ACTA ARITHMETICA
XX (1972)

Kapazität und Dimension verallgemeinerter Cantorscher Mengen

von

F. Schweiger (Salzburg)

1. Einleitung. Wir betrachten zahlentheoretische Transformationen T: $[0,1]\to[0,1]$, wie sie etwas allgemeiner in [6], [7] und [8] beschrieben wurden. Ist in den dort verwendeten Bezeichnungen $T^{s-1}x\in B(k)$, so nennen wir die Funktion $a_s(x)=k$ die s-te Ziffer von x. Wie üblich wollen wir mit $B(k_1,\ldots,k_s)=\{x|\ a_i(x)=k_i,\ i=1,\ldots,s\}$ einen Zylinder bezeichnen und mit $H(k_1,\ldots,k_s)$ dessen abgeschlossene Hülle.

Es sei W die Menge der auftretenden Ziffern, R_i, $i=1,2,\ldots$ eine Folge von Teilmengen von W. Mit $|M|$ wollen wir stets die Anzahl der Elemente einer Menge M bezeichnen. Wir setzen voraus:

(a) $$|W|\geqslant 3,$$

(b) $$2\leqslant |R_i|<\infty,$$

(c) $$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k\in W\setminus R_i}\lambda\big(B(k)\big)\ \text{divergent}.$$

Die Voraussetzung (c) ist erfüllt etwa für $R_i=R$, $i=1,2,\ldots$ mit $|R|<|W|$.

Satz 1.1. *Die Menge*

$$E=\bigcap_{s=1}^{\infty}\bigcup_{k_i\in R_i}H(k_1,\ldots,k_s)$$

ist eine perfekte, nirgends dichte Nullmenge.

Beweis. Die Menge $E(s)=\bigcup_{k_i\in R_i}H(k_1,\ldots,k_s)$, $i=1,2,\ldots,s$, ist abgeschlossen, daher auch $E=\bigcap_{s=1}^{\infty}E(s)$. Ist $x\in E$, so gibt es eine (nicht notwendig eindeutige) Folge von Zylindern $B(k_1)\supset B(k_1,k_2)\supset\ldots$ mit $\{x\}=\bigcap_{s=1}^{\infty}H(k_1,\ldots,k_s)$. Da $\lambda\big(B(k_1,\ldots,k_s)\big)\to 0$ und $|R_{s+1}|\geqslant 2$, findet man stets beliebig nahe, von x verschiedene Punkte in E. Daher ist E perfekt. Mit Hilfe der bekannten Abschätzung

$$C^{-1}\lambda\big(B(k_1, \ldots, k_s)\big)\lambda\big(B(k_{s+1})\big) \leqslant \lambda\big(B(k_1, \ldots, k_{s+1})\big)$$

folgt

$$\lambda\big(E(s+1)\big) \leqslant \lambda\big(E(s)\big)\Big(1 - C^{-1} \sum_{k \in W \setminus R_{s+1}} \lambda\big(B(k)\big)\Big).$$

Aus (c) folgt, daß E eine Nullmenge ist.

In dieser Arbeit sollen die Kapazität und Hausdorffdimension von E, sowie der Stetigkeitsmodul einer verallgemeinerten Lebesguefunktion untersucht werden.

2. Kapazität. Eine auf $]0, 1[$ stetige abnehmende Funktion $\varphi(t) \geqslant 0$ mit $\lim\limits_{t \to 0+} \varphi(t) = \infty$, nennen wir eine Kapazitätsfunktion. Ist K eine kompakte Teilmenge von $[0, 1]$ und M die Menge aller Maße μ mit $\mu(K) = 1$, für welche die Borelschen Teilmengen von K meßbar sind und weiters

$$u(x) = \int_K \varphi(|x-y|)\, d\mu(y)$$

das Potential von μ bezüglich φ, so setzen wir

$$V(K) = \inf_{\mu \in M} \sup u(x).$$

$C(\varphi, K) = V(K)^{-1}$ bzw. $= 0$, wenn $V(K) = \infty$ heißt die Kapazität von K.

Wir setzen nun

$$D(s) = \max_{k_i \in R_i} \lambda\big(B(k_1, \ldots, k_s)\big), \qquad d(s) = \min_{k_i \in R_i} \lambda\big(B(k_1, \ldots, k_s)\big).$$

Es gilt sodann

Satz 2.1. *Ist die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi\big(d(n)\big)}{|R_1| \ldots |R_n|} \tag{1}$$

konvergent, so ist $C(\varphi, E) > 0$.

