[7] F. Schweiger, *Induzierte Maße bei zahlentheoretischen Transformationen*, Monatshefte f. Math. 75 (1971), S. 57–64.
[8] — *Normalität bezüglich zahlentheoretischen Transformationen*, J. Number Theory 1 (1969), S. 390–397.
[9] M. Smorodinsky, *Singular measures and Hausdorff measures*, Israel J. Math. 7 (1969), S. 203–205.
[10] H. Stradner, Dissertation, Wien 1970.
[11] H. Wegmann, *Über den Dimensionsbegriff in Wahrscheinlichkeitsräumen*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 9 (1968), S. 222–231.

MATHEMATISCHES INSTITUT der UNIVERSITÄT SALZBURG

Eingegangen 11. 7. 1970 (105)

ACTA ARITHMETICA
XX (1972)

Eine einheitliche Herleitung einer gewissen Klasse von Transformationsformeln der analytischen Zahlentheorie (I)

von

HANS-JÜRGEN GLAESKE (Jena)

In der analytischen Zahlentheorie spielen die Modultransformationen gewisser *Lambertscher Reihen* seit langem eine bedeutende Rolle. Klassisch ist die Transformationsformel der *Dedekindschen Funktion* $\eta(\tau)$, die τ nach $-\tau^{-1}$ transformiert. Die Wichtigkeit der Untersuchung des Verhaltens gewisser Funktionen bei der Modultransformation $\tau' = -\tau^{-1}$ besteht bekanntlich darin, daß diese Reziprozitätsgesetze Hilfsmittel bei der Herleitung asymptotischer Aussagen in der additiven Zahlentheorie sind. Man denke etwa an die Ergebnisse von Hardy, Wright, Rademacher und Iseki in der Theorie der *uneingeschränkten Zerfällungen*. Aber auch in anderen Gebieten der Zahlentheorie fanden Reziprozitätsgesetze spezieller Lambertreihen Anwendung. Hier sei z. B. an die Abschätzung der *quadratischen* bzw. *biquadratischen Mittelwerte* der *Riemannschen Zetafunktion* durch Atkinson bzw. Bellman mittels der *Wigertschen asymptotischen Funktionalgleichung* für die Lambertsche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{-2\pi i n\omega}-1}$$

erinnert.

Die Bedeutung solcher Reziprozitätsgesetze spiegelt sich in einer Vielzahl von Veröffentlichungen wieder, die sich über die letzten 60 Jahre gleichmäßig verteilen. Genannt seien hier z. B. die Arbeiten von Wigert (Acta Math. 41, 1911), Landau (Arch. d. Math. u. Phys. 27, 1928), Kluyver (1921), und in letzter Zeit die Veröffentlichungen von Guinand (Quart. Journ. Oxf. Ser. XV, 1944), Fischer (Pacific Journ. Math. 1, 1951), Siegel (Mathematika 1, 1954), Rademacher (Journ. Ind. Math. Soc. N. S. 19, 1955), Iseki ([7], [8]), und Apostol (Duke Math. Journ. 17, 1950, Proc. Am. Math. Soc. 15, 1964).

All diesen Arbeiten ist gemeinsam, daß sie die Darstellung der zu untersuchenden Funktionen als Lambertreihe oder, wie bei Iseki, als verallgemeinerte Lambertreihe zum Ausgangspunkt der Betrachtungen wählen. In [6] habe ich mit einem Verfahren von Siegel gewisse Verallgemeinerungen der bekannten Funktionalgleichungen bewiesen. Hilfsmittel waren damals Verallgemeinerungen der von Maier in Math. Annalen 113 (1936) eingeführten Gitterfunktionen. Entscheidend für die Tragfähigkeit der damals benutzten Methode war die analytische Abhängigkeit der untersuchten Funktionen von einer komplexen Variablen s. Durch Spezialisierung auf ganzzahlige s erhielt man eine Reihe bekannter und neuer Funktionalgleichungen. In dieser Arbeit sollen Verallgemeinerungen der früher untersuchten Funktionen betrachtet werden. In den ersten zwei Paragraphen untersuchen wir Verallgemeinerungen der oben erwähnten Gitterfunktionen und der in [5] betrachteten Funktionen $V(\omega; s; \alpha, \beta)$ und $H(\omega; s; \alpha, \beta)$, nämlich $Q\left(\omega; s; {\alpha\, \beta \atop \lambda, \mu}\right)$ und $U\left(\omega; s; {\alpha\, \beta \atop \lambda, \mu}\right)$. Die Einführung neuer Parameter gibt uns die Möglichkeit durch Spezialisierung alle in dieser Richtung bekannten Ergebnisse wiederzufinden. Entscheidend für die einheitliche Herleitung der erwähnten Reziprozitätsgesetze erweist sich ein Zusammenhang zwischen den Funktionen U und Q (s. (2.11)), der sich im wesentlichen aus der Theorie der Gitterfunktionen überträgt. In Paragraph 3 werden diese Funktionen so abgeändert, daß die Polstellen bezgl. der Variablen s verschwinden. Diese Funktionen Q^* und U^* haben aber die bemerkenswerte Eigenschaft, daß sich der Zusammenhang zwischen Q und U auf Q^* und U^* ungeändert überträgt. Hiermit schließt Teil I.

Allein dieser Zusammenhang wird es uns in Teil II erlauben, Verallgemeinerungen der Ergebnisse von [6] durch einfache Spezialisierung der Variablen s herzuleiten und damit alle in dieser Richtung bekannten Reziprozitätsgesetze wiederzufinden.

