$$u_{-1} = \delta_{\alpha 0} \lim_{s\to 0} \Gamma(s)[\zeta(s, \beta) + e^{-\pi i s}\zeta(s, 1-\beta)] = \delta_{\alpha 0} l_1(\beta), \quad 0 < \beta < 1$$

wobei $l_s(x)$ der *Polylogarithmus* ist, der für $\sigma > 0$ und reelle nichtganze x durch

$$l_s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i n x}}{n^s} \tag{1}$$

erklärt ist. Hierbei wurde die *Lerchsche Funktionalgleichung* (s. etwa [2], S. 29, (7))

$$\varphi(s, x) + e^{-\pi i s}\varphi(s, 1-x) = (-2\pi i)^s l_{1-s}(x), \quad 0 < x < 1 \tag{2}$$

verwendet. Weiter ist nach (1.9_5) $\varepsilon_1 = 1$, also benötigt man nach (1.12_2) mit (2)

$$\tilde{u}_1 = (-2\pi i)^{-1} l_2(\beta)\,\omega^{-1}, \quad 0 \leqslant \beta \leqslant 1.$$

Weiter ist $\varepsilon_{-k-1} = \varepsilon_0 = 1/2$. Damit wird mit (1.12_2)

$$\varepsilon_0(u_0 - u_{-1}) = -\frac{1}{2} B_1(\alpha) l_1(\beta), \quad 0 < \beta < 1$$

wobei $B_1(\alpha)$ das erste *Bernoullische Polynom* ist. Allgemein seien diese Polynome durch

$$\frac{u e^{xu}}{e^u - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} u^n, \quad |u| < 2\pi \tag{3}$$

erklärt. Den Zusammenhang

$$\zeta(-n, x) = -\frac{B_{n+1}(x)}{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{4}$$

der oben für $n = 1$ verwendet wurde, entnimmt man etwa ([2], S. 27, (11)).

Wegen $\mu = \mu_0 = 1$ ist $v_1 = 0$. Schließlich wird $v_{-1} = 0$ für $0 < \beta < 1$ und es gilt wegen

$$\zeta(0, \beta) + \zeta(0, 1-\beta) = 0, \quad 0 < \beta < 1$$

$\varepsilon_0(v_{-1} - v_0) = 0$. Für $\beta = 0, 1$ faßt man die entsprechenden Terme zusammen, d.h. man bildet gemäß (1.12) und obigen Überlegungen

$$L = \lim_{s\to 0}\{\varepsilon_0[u_0 - u_{-1} + v_{-1} - v_0] + \varphi(s, \alpha)\omega^{-s}\}$$
$$= \lim_{s\to 0}\{\tfrac{1}{2}B_1(\alpha)\zeta(s)(1 + e^{-\pi i s}) + \tfrac{1}{2}\zeta(s, \alpha)\omega^{-s}\}\Gamma(s).$$

Mittels der bekannten Laurententwicklungen (s. etwa [2]) erhält man sofort

$$L = \frac{B_1(\alpha)}{2}\log(-2\pi i\omega) + \frac{1}{2}\zeta'(0, \alpha).$$

Man beachte, daß (s.[5], § 2) die Funktion U für $s = 0$ eine Polstelle besitzt, falls $\alpha + \beta(1-\beta) = 0$ ist. Deshalb braucht in u_{-1} der Term für $\beta = 0, 1$ nicht berücksichtigt zu werden. Wir müssen wegen (2.4) sogar fordern:

$$\alpha(1-\alpha) + \beta(1-\beta) \neq 0.$$

Zusammenfassend wird also mit $U_1^* = U^*$

$$U^*(\omega; 0; \alpha, \beta) = U(\omega; 0; \alpha, \beta) + \frac{l_2(\beta)}{2\pi i\omega} + \tfrac{1}{2}(1 - \delta_{\beta 0} - \delta_{\beta 1})\big(B_1(\alpha) - \delta_{\alpha 0}\big) l_1(\beta) - \tfrac{1}{2}(\delta_{\beta 0} + \delta_{\beta 1})[B_1(\alpha)\log(-2\pi i\omega) + \zeta'(0, \alpha)]. \tag{5}$$