Ist umgekehrt $C(\varphi, E) > 0$, so ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi\big(D(n)\big)}{|R_1| \ldots |R_n|} \tag{2}$$

konvergent.

Beweis. Wir folgen der Methode von Beardon [1]. Es sei (1) konvergent. μ sei folgendes Maß:

$$\mu\big(B(k_1, \ldots, k_s) \cap E\big) = \frac{1}{|R_1| \ldots |R_s|}.$$

Sei für alle Auswahlen $k_i \in R_i$, $i = 1, 2, \ldots, s$, und alle $s \geqslant 1$ erfüllt. Ist $x \in]0, 1[$, so sei

$$J_n(x) = [x - d(n), x + d(n)] \quad \text{für} \quad n = 1, 2, \ldots$$

Wir definieren

$$\varphi_n(t) = \min\big(\varphi(t), \varphi\big(d(n)\big)\big).$$

Es ist $\varphi_n(t) \to \varphi(t)$ monoton. Ferner setzen wir

$$\begin{aligned}
F(0) &= E \cap \big([0, 1] \setminus J_1(x)\big), \\
F(1) &= E \cap \big(J_1(x) \setminus J_2(x)\big), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
F(n-1) &= E \cap \big(J_{n-1}(x) \setminus J_n(x)\big), \\
F(n) &= E \cap J_n(x).
\end{aligned}$$

Dann ist

$$u(x) = \int_E \varphi(|x-y|)\, d\mu(y) = \lim_{n \to \infty} \sum_{p=1}^{n} \int_{F(p)} \varphi_n(|x-y|)\, d\mu(y).$$

Da $\varphi(t)$ abnehmend ist, ist für $y \in F(p)$ stets

$$\begin{aligned}
\varphi_n(|x-y|) &\leqslant \varphi\big(d(p+1)\big) \quad \text{für} \quad p = 0, \ldots, n-1 \text{ bzw.} \\
&\leqslant \varphi\big(d(n)\big), \quad\quad \text{wenn } p = n.
\end{aligned}$$

Da weiters $F(p) \subset E \cap J_p(x)$ und $F(p)$ von höchstens drei Intervallen $B(k_1, \ldots, k_p)$ getroffen wird, erhalten wir:

$$u(x) \leqslant \lim_{n \to \infty} \Big(\varphi\big(d(1)\big) + 3 \sum_{p=1}^{n-1} \frac{\varphi\big(d(p+1)\big)}{|R_1| \ldots |R_{n-1}|} + 3 \cdot \frac{\varphi\big(d(n)\big)}{|R_1| \ldots |R_n|}\Big).$$

Nun sei $C(\varphi, K) > 0$. Wir konstruieren eine Folge von Zylindern $B(k_1) \supset B(k_1, k_2) \supset \ldots$, sodaß

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{\varphi\big(\lambda\big(B(k_1, \ldots, k_s)\big)\big)}{|R_1| \ldots |R_s|}$$

konvergiert.

Da $\varphi(t)$ monoton abnimmt, ist (2) ebenfalls konvergent. Laut Annahme gibt es nun ein $\mu\in M$, für welches $u(x)$ beschränkt ist. Wir konstruieren eine Folge $k_1, k_2, \ldots$ rekursiv mittels der Bedingung

$$\mu\big(B(k_1, \ldots, k_s, k_{s+1}) \cap E\big) \geqslant \frac{\mu\big(B(k_1, \ldots, k_s) \cap E\big)}{|R_{s+1}|}.$$

Wir setzen $G(s) = B(k_1, \ldots, k_s) \cap E$; dabei sei $G(0) = E$. Sei für $x\in G(s)$

$$u_s(x) = \frac{1}{\mu\big(G(s)\big)} \int\limits_{G(s)} \varphi(|x-y|)\,d\mu(y)$$

so gilt für $x\in G(s+1)$:

$$u_s(x) \geqslant \tfrac{1}{2}\varphi\Big(\lambda\big(B(k_1, \ldots, k_s)\big)\Big) + \frac{1}{|R_{s+1}|}\,u_{s+1}(x). \tag{3}$$