§ 1

1.1. In Verallgemeinerung von [5] betrachten wir die Funktion

$$Q\left(\omega; s; {\alpha\, \beta \atop \lambda, \mu}\right) = \Gamma(s) \sum_{g,h=0}^{\infty} [\omega(g+\alpha)^{\lambda} + (h+\beta)^{\mu}]^{-s} \tag{1}$$

für

$$\mathrm{Re}(s) = \sigma > \lambda^{-1}+\mu^{-1}; \quad |\arg(\omega)| < \pi; \quad 0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 1, \ \alpha+\beta \neq 0; \quad \lambda, \mu > 0. \tag{2}$$

Nach einem bekannten Satz von Eisenstein (Journal f. Math., XXXV (1847), S. 165) konvergiert diese Reihe unter den Voraussetzungen (2) in jedem endlichen Teilbereich von $|\arg(\omega)| < \pi$ absolut und gleichmäßig.

Unmittelbar aus (1) ergeben sich die folgenden Symmetrieeigenschaften

$$Q\left(\omega^{-1}; s; {\alpha\, \beta \atop \lambda, \mu}\right) = \omega^{s} Q\left(\omega; s; {\beta\, \alpha \atop \mu, \lambda}\right) \tag{3}$$

und

$$Q\left(-\omega^{-1}; s; {\alpha\, \beta \atop \lambda, \mu}\right) = \begin{cases} e^{-\pi i s}\omega^{s} Q\left(-\omega; s; {\beta\, \alpha \atop \mu, \lambda}\right), & 0 \leqslant \arg(\omega) \leqslant \pi, \\ e^{\pi i s}\omega^{s} Q\left(-\omega; s; {\beta\, \alpha \atop \mu, \lambda}\right), & -\pi < \arg(\omega) < 0. \end{cases} \tag{4}$$

1.2. Zur Herleitung einer ersten *Integraldarstellung* für Q betrachten wir die Hilfsfunktion

$$\chi\left(u; {\alpha \atop \lambda}\right) = \sum_{g=0}^{\infty} \exp(-(g+\alpha)^{\lambda} u) \tag{5}$$

unter den Bedingungen $\lambda > 0$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $\mathrm{Re}(u) > 0$.

Nun ist

$$e^{-au} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\varepsilon)} a^{-s}\Gamma(s) u^{-s} ds = \mathfrak{M}(a^{-s}\Gamma(s); u), \quad \mathrm{Re}(a) > 0, \tag{6}$$

wobei, wie auch im folgenden, ε eine beliebige positive Zahl bedeute und das Integral längs der Vertikalen durch ε von $\varepsilon - i\infty$ bis $\varepsilon + i\infty$ zu erstrecken ist. Wendet man das auf (5) an, so erhält man nach der (erlaubten) Vertauschung von Summation und Integration

$$\chi\left(u; {\alpha \atop \lambda}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\lambda^{-1}+\varepsilon)} u^{-s} \varphi_{\lambda}(s; \alpha) ds + \delta_{\alpha 0} \tag{7}$$

wobei $\delta_{\alpha 0}$ das *Kroneckersymbol* sei und, wie auch weiterhin,

$$\varphi_{\lambda}(s, \alpha) = \Gamma(s)\zeta(\lambda s, \alpha), \quad 0 < \alpha \leqslant 1, \ \zeta(s, 0) = \zeta(s)$$

und $\zeta(s, \alpha)$, $\zeta(s, 1) = \zeta(s)$ die *Hurwitzsche* bzw. *Riemannsche Zetafunktion* seien (s. etwa [2]).

Wendet man auf die Summanden von (1) mit $a = \omega(g+\alpha)^{\lambda} + (h+\beta)^{\mu}$ die durch *Mellinsche Integralumkehr* aus (6) folgende Beziehung

$$a^{-s}\Gamma(s) = \mathfrak{M}^{-1}(e^{-au}; s), \quad \mathrm{Re}(a) > 0,$$

an, so erhält man nach Vertauschung von Summation und Integration

$$Q\left(\omega; s; {\alpha\, \beta \atop \lambda, \mu}\right) = \mathfrak{M}\left(\chi\left(\omega u; {\alpha \atop \lambda}\right)\chi\left(u; {\beta \atop \mu}\right); s\right). \tag{8}$$

Wegen $\mathrm{Re}(a) > 0$ hat man in Verschärfung von (2) noch zu fordern: $|\arg(\omega)| < \pi/2$. Die Konvergenz des Integrals für $\sigma > \lambda^{-1}+\mu^{-1}$ ergibt sich aus dem Verhalten von χ bei $u = 0$. Durch Linksverschieben des Integrationsweges in (7) über die Polstelle $u = \lambda^{-1}$ des Integranden ergibt sich nach ([3], Satz 2, S. 116) nämlich

$$\chi\left(u; \begin{matrix} a \\ \lambda \end{matrix}\right) = \Gamma(1+\lambda^{-1})u^{-1/\lambda} + \delta_{a0} + O(u^{\eta}), \quad 0 < \eta < 1, \ u \to 0.$$

Die Integraldarstellung (8) wurde in [5] im Falle $\lambda = \mu = 1$ zur analytischen Fortsetzung von Q bzgl. s verwendet. Dasselbe Verfahren ist hier nicht anwendbar, da die im Integranden auftretenden Funktionen $\chi\left(u, \begin{matrix} a \\ \lambda \end{matrix}\right)$ für $\lambda \neq 1$ und für $\mathrm{Re}(u) < 0$ gar nicht definiert zu sein brauchen.