Trägt man das in (2.4) ein, so ergibt sich nach elementarer Rechnung unter Verwendung einiger bekannter Eigenschaften der B, ζ, und l-Funktionen sofort der

SATZ 1. *Für*

$$\mathrm{Im}(\omega) > 0; \quad 0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 1, \quad \alpha(1-\alpha) + \beta(1-\beta) \neq 0$$

gilt

$$\begin{aligned} &U(\omega;0;\alpha,\beta)+U(\omega;0;1-\alpha,1-\beta)-\\ &\quad -U(-\omega^{-1};0;1-\beta,\alpha)-U(-\omega^{-1};0;\beta,1-\alpha)\\ &\qquad =\pi i[B_2(\beta)\omega^{-1}+2B_1(\alpha)B_1(\beta)+B_2(\alpha)\omega].\end{aligned}$$

Eine besondere Vereinfachung ergibt sich für $\lambda=\mu\equiv 1\ (2)$, $\alpha=1$, $\beta=0$. Dann lautet (2.4) mit

$$U_\lambda^*(\omega;s;1,0)=U_\lambda^*(\omega;s)$$

einfach

$$U_\lambda^*(\omega;0)=U_\lambda^*(-\omega^{-1};0).$$

Durch analoge Rechnungen wie oben, erhält man aus (1.12)

$$U^*(\omega;0)=U(\omega;0)-\frac{\pi i}{12\omega}-\frac{1}{4}\log\frac{\omega}{i}$$

und für $\lambda>1$

$$U_\lambda^*(\omega;0)=U_\lambda(\omega;0)+\frac{\pi i}{6}\left[\frac{\omega^{-1/\lambda}}{e^{-\pi i/\lambda}-1}-\frac{\omega^{1/\lambda}}{e^{\pi i/\lambda}-1}\right]-\frac{1}{4}\log\frac{\omega}{i}.$$

Damit haben wir den

Satz 2. *Für* $\operatorname{Im}(\omega)>0$ *gilt*

$$U_\lambda(\omega;0)-U_\lambda(-\omega^{-1};0)=\frac{1}{2}\log\frac{\omega}{i},\qquad 1<\lambda\equiv 1\ (2)$$

und für $\lambda=1$

$$U(\omega;0)-U(-\omega^{-1};0)=\frac{\pi i}{12}(\omega+\omega^{-1})+\frac{1}{2}\log\frac{\omega}{i}.$$

Letzteres ist das Analogon der Transformationsformel der *Dedekindschen η-Funktion*, ersteres eine Verallgemeinerung derselben (s. auch [4], § 3, b.)) und ([5], Abschnitt 2.3).

3.2. Der Fall $s=1$. Mit den Bezeichnungen von (1.8′) wird $k=-1$, also bleibt von der nach (1.12) zu berechnenden Summe in u_k, v_k kein Beitrag. Wegen (1.9$_5$) wird $\varepsilon_{-k-1}=\varepsilon_0=0$ für $s=1$ und

$$\varepsilon_{1/\lambda}=\begin{cases}1, & \lambda=1,\\ 0, & \lambda>1.\end{cases}$$

Damit sind für $\lambda,\mu>1$ nur die in u_{-1}, v_{-1} auftretenden Zusatzterme für $\alpha=0$ bzw. $\beta=0,1$ zu berücksichtigen, für $\lambda=1$ oder $\mu=1$ auch noch $\tilde u_1$ und $\tilde v_1$, letzteres ist aber Null (s. (1.12$_4$)). Führt man diese Rechnungen durch, so ergibt sich

$$\begin{aligned} U^*\left(\omega;1;{\alpha\atop\lambda},{\beta\atop\mu}\right)&=U\left(\omega;1;{\alpha\atop\lambda},{\beta\atop\mu}\right)-\\ &\quad-(\delta_{0\beta}+\delta_{1\beta})(1-\delta_{\lambda1})\,\xi(\lambda,\alpha)\,\omega^{-1}+2\pi i\delta_{\alpha0}\,\delta_{\mu1}\,l_0(\beta)-\\ &\quad-\frac{\delta_{\lambda1}}{\omega}\Big\{(1-\delta_{\beta0}-\delta_{\beta1})[\mu l_1(\beta)-\pi i(1-\mu)B_1(\beta)]-(\delta_{\beta0}+\delta_{\beta1})\times\\ &\qquad\times\left[\frac{\Gamma'}{\Gamma}(\alpha)+\log\big(-(2\pi)^\mu i\omega\big)\right]\Big\}.\end{aligned}$$