Denn es ist

$$u_s(x) = \frac{1}{\mu\big(G(s)\big)} \sum_{t\in R_{s+1}} \int\limits_{B(k_1,\ldots,k_s,t)\cap E} \varphi(|x-y|)\,d\mu(y)$$

$$\geqslant \frac{1}{\mu\big(G(s)\big)} \Big\{\varphi\Big(\lambda\big(B(k_1, \ldots, k_s)\big)\Big) \int\limits_{G(s)\setminus G(s+1)} d\mu(y) + \int\limits_{G(s+1)} \varphi(|x-y|)\,d\mu(y)\Big\}.$$

Setzen wir

$$\mu\big(G(s)\big) = \delta\,|R_{s+1}|\,\mu\big(G(s+1)\big)$$

und zerlegen auf $G(s+1)$ das Maß μ in $\delta\mu+(1-\delta)\mu$, so erhalten wir

$$u_s(x) \geqslant \frac{1}{\mu\big(G(s)\big)} \Big\{\varphi\Big(\lambda\big(B(k_1, \ldots, k_s)\big)\Big)\big[\mu\big(G(s)\big) - \mu\big(G(s+1)\big)\big] +$$
$$+\varphi\Big(\lambda\big(B(k_1, \ldots, k_s)\big)\Big)\mu\big(G(s+1)\big)(1-\delta) + \delta \int\limits_{G(s+1)} \varphi(|x-y|)\,d\mu(y)\Big\}.$$

Setzen wir für δ ein und beachten $|R_{s+1}| \geqslant 2$, so erhalten wir (3). Ist nun

$$x_n \in \bigcap_{s=0}^{n} G(s),$$

so gilt

$$u(x_n) \geqslant \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{n} \frac{\varphi\Big(\lambda\big(B(k_1, \ldots, k_s)\big)\Big)}{|R_1| \ldots |R_s|}$$

für jedes $n \geqslant 1$. Da $u(x)$ beschränkt ist, so folgt die Konvergenz der Reihe.

Wir beweisen ferner

Satz 2.2. *Für die Hausdorffdimension der Menge E gilt*

$$\liminf \frac{\log|R_1|+\ldots+\log|R_n|}{-\log d(n)} \leqslant \dim E \leqslant \limsup \frac{\log|R_1|+\ldots+\log|R_n|}{-\log D(n)}.$$

Beweis. Für eine kompakte Menge ist die Hausdorffdimension gleich der kapazitiven Dimension (siehe [5]), welche wie folgt definiert ist:

$$D(E) = \sup\{\delta > 0 \mid C(t^{-\delta}, E) > 0\} = \inf\{\delta > 0 \mid C(t^{-\delta}, E) = 0\}.$$

Eine Anwendung auf die Reihen (1) und (2) liefert das Ergebnis.

Für den Fall $R_i = R$, $i = 1, 2, \ldots$ folgt dies auch aus folgendem

Satz 2.3 (Stradner [10]). *Ist $x(s)$ die Lösung der Gleichung*

$$\sum_{k_i\in R} \lambda\big(B(k_1, \ldots, k_s)\big)^{x(s)} = 1$$

so ist $\dim E = \lim\limits_{s\to\infty} x(s)$.

Zunächst gilt dieser (und etwas allgemeinerer) Satz für die Dimension nach Billingsley [2]. Da jedoch die betrachteten Transformationen T dieser Arbeit auf dem Einheitsintervall definiert sind und $|R| < \infty$, so folgt aus einem Kriterium von Wegmann [11], daß die Hausdorffdimension denselben Wert hat.

3. Die Lebesguefunktion. Wir betrachten wiederum das Maß μ, definiert durch

$$\mu\big(B(k_1, \ldots, k_s)\cap E\big) = \frac{1}{|R_1| \ldots |R_s|}.$$

Die Verteilungsfunktion

$$L(x) = \int_0^x d\mu$$

ist eine Verallgemeinerung der in [5] studierten Lebesguefunktion. Ist $|R_i| = R$ für $i = 1, 2, \ldots$, so ist μ ein bezüglich T invariantes Maß. Hier hat man ein schönes Resultat, welches aus einem Satz in [7] folgt:

Ist S der Träger von μ im Sinne von Chatterji [3], d.h. $\mu(S) = 1$ und aus $\mu(K) > 0$ folgt $\dim K \geqslant \dim S$,

$$\dim S = \lim_{s\to\infty} \frac{-s\log|R|}{\log\lambda\big(B(k_1, \ldots, k_s)\big)},$$

wo der Limes μ — fast überall existiert und die betrachteten Zylinder Ziffern aus R haben.