1.3. Zwecks *analytischer Fortsetzung* von Q bzgl. s beachten wir, daß nach (7) gilt

$$\varphi_\lambda(s, a) = \mathfrak{M}\left(\chi\left(u; \begin{matrix} a \\ \lambda \end{matrix}\right); s\right).$$

Nun kann man den komplexen Faltungssatz für Mellintransformationen (s. etwa [4], S. 414, Satz 4) anwenden. Es ergibt sich sofort

$$(9) \quad Q\left(\omega; s; \begin{matrix} a & \beta \\ \lambda, & \mu \end{matrix}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(c)} \omega^{-u} \varphi_\lambda(u, a)\varphi_\mu(s-u, \beta)\, du$$
$$= \mathfrak{M}^{-1}\big(\varphi_\lambda(u, a)\varphi_\mu(s-u, \beta); \omega\big), \quad \lambda^{-1} < c < \sigma - \mu^{-1}$$

falls man vorerst neben (2) noch $a\beta > 0$ fordert. Die Fälle $a = 0$ oder $\beta = 0$ lassen sich auf die Fälle $a = 1$ bzw. $\beta = 1$ zurückführen, da nach (1) gilt

$$(10_1) \qquad Q\left(\omega; s; \begin{matrix} 0 & \beta \\ \lambda, & \mu \end{matrix}\right) = Q\left(\omega; s; \begin{matrix} 1 & \beta \\ \lambda, & \mu \end{matrix}\right) + \varphi_\mu(s, \beta), \quad \beta \neq 0,$$

bzw.

$$(10_2) \qquad Q\left(\omega; s; \begin{matrix} a & 0 \\ \lambda, & \mu \end{matrix}\right) = Q\left(\omega; s; \begin{matrix} a & 1 \\ \lambda, & \mu \end{matrix}\right) + \varphi_\lambda(s, a)\,\omega^{-s}, \quad a \neq 0.$$

Im Hinblick auf spätere Anwendungen wollen wir Q auch für $a = \beta = 0$ einen Sinn zulegen:

$$(10_3) \qquad Q\left(\omega; s; \begin{matrix} 0 & 0 \\ \lambda, & \mu \end{matrix}\right) = Q\left(\omega; s; \begin{matrix} 1 & 1 \\ \lambda, & \mu \end{matrix}\right) + \varphi_\mu(s) + \varphi_\lambda(s)\,\omega^{-s}.$$

Man überzeugt sich sofort, daß (3.4) auch für diesen Fall Gültigkeit haben.

1.4. Die Darstellung (9) erlaubt es uns auf Grund der Sätze 4 aus ([4], S. 414) und 1 aus ([3], S. 137) die *Singularitäten* von Q bzgl. s aus denen von $\varphi_\lambda(s, a)$ und $\varphi_\mu(s, \beta)$ zu bestimmen.

Damit kann man die analytische Fortsetzung von Q in die gesamte s — Ebene vornehmen.

Da $\omega^{-s}\varphi_\lambda(s, a)$ einfache Polstellen bei

$$s'_1 = \lambda^{-1} \quad \text{und} \quad s'_{-\nu} = -\nu, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots$$

mit bzw. den Residuen

$$r'_1 = \Gamma(1+\lambda^{-1})\,\omega^{-1/\lambda}; \quad r'_{-\nu} = \frac{(-1)^\nu}{\nu!}\zeta(-\lambda\nu, a)\,\omega^\nu$$

und $\varphi_\mu(s, \beta)$ einfache Polstellen bei

$$s''_1 = \mu^{-1} \quad \text{und} \quad s''_{-\varrho} = -\varrho, \quad \varrho = 0, 1, 2, \ldots$$

mit bzw. den Residuen

$$r''_1 = \Gamma(1+\mu^{-1}); \quad r''_{-\varrho} = \frac{(-1)^\varrho}{\varrho!}\zeta(-\mu\varrho, \beta)$$

besitzt, haben wir den

Satz. *Q ist eine meromorphe Funktion von s. Q hat einfache Polstellen bei $s_{\nu\varrho} = s'_\nu + s''_\varrho$ mit den Residuen $r'_\nu r''_\varrho$ (s.o.). Falls $s_{\nu\varrho} = s_{\nu'\varrho'}$ für $(\nu, \varrho) \neq (\nu', \varrho')$ so sind alle zugehörigen Residuen zu addieren. Für $a\beta = 0$ sind die sich zusätzlich aus (10_1)–(10_3) ergebenden Polstellen zu berücksichtigen $(\nu, \varrho = 1, 0, -1, -2, \ldots)$.*

§ 2

2.1. In Verallgemeinerung von ([5], § 1, (1)) definieren wir die Funktion

$$(1) \qquad U\left(\omega; s; \begin{matrix} a & \beta \\ \lambda, & \mu \end{matrix}\right) = \Gamma(s) \sum_{g=-\infty}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} [(g+\beta)^\mu + \omega(h+a)^\lambda]^{-s}$$

für

$$(2) \quad \begin{aligned} &\sigma > \lambda^{-1}+\mu^{-1}; \quad \lambda, \mu > 0, \ \mu = \mu_0 + 2k, \ 0 \leqslant \mu_0 < 2, \ 0 \leqslant k \equiv 0(1); \\ &0 \leqslant a, \beta \leqslant 1, \ a + \beta(1-\beta) \neq 0; \quad \pi(\mu_0 - 1) < \arg(\omega) < \pi. \end{aligned}$$

Wie in § 1 beweist man die Konvergenz der Reihe (1) in jedem endlichen Teilbereich von $\pi(\mu_0 - 1) < \arg(\omega) < \pi$.