Wir wollen das im allgemeinen Fall nicht in (2.2) eintragen. Wesentliche Vereinfachungen ergeben sich im Falle $\lambda=\mu$. Für $\lambda=\mu=1$ erhält man durch Eintragen von U^* in (2.2) sofort den aus ([4], § 4,4) bekannten

Satz 3. *Für* $\operatorname{Im}(\omega)>0$, $0\leqslant\alpha,\beta\leqslant 1$ *gilt*

$$\begin{aligned} &U(\omega;1;\alpha,\beta)-U(\omega;1;1-\alpha,1-\beta)-\\ &\quad-\omega^{-1}[U(-\omega^{-1};1;1-\beta,\alpha)+U(-\omega^{-1};1;\beta,1-\alpha)]\\ &\qquad=-2\pi i[B_1(\alpha)+B_1(\beta)\omega^{-1}].\end{aligned}$$

Für $\lambda=\mu>1$ wird

$$U_\lambda^*(\omega;1;\alpha,\beta)=U_\lambda(\omega;1;\alpha,\beta)-(\delta_{\beta0}+\delta_{\beta1})\zeta(\lambda,\alpha)\omega^{-1}$$

und durch Eintragen in (2.4) erhält man in Verallgemeinerung von Satz 3 den

Satz 4. *Für* $\operatorname{Im}(\omega)>0$, $0\leqslant\alpha,\beta\leqslant 1$, $1<\lambda\equiv 1\ (2)$ *gilt*

$$\begin{aligned} &U_\lambda(\omega;1;\alpha,\beta)-U_\lambda(\omega;1;1-\alpha,1-\beta)-\\ &\quad-\omega^{-1}[U_\lambda(-\omega^{-1};1;1-\beta,\alpha)-U_\lambda(-\omega^{-1};1;\beta,1-\alpha)]\\ &=(\delta_{0\beta}+\delta_{1\beta})[\zeta(\lambda,\alpha)-\zeta(\lambda,1-\alpha)]\omega^{-1}+(\delta_{\alpha0}+\delta_{\alpha1})[\zeta(\lambda,\beta)-\zeta(\lambda,1-\beta)].\end{aligned}$$

3.3. Der Fall $s=2$. Zur Umrechnung von U^* auf U wird nach (1.8′) $k=-2$, also nach (1.9$_5$) $\varepsilon_{k+1}=\varepsilon_{-1}=0$,

$$\varepsilon_{1/\lambda}=\begin{cases}\tfrac{1}{2}, & \lambda=1,\\ 0, & \lambda>1.\end{cases}$$

und die Summen in u_{-2}, v_{-2} verschwinden, genauso wie $\tilde v_1$.

Wir benötigen also neben den von $\alpha=0$, $\beta=0,1$ herrührenden Zusatztermen in u_{-2}, v_{-2}, die wir mit (2) vereinfachen, nur den von $\tilde u_1$

herrührenden Anteil, also

$$\tfrac{1}{2}\lim_{s\to 2}\Gamma(s-1)\left[\zeta\big(\mu(s-1),\,\beta\big)+e^{\pi i(s-1)}\zeta\big(\mu(s-1),\,1-\beta\big)\right]\omega^{-1}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{(-2\pi i)^{\mu}l_{1-\mu}(\beta)}{2\Gamma(\mu)\,\omega}, & 0<\beta<1 \text{ und } \mu=1,\beta=0,1,\\ 0, & \mu>1,\ \beta=0.\end{cases}$$