Wir zeigen unter Zuhilfenahme der Voraussetzung

(d) $$\lim_{s\to\infty} \frac{\log d(s)}{\log d(s+1)} = 1.$$

(Diese Bedingung ist erfüllt, wenn etwa $-\log\lambda\big(B(k)\big) \leqslant c$ für alle $k \in R_i$, $i = 1, 2, \ldots$ gilt.)

Satz 3.1. *Ist*

$$\omega(t) = \sup_{|x-y|\leqslant t} |L(x) - L(y)|,$$

so ist für

$$\beta = \sup\{\alpha \mid \omega(t) = O(t^\alpha)\}$$

richtig

(4) $$\liminf \frac{\sum_{i=1}^{s} \log|R_i|}{-\log d(s)} \leqslant \beta \leqslant \limsup \frac{\sum_{i=1}^{s} \log|R_i|}{-\log D(s)}.$$

Beweis. Es sei $d(s+1) < t \leqslant d(s)$. Ist $|x-y| = t$, so wird das Intervall $]x, y[$ von höchstens zwei Zylindern der Ordnung s getroffen, die positives μ — Maß haben und daher ist

$$\log|L(x) - L(y)| \leqslant \log 2 - \sum_{i=1}^{s} \log|R_i|$$

und

$$\log|x-y| > \log d(s+1).$$

Daraus ersieht man unter Zuhilfenahme der Vorausetzung (d), daß die untere Abschätzung richtig ist. Ist nun $|x-y| = D(s)$, so ist für passend gewählte x und y hingegen

$$|L(x) - L(y)| = |R_1|^{-1} \ldots |R_s|^{-1},$$

woraus die obere Abschätzung resultiert.

Man vergleiche Satz 3.1 und Satz 2.2 mit der Tatsache, daß die Hausdorffdimension einer kompakten Menge K gleich der oberen Grenze der $\eta \geqslant 0$ ist, sodaß K ein positives Maß trägt, dessen Verteilungsfunktion einer Lipschitzbedingung der Ordnung η genügt (siehe [5]).

Es sei nun $h(t)$ wachsend für $t \geqslant 0$ und $h(0) = 0$. Ist $J = \{I_\sigma\}$ eine Überdeckung der kompakten Menge K und $\|J\| = \sup\lambda(I_\sigma)$, so setzen wir

$$H(\varrho) = \liminf_{\|J\|\leqslant\varrho} \sum h\big(\lambda(I_\sigma)\big)$$

und $H(K) = \lim_{\varrho\to 0} H(\varrho)$ nennen wir das h — Maß von K (siehe [4] und [5]). Unter der weiteren Voraussetzung

(e) $$\omega\big(D(s)\big) \leqslant c\,\omega\big(d(s)\big) \quad \text{für alle } s = 1, 2, \ldots \text{ mit } c > 0$$

gilt nun

Satz 3.2. *Für* $h(t) = \omega(t)$ *gilt* $0 < H(E) < \infty$.

Beweis. Ist $\omega(t) = O\big(h(t)\big)$, so ist $H(E) > 0$ wohlbekannt. Wird nun E von $n(\varrho)$ Intervallen der Länge $\leqslant \varrho$ überdeckt, so ist

$$H(\varrho) \leqslant n(\varrho)h(\varrho)$$

und daher

$$H(E) \leqslant \liminf_{\varrho\to 0} n(\varrho)h(\varrho).$$

Daraus folgt

$$H(E) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \Big(|R_1| \ldots |R_n|\, h\big(D(n)\big)\Big).$$

Für $|x-y| \leqslant d(n)$ ist

$$|L(x) - L(y)| \leqslant 2\,|R_1|^{-1} \ldots |R_n|^{-1}$$

und somit

$$\omega\big(d(n)\big) \leqslant 2\,|R_1|^{-1} \ldots |R_n|^{-1}.$$

Wegen (e) folgt nun $0 < H(E) < \infty$.

Desweiteren folgt aus (e) sofort:

Satz 3.3.

$$\dim E = \lim_{t\to 0} \frac{\log\omega(t)}{\log t} \quad \text{(wenn vorhanden)}.$$

Es sei allerdings vermerkt, daß im Gegensatz zu den Bedingungen (a)–(d), welche einen weiten Anwendungsbereich umfassen, (e) sehr einschränkend ist. Wie eine Arbeit von Smorodinsky [9] nahelegt, scheint aber noch eine Rolle zu spielen, daß für die Zufallsvariablen

$$y_i(x) = \begin{cases} -\log|R_i|, & \text{wenn } T^{i-1}x \in B(k) \text{ und } k \in R_i, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

die Streuung verschwindet.