Nach (1) und (1.1) gilt

$$U = \sum_{g=-1}^{-\infty} \sum_{h=0}^{\infty} [(g+\beta)^\mu + \omega(h+a)^\lambda]^{-s} + Q$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} \{(-1)^\mu [(m+1-\beta)^\mu + (-1)^\mu \omega(h+a)^\lambda]\}^{-s} + Q.$$

Wegen

$$\arg_0(-1)^{\overset{+}{(-)}\mu} = \begin{cases} \overset{+}{(-)}\pi\mu_0, & 0 \leqslant \mu_0 \underset{(\leqslant)}{\overset{<}{}} 1, \\ \overset{+}{(-)}\pi(\mu_0-2), & 1 \underset{(\leqslant)}{\overset{<}{}} \mu_0 < 2 \end{cases}$$

gilt für die eckige Klammer in der ersten Summe $-\pi < \arg_0[\ \ ] < \pi(1-\mu_0)$. Weiter ist

$$\pi(\mu_0-1) < \arg_0(-1)^{\mu} + \arg_0[\ \ ] < \pi, \qquad 0 \leqslant \mu_0 \leqslant 1,$$
$$\pi(\mu_0-3) < \arg_0(-1)^{\mu} + \arg_0[\ \ ] < -\pi, \qquad 1 < \mu_0 < 2.$$

Damit wird

$$\{\ \}^{-s} = e^{-\pi i \mu_0 s}[\ \ ]^{-s}$$

und wir erhalten die Funktionalgleichung

$$(3)\qquad U\left(\omega; s; \begin{matrix}\alpha, & \beta \\ \lambda, & \mu\end{matrix}\right) = Q\left(\omega; s; \begin{matrix}\alpha, & \beta \\ \lambda, & \mu\end{matrix}\right) + e^{-\pi i \mu_0 s} Q\left(e^{-\pi i \mu_0}\omega; s; \begin{matrix}\alpha, & 1-\beta \\ \lambda; & \mu\end{matrix}\right).$$

Da die rechte Seite von (3) für alle s einen Sinn hat, kann (3) zur analytischen Fortsetzung von U bzgl. s verwendet werden. Mit dem Satz aus § 1 ergibt sich der

Satz 1. *U ist eine meromorphe Funktion von s mit höchstens einfachen Polstellen in der endlichen s-Ebene.*

2.2. Der Zusammenhang (6) in Verbindung mit der Integraldarstellung (1.8) liefert sofort eine *Integraldarstellung* für U:

$$(4)\qquad U = \frac{1}{2\pi i}\int_{(c)} \omega^{-u}\varphi_\lambda(u, \alpha)[\varphi_\mu(s-u, \beta) + e^{\pi i \mu_0(u-s)}\varphi_\mu(s-u, 1-\beta)]\,du,$$
$$\lambda^{-1} < c < \sigma - \mu^{-1},$$

wobei neben (2) noch zusätzlich $\alpha\beta(1-\beta) \neq 0$ gelte. Die Fälle $\alpha = 0$ oder $\beta(1-\beta) = 0$ lassen sich vermöge (3) und (1.10_1)–(1.10_3) erledigen. Damit hat man auch die Möglichkeit die Funktion U für $\alpha = \beta(1-\beta) = 0$ zu definieren:

$$(5)\qquad U\left(\omega; s; \begin{matrix}0, & 0 \\ \lambda, & \mu\end{matrix}\right) = U\left(\omega; s; \begin{matrix}1, & 0 \\ \lambda, & \mu\end{matrix}\right) + \varphi_\mu(s)(1 + e^{-\pi i \mu_0 s}).$$

Die wichtige Funktionalgleichung (3) bleibt auch für diesen Fall richtig, wie man sofort nachrechnet.

Bemerkungen. 1. Der Gültigkeitsbereich von (4) bzgl. s läßt sich dadurch vergrößern, daß man den Weg in eine von $-i\infty$ nach $+i\infty$ laufende Kurve deformiert, die rechts von λ^{-1} und links von $s-\mu^{-1}$ verläuft. Dann gilt sie für alle $s \notin (-\infty, \lambda^{-1}+\mu^{-1}]$.

2. Eine Vereinfachung von (4) ergibt sich für $0 < \mu < 2$. Dann ist $\mu = \mu_0$ und man kann die *Lerchsche Funktionalgleichung* (s. [2], S. 29, (7))

$$\varphi(s, x) + e^{-\pi i s}\varphi(s, 1-x) = (-2\pi i)^s l_{1-s}(x), \qquad 0 < x < 1$$

verwenden.