Also wird

$$U^*\left(\omega;2;\begin{matrix}\alpha, & \beta\\ \lambda, & \mu\end{matrix}\right)=U\left(\omega;2;\begin{matrix}\alpha, & \beta\\ \lambda, & \mu\end{matrix}\right)-\delta_{\alpha 0}\frac{(-2\pi i)^{2\mu}l_{1-2\mu}(\beta)}{\Gamma(2\mu)}-$$

$$-(\delta_{0\beta}+\delta_{1\beta})\zeta(2\lambda,\,\alpha)\,\omega^{-2}-\tau_{\mu}\frac{(-2\pi i)^{\mu}}{2\Gamma(\mu)\,\omega}l_{1-\mu}(\beta),$$

$$\tau_{\mu}=\begin{cases}0, & \beta=0,1,\ \mu>1.\\ 1, & \text{sonst}.\end{cases}$$

Mit dem so berechneten U^* gilt wieder (2.2). Eine Vereinfachung ergibt sich wieder für $\lambda=\mu$. Wir notieren den bekannten Sonderfall $\lambda=\mu=1$. Wenn man noch (s. [2], S. 31, (17,18))

$$l_n(x)+(-1)^n l_n(1-x)=\begin{cases}-\dfrac{(2\pi i)^n}{n!}B_n(x), & n=0,1,\ldots,\\ 0, & n=-1,-2,\ldots\end{cases}$$

verwendet, so erhält man nach kurzer Rechnung den

Satz 5. *Für* $\mathrm{Im}(\omega)>0$ *und* $0\leqslant\alpha,\beta\leqslant 1$ *gilt*

$$U(\omega;2;\alpha,\beta)+U(\omega;2;1-\alpha,1-\beta)-$$
$$-\omega^{-2}\left[U(-\omega^{-1};2;1-\beta,\alpha)+U(-\omega^{-1};2;\beta,1-\alpha)\right]-2\pi i\omega^{-1}=0.$$

Das ist ([4], § 4, 3.)).

Eine weitere Vereinfachung ergibt sich für $\lambda=\mu\equiv 1\,(2)$, $\alpha=1$, $\beta=0$. Hier lautet die Funktionalgleichung (2.4) wegen § 1 einfach

$$U_{\lambda}^*(\omega;2)=\omega^{-2}U_{\lambda}^*(-\omega^{-1};2)$$

und es wird

$$U_{\lambda}^*(\omega;2)=U_{\lambda}(\omega;2)-\zeta(2\lambda)\,\omega^{-2}-\frac{\pi i}{2}\,\delta_{\lambda 1}\omega^{-1}.$$

Damit hat man den

Satz 6. *Für* $\mathrm{Im}(\omega)>0$ *und* $0<\lambda\equiv 1\,(2)$ *gilt*

$$U_{\lambda}(\omega;2)-\omega^{-2}U_{\lambda}(-\omega^{-1};2)=\zeta(2\lambda)\left[\omega^{-2}-1\right]+\pi i\delta_{\lambda 1}\omega^{-1}.$$

Das ist für $\lambda=1$ das Ergebnis ([4], § 3, c.)), das *Guinand* in [6] auf andere Art bewies.

3.4. Der Fall $s=p+2$, $0<p\equiv 0\,(1)$. In diesem Falle ist U^* leicht anzugeben, da es sich von U nur um die von $\alpha=0$ und $\beta=0,1$ herrührenden Anteile unterscheidet. So wird

$$U^*\left(\omega;p+2;\begin{matrix}\alpha, & \beta\\ \lambda, & \mu\end{matrix}\right)=U\left(\omega;p+2;\begin{matrix}\alpha, & \beta\\ \lambda, & \mu\end{matrix}\right)-\delta_{\alpha 0}[\varphi_{\mu}(p+2,\,\beta)+$$
$$+(-1)^{\mu}\varphi_{\mu}(p+2,\,1-\beta)]-(\delta_{0\beta}+\delta_{1\beta})\varphi_{\lambda}(p+2,\,\alpha)\,\omega^{-p-2}.$$

Trägt man das in (2.2) ein, so erhält man eine Funktionalgleichung, die aus (2.2) entsteht, indem man U^* durch U ersetzt und $n=p+2$ wählt. Besonders einfach wird diese Funktionalgleichung im Sonderfall $\lambda=\mu\equiv 1\,(2)$. Dann gilt der