Literaturverzeichnis

[1] A. F. Beardon, *The generalized capacity of Cantor sets*, Quart. J. Math. 19 (1968), S. 301–304.

[2] P. Billingsley, *Ergodic Theory and Information*, New York–London–Sydney 1965.

[3] S. D. Chatterji, *Certain induced measures and the fractional dimensions of their "supports"*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 3 (1964), S. 184–192.

[4] F. Hausdorff, *Dimension und äußeres Maß*, Math. Ann. 79 (1919).

[5] J. P. Kahane et R. Salem, *Ensembles parfaits et séries trigonométriques*, Paris 1963.

[6] F. Schweiger, *Metrische Theorie einer Klasse zahlentheoretischer Transformationen*, Acta Arith. 15 (1968), S. 1–18. *Corrigendum*: ibid. 16 (1969), S. 217–219.

[7] F. Schweiger, *Induzierte Maße bei zahlentheoretischen Transformationen*, Monatshefte f. Math. 75 (1971), S. 57–64.
[8] — *Normalität bezüglich zahlentheoretischen Transformationen*, J. Number Theory 1 (1969), S. 390–397.
[9] M. Smorodinsky, *Singular measures and Hausdorff measures*, Israel J. Math. 7 (1969), S. 203–205.
[10] H. Stradner, Dissertation, Wien 1970.
[11] H. Wegmann, *Über den Dimensionsbegriff in Wahrscheinlichkeitsräumen*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 9 (1968), S. 222–231.

MATHEMATISCHES INSTITUT der UNIVERSITÄT SALZBURG

Eingegangen 11. 7. 1970 (105)

ACTA ARITHMETICA
XX (1972)

Eine einheitliche Herleitung einer gewissen Klasse von Transformationsformeln der analytischen Zahlentheorie (I)

von

HANS-JÜRGEN GLAESKE (Jena)

In der analytischen Zahlentheorie spielen die Modultransformationen gewisser *Lambertscher Reihen* seit langem eine bedeutende Rolle. Klassisch ist die Transformationsformel der *Dedekindschen Funktion* $\eta(\tau)$, die τ nach $-\tau^{-1}$ transformiert. Die Wichtigkeit der Untersuchung des Verhaltens gewisser Funktionen bei der Modultransformation $\tau' = -\tau^{-1}$ besteht bekanntlich darin, daß diese Reziprozitätsgesetze Hilfsmittel bei der Herleitung asymptotischer Aussagen in der additiven Zahlentheorie sind. Man denke etwa an die Ergebnisse von Hardy, Wright, Rademacher und Iseki in der Theorie der *uneingeschränkten Zerfällungen.* Aber auch in anderen Gebieten der Zahlentheorie fanden Reziprozitätsgesetze spezieller Lambertreihen Anwendung. Hier sei z. B. an die Abschätzung der *quadratischen* bzw. *biquadratischen Mittelwerte* der *Riemannschen Zetafunktion* durch Atkinson bzw. Bellman mittels der *Wigertschen asymptotischen Funktionalgleichung* für die Lambertsche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{-2\pi i n\omega}-1}$$

erinnert.

Die Bedeutung solcher Reziprozitätsgesetze spiegelt sich in einer Vielzahl von Veröffentlichungen wieder, die sich über die letzten 60 Jahre gleichmäßig verteilen. Genannt seien hier z. B. die Arbeiten von Wigert (Acta Math. 41, 1911), Landau (Arch. d. Math. u. Phys. 27, 1928), Kluyver (1921), und in letzter Zeit die Veröffentlichungen von Guinand (Quart. Journ. Oxf. Ser. XV, 1944), Fischer (Pacific Journ. Math. 1, 1951), Siegel (Mathematika 1, 1954), Rademacher (Journ. Ind. Math. Soc. N. S. 19, 1955), Iseki ([7], [8]), und Apostol (Duke Math. Journ. 17, 1950, Proc. Am. Math. Soc. 15, 1964).

All diesen Arbeiten ist gemeinsam, daß sie die Darstellung der zu untersuchenden Funktionen als Lambertreihe oder, wie bei Iseki, als