Hier ist $l_s(x)$ der für $\sigma > 0$ durch

$$l_s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i x n}}{n^s}$$

definierte *Polylogarithmus*. Man erhält

$$(6)\qquad U = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\lambda^{-1})+,(s-\mu^{-1})-} \omega^{-u}\varphi_\lambda(u, \alpha)(-2\pi i)^{\mu(s-u)} l_{1-\mu(s-u)}(\beta) \times$$
$$\times \frac{\Gamma(s-u)}{\Gamma(\mu(s-u))}\,du + (\delta_{0\beta} + \delta_{1\beta})\varphi_\lambda(s, \alpha)\,\omega^{-s} + \delta_{\alpha 0}(-2\pi i)^{\mu s} l_{1-\mu s}(\beta)\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(\mu s)}.$$

3. Wird speziell $\mu = 1$ gewählt, so tritt im Integranden von (6) rechts vom Wege nur die Polstelle $u = s$ auf und diese auch nur, falls $\beta(1-\beta) = 0$ ist. Schiebt man den Weg über diese Polstelle hinweg und wählt ihn so, daß für alle s die Polstellen des Integranden links vom Wege liegen, also etwa (c) mit $c > \operatorname{Max}(\lambda^{-1}, \sigma)$, so erhält man für

$$(7)\qquad 0 < \arg(\omega) < \pi; \quad 0 < \lambda; \quad 0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 1$$

und alle s die Darstellung

$$(6_1)\qquad U\left(\omega; s; \begin{matrix}\alpha, & \beta \\ \lambda, & 1\end{matrix}\right)$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{(|\sigma| + \lambda^{-1}+1)} \omega^{-u}(-2\pi i)^{s-u}\varphi_\lambda(u, \alpha) l_{1+u-s}(\beta)\,du + \delta_{\alpha 0}(-2\pi i)^s l_{1-s}(\beta).$$

Das ist für $\lambda = 1$ das Ergebnis aus ([6], § 1, (3′, 4′)) und wie dort schließt man aus (6_1) den

Satz 2. *$U\left(\omega; s; \begin{matrix}\alpha, & \beta \\ \lambda, & 1\end{matrix}\right)$ ist für (7) und $\alpha + \beta(1-\beta) \neq 0$ eine ganze transzendente Funktion von s. $U\left(\omega; s; \begin{matrix}0, & 0 \\ \lambda, & 1\end{matrix}\right) = U\left(\omega; s; \begin{matrix}0, & 1 \\ \lambda, & 1\end{matrix}\right)$ ist eine meromorphe Funktion von s. Sie besitzt einen einfachen Pol mit dem Residuum -1 bei $s = 0$.*

2.3. In den Anwendungen für die Zahlentheorie spielen die Darstellungen von Spezialfällen der Funktion U als Lambertreihen oder verallgemeinerte Lambertreihen eine besondere Rolle. Bei uns ist das nicht der Fall. Trotzdem wollen wir, wenigstens in Spezialfällen, den Zusammenhang herstellen.

Trägt man in (6_1) für $\zeta(\lambda u, a)$ und für $l_{1+u-s}(\beta)$ ihre Reihendarstellungen ein und vertauscht man die Reihenfolge von Integration und Summation, so ergibt sich

$$U\left(\omega; s; {\alpha \atop \lambda}, {\beta \atop 1}\right)$$
$$= (-2\pi i)^s \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i k\beta}}{2\pi i k^{s-1}} \int\limits_{(|\sigma|+\lambda^{-1}+1)} [-2\pi i\, \omega (m+a)^\lambda k]^{-u} \Gamma(u)\, du +$$
$$+\delta_{a0}(-2\pi i)^s l_{1-s}(\beta).$$

Mit (1.6) ergibt das den

SATZ 3. *Für*

$$(8_1) \qquad 0 < \arg(\omega) < \pi; \quad 0 < \lambda; \quad 0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 1$$

gilt

$$(9_1) \qquad U\left(\omega; s; {\alpha \atop \lambda}, {\beta \atop 1}\right) = (-2\pi i)^s \sum_{m=0}^{\infty} l_{1-s}\big((m+a)^\lambda \omega + \beta\big).$$

Man beachte, daß für $a = 0$ nach Vereinbarung die Hurwitzsche durch die Riemannsche Zetafunktion zu ersetzen ist und daß der Term δ_{a0} in diesem Falle das Glied der Summe für $m = 0$ beisteuert.

Für $s = 0$ ist das die Darstellung in [8], speziell für $\lambda = 1$ die in [7]. Letztere läßt sich noch in eine etwas andere Form bringen, wenn man für l_{1-s} die Reihendarstellung einträgt und die Reihenfolge der Summationen vertauscht. Dann erhält man durch Aufsummieren einer geometrischen Reihe sofort

$$(9_2) \qquad U = (-2\pi i)^s \sum_{k=1}^{\infty} k^{s-1} \frac{e^{2\pi i k(a\omega+\beta)}}{1-e^{2\pi i k\omega}}$$

für

$$(8_2) \qquad 0 < \arg(\omega) < \pi; \quad 0 \leqslant a, \beta \leqslant 1; \quad \sigma < 0 \text{ f. } a = 0.$$

Diese Darstellung macht die Bezeichnung verallgemeinerte Lambertreihe verständlich. Für $a = \beta = 1$ erhält man die bekannten in [9] untersuchten Reihen, die für spezielle ganzzahlige s in [6] diskutiert wurden.

Eine Verallgemeinerung von (2) auf U liegt auf der Hand. Man trage in (4) die Reihenentwicklungen von φ_λ und φ_μ ein und vertausche Summation und Integration. Die dann auftretenden Hilfsfunktionen sind aber keine l-Funktionen, sondern Verallgemeinerungen derselben und das Studium dieser Funktionen und der mit ihnen gebildeten Reihen soll in dieser Arbeit unterbleiben.