Satz 7. *Für* $\mathrm{Im}(\omega)>0,\ 0\leqslant\alpha,\beta\leqslant 1$ *gilt*

$$U_{\lambda}(\omega;p+2;\alpha,\beta)+(-1)^p U_{\lambda}(\omega;p+2;1-\alpha,1-\beta)$$
$$=\omega^{-p-2}\left[U_{\lambda}(-\omega^{-1};p+2;1-\beta,\alpha)+(-1)^p U_{\lambda}(-\omega^{-1};p+2;\beta,1-\alpha)\right].$$

Für $\lambda=1$ ist das ([4], § 4, (6)).

Eine weitere Vereinfachung ergibt sich im Falle gerader $s=2(m+1)$, $0<m\equiv 0\,(1)$ und $\lambda=\mu\equiv 1\,(2)$, $\alpha=1$, $\beta=0$. Hier wird nach (2.4)

$$U_{\lambda}^*(\omega;2m+2)=\omega^{-2m-2}U_{\lambda}^*(-\omega^{-1};2m+2)$$

und

$$U_{\lambda}^*(\omega;2m+2)=U_{\lambda}(\omega;2m+2)-\varphi_{\lambda}(2m+2)\,\omega^{-2m-2}.$$

Damit gilt der

Satz 8. *Für* $\mathrm{Im}(\omega)>0$ *gilt*

$$U_{\lambda}(\omega;2m+2)-\omega^{-2m-2}U_{\lambda}(-\omega^{-1};2m+2)=\varphi_{\lambda}(2m+2)\left[\omega^{-2m-2}-1\right].$$

Für $\lambda=1$ ist das, in etwas veränderter Bezeichnung, die Beziehung ([4], § 3, c.)).

3.5. Der Fall $s=-p,\ 0<p\equiv 0\,(1)$. In diesem Falle wollen wir die zugehörigen Rechnungen nicht durchführen, sondern nur bemerken, daß man Verallgemeinerungen der Funktionalgleichungen ([4], § 4, (2), (5)) und ([4], § 3, d.)) erhält, deren erste für $\lambda=\mu=1$ in [7] von Iseki hergeleitet wurde und in [1] von Apostol neu bewiesen wurde. Wir geben die Ergebnisse an:

Satz 9. *Für* $\operatorname{Im}(\omega) > 0$, $0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 1$, $0 < p \equiv 0\ (1)$ *gilt*

$$U(\omega; -p; \alpha, \beta) + (-1)^p U(\omega; -p; 1-\alpha, 1-\beta) - \\ -\omega^p[U(-\omega^{-1}; -p; 1-\beta, \alpha) + (-1)^p U(-\omega^{-1}; -p; \beta, 1-\alpha)] \\ = \frac{2\pi i}{(p+2)!} \sum_{\nu=0}^{p+2} \binom{p+2}{\nu} B_\nu(\alpha) B_{p+2-\nu}(\beta)\, \omega^{\nu-1}.$$

Satz 10. *Für* $0 < m \equiv 0\ (1)$, $\operatorname{Im}(\omega) > 0$, $0 < \lambda \equiv 1\ (2)$ *gilt*

$$U_\lambda(\omega; -2m) - \omega^{2m} U_\lambda(-\omega^{-1}; -2m) = \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!} \pi i \delta_{\lambda 1}(\omega^{2m+1} + \omega^{-1}) + \\ + \frac{\lambda}{2} \frac{(2\lambda m)!}{(2m)!} \zeta(1+2\lambda m)(2\pi i)^{-2m\lambda}(\omega^{2m} - 1) + \\ + \sum_{\nu=1}^{m-1} \left\{ \frac{B_{\lambda\nu+1} \pi i \left[(1-\lambda)\zeta(\lambda(\nu-2m)) + \lambda(\lambda(2m-\nu))!\,(2\pi i)^{\lambda(\nu-2m)} \zeta(1+\lambda(2m-\nu))\right]}{\nu!\,(2m-\nu)!\,(\lambda\nu+1)} \times \right. \\ \left. \times (\omega^\nu + \omega^{2m-\nu}) \right\} + \\ + \frac{(-1)^m + 1}{2} \cdot \frac{B_{\lambda m+1}[\pi i(1-\lambda)\zeta(-\lambda m) + \lambda(\lambda m)!\,(2\pi i)^{-\lambda m} \zeta(1+\lambda m)]}{(m!)^2(\lambda m+1)} \omega^m.$$