2.4. In Verallgemeinerung von ([5]), § 2, (9)) wollen wir jetzt einen Zusammenhang zwischen U und Q herleiten, der im Hinblick auf Anwendungen von großer Wichtigkeit ist. Wir beweisen den

SATZ 4. *Für*

$$\pi(\mu_0-1) < \arg(\omega) < \pi;$$
$$(10) \qquad 0 < \mu = \mu_0 + 2k, \quad 0 < \lambda = \mu_0 + 2l, \quad 0 \leqslant \mu_0 < 2;$$
$$k, l = 0, 1, \ldots; \quad 0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 1$$

gilt die Funktionalgleichung

$$(11) \qquad U\left(\omega; s; {\alpha \atop \lambda}, {\beta \atop \mu}\right) + U\left(\omega; s; {\alpha \atop \mu}, {\beta \atop \lambda}\right) +$$
$$+ e^{-\pi i \mu_0 s}\left[U\left(\omega; s; {1-\alpha \atop \lambda}, {1-\beta \atop \mu}\right) + U\left(\omega; s; {1-\alpha \atop \mu}, {1-\beta \atop \lambda}\right)\right] -$$
$$-\omega^{-s}\left[U\left(e^{\pi i \mu_0}\omega^{-1}; s; {1-\beta \atop \lambda}, {\alpha \atop \mu}\right) + U\left(e^{\pi i \mu_0}\omega^{-1}; s; {1-\beta \atop \mu}, {\alpha \atop \lambda}\right) +\right.$$
$$\left. + e^{-\pi i \mu_0 s}\left(U\left(e^{\pi i \mu_0}\omega^{-1}; s; {\beta \atop \lambda}, {1-\alpha \atop \mu}\right) + U\left(e^{\pi i \mu_0}\omega^{-1}; s; {\beta \atop \mu}, {1-\alpha \atop \lambda}\right)\right)\right]$$
$$= (1-e^{-2\pi i \mu_0 s})\left[Q\left(\omega; s; {\alpha \atop \lambda}, {\beta \atop \mu}\right) + Q\left(\omega; s; {\alpha \atop \mu}, {\beta \atop \lambda}\right)\right].$$

Bemerkung. Man beachte, daß die Bedingung (1) bzgl. λ und μ bedeutet, daß $\lambda \equiv \mu$ (2) gelten muß.

Beweis. Für $\alpha(1-\alpha)+\beta(1-\beta) \neq 0$ wende man auf die linke Seite von (11) die Beziehung (3) an. Dadurch entsteht eine Linearkombination von 16 Q-Funktionen. Unter Verwendung von $(e^{-\pi i \mu_0}\omega)^s = e^{-\pi i \mu_0 s}\omega^s$ und $e^{\pi i \mu_0}\omega^{-1} = (e^{-\pi i \mu_0}\omega)^{-1}$ und (1.3) bleibt die rechte Seite von (11) übrig.

Da U auch für $\alpha+\beta(1-\beta) = 0$ einen Sinn hat, kann man die linke Seite von (11) auch für $\alpha(1-\alpha)+\beta(1-\beta) = 0$ bilden und da die Funktionalgleichungen für Q auch für $\alpha = \beta = 0$ richtig bleiben, und (3) auch für $\alpha+\beta(1-\beta) = 0$ gilt, ist obige Herleitung auch auf diese Fälle übertragbar. Wir werden in Teil II dieser Arbeit auf diese grundlegende Beziehung zurückkommen.

Spezialfälle:

1a. $\lambda = \mu \equiv 0$ (2): Dann liefert (11) wegen $\mu_0 = 0$ für $|\arg(\omega)| < \pi$ mit $U_\lambda\left(\omega; s; {\alpha \atop \lambda}, {\beta \atop \lambda}\right) = U_\lambda(\omega; s; \alpha, \beta)$

$$(12_1) \qquad U_\lambda(\omega; s; \alpha, \beta) + U_\lambda(\omega; s; 1-\alpha, 1-\beta)$$
$$= \omega^{-s}[U_\lambda(\omega^{-1}; s; 1-\beta, \alpha) + U_\lambda(\omega^{-1}; s; \beta, 1-\alpha)].$$

1b. $\mu = \lambda \equiv 0$ (2), $\alpha = 1$, $\beta = 0$: Aus (12_1) erhält man mit der Bezeichnung $U_\lambda(\omega; s) = U\left(\omega; s; \begin{matrix} 1 & 0 \\ \lambda, & \lambda \end{matrix}\right)$:

$$(12_2) \qquad U_\lambda(\omega; s) - \omega^{-s} U_\lambda(\omega^{-1}; s) = (\omega^{-s} - 1)\varphi_\lambda(s).$$

2a. $\mu = \lambda \equiv 1$ (2): Aus (11) ergibt sich wegen $\mu_0 = 1$ für $0 < \arg(\omega) < \pi$

$$(13_1) \qquad U_\lambda(\omega; s; \alpha, \beta) + e^{-\pi i s} U_\lambda(\omega; s; 1-\alpha, 1-\beta) - \\ - \omega^{-s}\left[U_\lambda\left((-\omega)^{-1}; s; 1-\beta, \alpha\right) + e^{-\pi i s} U_\lambda\left((-\omega)^{-1}; s; \beta, 1-\alpha\right)\right] \\ = (1 - e^{-2\pi i s}) Q_\lambda(\omega; s; \alpha, \beta).$$

Für $\lambda = 1$ ist das ([5], § 2, (9)), falls man dort α und β bzw. durch $1-\alpha$ und $1-\beta$ ersetzt und mit $e^{\pi i s}$ multipliziert.

2b. $\mu = \lambda \equiv 1$ (2), $\alpha = 1$, $\beta = 0$: Aus (13_1) erhält man wegen (1.10_1) und (2.5) für $0 < \arg(\omega) < \pi$ nach leichter Rechnung

$$(13_2) \qquad U_\lambda(\omega; s) - \omega^{-s} U_\lambda\left((-\omega)^{-1}; s\right) = (1 - e^{-\pi i s}) Q_\lambda(\omega; s) + \\ + (\omega^{-s} - e^{-\pi i s})\varphi_\lambda(s).$$

Für $\lambda = 1$ ist das ([5], § 2; (9')).

§ 3

3.1. Die Spezialisierung der Parameter in (2.11) stößt auf Schwierigkeiten, weil für gewisse ganze s die Funktion Q Singularitäten besitzt. Deshalb führen wir zwei leicht abgeänderte Funktionen ein.

In den Integraldarstellungen (1.9) und (2.4) kann man für $\sigma > \operatorname{Max}(2\lambda^{-1}, 2\mu^{-1})$ einen Weg (c) mit $c = \sigma/2$ wählen. Wir wollen diese Darstellung für alle s verwenden.

Für

$$(1) \qquad |\arg(\omega)| < \pi; \quad \lambda, \mu > 0; \quad 0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 1$$

sei

$$(2) \qquad Q^*\left(\omega; s; \begin{matrix} \alpha & \beta \\ \lambda, & \mu \end{matrix}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\sigma/2)} \omega^{-u} \varphi_\lambda(u, \alpha) \varphi_\mu(s-u, \beta)\, du,$$

bzw. für

$$(3) \qquad \begin{matrix} \pi(\mu_0 - 1) < \arg(\omega) < \pi; \quad 0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 1; \\ 0 < \lambda, \mu, \quad \mu = \mu_0 + 2k, \quad 0 \leqslant \mu_0 < 2, \quad k \equiv 0\,(1) \end{matrix}$$

sei

$$(4) \qquad U^*\left(\omega; s; \begin{matrix} \alpha & \beta \\ \lambda, & \mu \end{matrix}\right) \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\sigma/2)} \omega^{-\mu} \varphi_\lambda(u, \alpha)\left[\varphi_\mu(s-u, \beta) + e^{\pi i \mu_0 (u-s)} \varphi_\mu(s-u, 1-\beta)\right] du.$$

Zusatzbemerkungen:

1. Falls Polstellen des Integranden auf dem Integrationsweg liegen, so ist das Integral als Cauchyscher Hauptwert zu verstehen. Genauer: Man umgebe die Polstellen mit Halbkreisen rechts vom Wege $(\sigma/2)$ mit dem Radius ϱ und lasse ϱ gegen Null gehen. Dieser Limes existiert nur für einfache Polstellen des Integranden. Für spezielle Werte von s $(s = \bar{s})$ können aber Polstellen von $\varphi_\lambda(u, \alpha)$ und Polstellen von $\varphi_\mu(s-u, \beta)$ zusammenfallen und außerdem auf $(\sigma/2)$ zu liegen kommen. In diesem Falle arbeite man mit $s = \sigma + i\tau$ mit $\tau = \operatorname{Im}(s) \neq 0$, führe in Ergebnis den Limes $\tau \to 0$ aus.

2. Die Zusatzterme in (1.10_1)–(1.10_3) und (2.5) für $\alpha\beta = 0$ und $\alpha + \beta(1-\beta) = 0$ fallen hier weg. Auf Grund der Vereinbarung über $\zeta(s, 0)$ hat man also

$$(5_1) \qquad Q^*\left(\omega; s; \begin{matrix} 0 & \beta \\ \lambda, & \mu \end{matrix}\right) = Q^*\left(\omega; s; \begin{matrix} 1 & \beta \\ \lambda, & \mu \end{matrix}\right), \quad 0 < \beta \leqslant 1,$$

$$(5_2) \qquad Q^*\left(\omega; s; \begin{matrix} \alpha & 0 \\ \lambda, & \mu \end{matrix}\right) = Q^*\left(\omega; s; \begin{matrix} \alpha & 1 \\ \lambda, & \mu \end{matrix}\right), \quad 0 < \alpha \leqslant 1,$$

$$(5_3) \qquad Q^*\left(\omega; s; \begin{matrix} 0 & 0 \\ \lambda, & \mu \end{matrix}\right) = Q^*\left(\omega; s; \begin{matrix} 1 & 1 \\ \lambda, & \mu \end{matrix}\right)$$

und

$$(6_1) \qquad U^*\left(\omega; s; \begin{matrix} 0 & \beta \\ \lambda, & \mu \end{matrix}\right) = U^*\left(\omega; s; \begin{matrix} 1 & \beta \\ \lambda, & \mu \end{matrix}\right), \quad 0 < \beta < 1$$

sowie

$$(6_2) \qquad U^*\left(\omega; s; \begin{matrix} 0 & 0 \\ \lambda, & \mu \end{matrix}\right) = U^*\left(\omega; s; \begin{matrix} 1 & 1 \\ \lambda, & \mu \end{matrix}\right).$$

3. Für $\sigma > \operatorname{Max}\left(\frac{2}{\lambda}, \frac{2}{\mu}\right)$ gilt nach (2) bzw. (4) $Q^* = Q$ und $U^* = U$ falls $\alpha\beta \neq 0$ bzw. $\alpha + \beta(1-\beta) \neq 0$ gilt.