Für den Vergleich mit bekannten Spezialfällen denke man immer an die Lambertreihendarstellung aus ([5], § 3) und die Beziehung

$$(-2\pi i)^{s-1} U(\omega; 1-s; \alpha, \beta) = L_{-s}(\omega; \alpha, \beta)$$

die in [4] Verwendung fand.

Schlußbemerkungen. Zusammenfassend kann man sagen, daß in dieser Arbeit durch die Einführung von Funktionen, die dem Problem angepaßt sind und die allgemein genug sind, alle bekannten Spezialfälle zu umfassen, eine *äußerst durchsichtige Herleitung aller bekannten Reziprozitätsgesetze aus einer einheitlichen Grundlage heraus gelingt.* Das daneben eine Vielzahl allgemeinerer Beziehungen hergeleitet wurden, ist bei der Art unseres Vorgehens selbstverständlich. Durch die Einführung der Funktionen U^*, Q^* vereinfachten sich auch die Formeln wesentlich. Erst die Rückführung auf die bekannteren Funktionen U und Q vergrößerte den Schreibaufwand. Die so aufgeschriebenen Formeln erlaubten dann aber den Vergleich mit bekannten Darstellungen. Es ist selbstverständlich, daß aus (I, (2.4)) und deren Spezialfällen durch Eintragen der asymptotischen Entwicklung von Q^* für $\omega \to 0$ auch *asymptotische Funktionalgleichungen* aufgeschrieben werden können, die Sätze aus ([4], § 2, 3)

verallgemeinern und für $\lambda = \mu = 1$ bzw. $\lambda = \mu = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$ auf diese zurückfallen.

Schließlich sei noch erwähnt, daß der Untersuchung der Funktionen Q und U im Teil I mehr Raum gegeben wurde, als nötig gewesen wäre, um die Ergebnisse des Teis II zu gewinnen. Maßgebend für diese Darstellung war die Erzielung einer gewissen Vollständigkeit und die Herstellung des Zusammenhangs mit bekannten Resultaten. Mit wenigen Bemerkungen wurde die Darstellung unserer Funktionen als *verallgemeinerte Lambertreihe* abgetan (s. I, 2.3). Diese historisch wichtigen Darstellungen waren für die Herleitung unserer Ergebnisse nicht nötig. Der Untersuchung der hier auftretenden verallgemeinerten Lambertreihen war eine Diplomarbeit gewidmet, deren Ergebnisse an anderer Stelle veröffentlicht werden.

Literatur

[1] T. M. Apostol, *A short proof of Shô Isekis functional equation*, Proc. Amer. Math. Soc. 15 (1964), S. 618–622.

[2] H. Bateman, *Higher transcendental functions, I*, New York 1953.

[3] H.-J. Glaeske, *Funktionalgleichungen von Gitterfunktionen*, Math. Nachr. 32 (1966), S. 95–105.

[4] — *Eine asymptotische Funktionalgleichung für eine Funktion eines ebenen Halbgitters*, J. Math. Soc. Japan 18 (1966), S. 353–366.

[5] — *Eine einheitliche Herleitung einer gewissen Klasse von Transformationsformeln der analytischen Zahlentheorie* (I), im Druck.

[6] A. P. Guinand, *Functional equations and selfreciprocal functions connected with Lambert series*, Quart. J. Oxford Ser. 15 (1944), S. 11–23.

[7] Shô Iseki, *The transformation formula for the Dedekind modular function and related functional equations*, Duke Math. J. 24 (1957), S. 653–662.

SEKTION MATHEMATIK DER FRIEDRICH-SCHILLER-UNIVERSITÄT
Jena

Eingegangen 5. 8. 1970 (117)