Aus der Integraldarstellung (2) liest man sofort die Gültigkeit von (1.3, 1.4) ab. Im Unterschied zu Q ist Q^* *für jedes s eine wohldefinierte Funktion von ω*; denn auf Grund der Stirlingschen Formel konvergiert (2) sicher unter den Bedingungen (1), falls keine Polstelle des Integranden auf dem Wege $(\sigma/2)$ liegt. Für $\operatorname{Im}(s) \neq 0$ können nur einfache Polstellen auf dem Wege liegen und das Integral konvergiert im Sinne des Cauchyschen Hauptwertes. Für $\operatorname{Im}(s) = 0$ entstehen doppelte Polstellen für $s = -2n$, $0 \leqslant n \equiv 0$ (1) und für $s = 2\lambda^{-1}$ falls $\lambda = \mu$ gilt. Auf Grund von Zusatzbemerkung 1. werden sich im Limes aber beide Anteile wegheben, wie eine leichte Rechnung zeigt.

3.2. Die Definition (2) und (4) zeigen unmittelbar, daß sich die Funktionalgleichung (2.3) zwischen U und Q auf U^* und Q^* überträgt. Da außerdem die Funktionalgleichung (2.11) nur mittels (2.3) und (1.3, 4) hergeleitet wurde, gilt diese auch für U^* und Q^*. Wir haben also das Ergebnis:

SATZ 1. *Die Funktionen U^* und Q^* sind Lösungen der Funktionalgleichungen* (2.3) *und* (2.11).

Daraus ergibt sich sofort die

FOLGERUNG. *U^* ist für alle s eine wohldefinierte Funktion von ω.*

Bemerkung: Man muß sich hier etwas vorsichtig ausdrücken; denn für $\sigma > \mathrm{Max}\left(\frac{2}{\lambda}, \frac{2}{\mu}\right)$ stimmen Q^* und U^* bzw. mit Q und U überein. Trotzdem kann nicht die Rede davon sein, daß Q^* und U^* analytische Fortsetzungen von Q bzw. U sind; denn letztere sind ja als meromorphe Funktionen von s bekannt. Vielmehr sind Q^* und U^* in Abhängigkeit von s so gewählt, daß sie für alle s einen Sinn haben. Die Größe s spielt also die Rolle eines Parameters für die Definition von Q^* und U^*.

Da die Relationen (5_1)–(5_3) und (6_1)–(6_2) sich von den entsprechenden Beziehungen für die Funktionen Q und U unterscheiden, lauten für gewisse Spezialfälle von (2.11) die Funktionalgleichungen für Q^* und U^* anders. So erhält man an Stelle von (2.12_2) und (2.13_2) bzw.

$$(7) \qquad U_\lambda^*(\omega; s) - \omega^{-s} U_\lambda^*\big((-\omega)^{-s}; s\big) = (1-e^{-\pi i s}) Q_\lambda^*(\omega; s), \quad \lambda \equiv 1(2)$$

und

$$(8) \qquad U_\lambda^*(\omega; s) + \omega^{-s} U_\lambda^*\big((+\omega)^{-1}; s\big) = 0, \quad \lambda \equiv 0(2).$$

Solche Abweichungen können nur für $\alpha(1-\alpha)+\beta(1-\beta) = 0$ auftreten; d.h. für die Randpunkte der α, β-Intervalle.

Schlußbemerkungen: In diesem ersten Teil werden Funktionen einer komplexen Variablen s betrachtet, die Verallgemeinerungen gewisser Gitterfunktionen darstellen. Für spezielle (ganzzahlige) Werte von s führen sie auf bekannte Funktionen zurück, die in der analytischen Zahlentheorie eine große Rolle spielen. Die Spezialisierung einer wichtigen Funktionalgleichung machte Schwierigkeiten, die sich beseitigen ließen, indem obige Funktionen abgeändert wurden. Die neuen Funktionen U^*, Q^* haben für alle Werte von s einen Sinn und hängen in einfacher Weise mit den eingangs betrachteten Funktionen U und Q zusammen. Die oben erwähnte Funktionalgleichung überträgt sich auf U^* und Q^*. Sie bildet die Grundlage für die Herleitung der Reziprozitätsgesetze im Teil II.

Literaturverzeichnis

[1] T. M. Apostol, *A short proof of Shô Isekis functional equation*, Proc. Am. Math. Soc. 15 (1964), S. 618–622.

[2] H. Bateman, *Higher Transcendental Functions I*, New York 1953.

[3] G. Doetsch, *Handbuch der Laplace-Transformation*, Bd. 1, Basel und Stuttgart 1950.

[4] — *Handbuch der Laplace-Transformation*, Bd. 2, Basel und Stuttgart 1955.

[5] H.-J. Glaeske, *Funktionalgleichungen von Gitterfunktionen*, Math. Nachr. 32 (1966), S. 95–105.

[6] — *Eine asymptotische Funktionalgleichung für eine Funktion eines ebenen Halbgitters*, J. Math. Soc. Japan, 18 (1966), S. 353–366.

[7] Sho Iseki, *The transformation formula for the Dedekind modular function and related functional equations*, Duke Math. Journ. 24 (1957), S. 653–662.

[8] — *A generalisation of a functional equation related to the theory of partitions*, Duke Math. Journ. 27 (1960), S. 95–110.

[9] K. Knopp, *Über Lambertsche Reihen*, Journ. f. Math. 142 (1913), S. 283–315.

SEKTION MATHEMATIK
DER FRIEDRICH-SCHILLER-UNIVERSITÄT
Jena

Eingegangen 5. 8. 1970 (116)