ACTA ARITHMETICA
XX (1972)

P. V. éléments dans un corps de nombres algébriques

par

MARTHE GRANDET HUGOT (Caen, France)

INTRODUCTION

On appelle nombre de Pisot–Vijayaraghavan (ou plus simplement nombre P. V.) un *entier algébrique réel supérieur à* 1 *dont tous les conjugués par rapport à* $\boldsymbol{Q}$ *sont de valeur absolue strictement inférieure à* 1. Nous noterons par S l'ensemble des nombres P. V. L'ensemble S possède des propriétés remarquables, nous en rappellerons quelques unes avant de les généraliser à d'autres ensembles de nombres algébriques.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre réel $\theta > 1$, *appartienne à* S *est qu'il existe* $\lambda \in \boldsymbol{R}$ *tel que si l'on pose*:

$$\lambda\theta^n = u_n + \varepsilon_n \quad \text{où} \quad u_n \in \boldsymbol{Z},\ -\tfrac{1}{2} \leqslant \varepsilon_n < \tfrac{1}{2}.$$

La série $\sum_{n=0}^{\infty} |\varepsilon_n|^2$ *converge, de plus* $\lambda \in \boldsymbol{Q}[\theta]$.

Ce résultat a été prouvé en associant à la suite $\{u_n\}$ la fonction à variable complexe: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$, on montre alors que f est une fraction rationnelle, d'où l'on déduit que $\theta \in S$ ([11]).

En associant à une suite convergente d'éléments $\theta_\lambda \in S$ une famille compacte de fractions rationnelles Salem ([12]) a montré que *l'ensemble* S *est fermé*. A partir de ce résultat on peut obtenir une caractérisation des ensembles dérivés successifs de S ([6], [8]).

On peut étendre certaines de ces propriétés, en particulier ce qui concerne la répartition modulo 1, à des ensembles d'éléments algébriques dans l'anneau des adéles de $\boldsymbol{Q}$ ([2]).

Par ailleurs H. G. Senge ([13]) a construit des ensembles fermés de nombres algébriques sur un corps K dont la définition rappelle celle des P. V. éléments. Nous étudierons d'autres ensembles fermés et en donnerons une caractérisation.

Pour un corps quadratique imaginaire l'étude est analogue à ce qu'elle est pour le corps des rationnels ([8]). Nous supposerons donc que le corps de base K n'est pas un tel corps.

NOTATIONS

K est un corps de nombres algébriques de degré s dans lequel l'anneau A des entiers algébriques est partout dense.

V_∞ désignera l'ensemble des valeurs absolues archimédiennes de K.

V est un ensemble *fini* de valeurs absolues de K contenant V_∞.

Si v est une valeur absolue de K, on désignera par K_v la complétion de K pour cette valeur absolue, par Γ_v le groupe des valeurs-absolues. Soit Ω_v la complétion de la clôture algébrique de K_v.

Nous poserons de plus

$$\Omega_V = \prod_{v\in V} \Omega_v, \qquad \Omega_\infty = \prod_{v\in V_\infty} \Omega_v.$$

Chapitre I

FONCTIONS À CARACTÉRISTIQUE BORNÉE DANS Ω_V

Nous nous proposons de généraliser le théorème suivant du à D. Cantor ([4]).

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $a_n \in A$, $z \in C$ *une série de puissances. Supposons que les fonctions conjuguées*

$$f^{(i)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(i)} z^n \qquad (i = 1, \ldots, z)$$

soient à caractéristique bornée dans le disque $|z| < \varrho_i$ (c. a. d. soient le quotient de deux fonctions régulières bornées) *où* $\prod_{i=1}^{s} \varrho_i \geqslant 1$. *Alors f est une fraction rationnelle.*

Ce théorème est lui-même une généralisation d'un théorème de Petersohn ([10]).

DÉFINITION 1.1. Soit Ω un corps valué complet, soit f une fonction définie pour $[x \in \Omega, |x| < \varrho]$, on dit que f est à *caractéristique bornée* dans $|x| < \varrho$ si elle est le quotient de deux fonctions régulières bornées pour $|x| < \varrho$.

Soit $V \supset V_\infty$ un ensemble *fini* de valeurs absolues de K.

DÉFINITION 1.2. Soit $\varrho = [\varrho_v]_{v\in V}$, et soit $B(\varrho) = \{x \in \Omega_v;\ |x|_v < \varrho_v\}$. On dit qu'une fonction f définie sur $B(\varrho)$ est à caractéristique bornée si elle est le quotient de deux fonctions régulières bornées pour $x \in B(\varrho)$.

Nous supposerons que l'origine n'est pas un pôle pour f, alors au voisinage de l'origine f admet un développement en série de puissances soit:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n, \qquad u_n \in \Omega_V.$$

Soit

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} u_0 & \ldots & u_n \\ u_1 & \ldots & u_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ u_n & \ldots & u_{2n} \end{vmatrix}$$

le déterminant de Kronecker de f. D. Cantor ([4]) a montré le lemme suivant:

LEMME 1.1. *Si $v \in V_\infty$ et si f est à caractéristique bornée pour $|x|_v < 1$ alors*

$$|\Delta_n|_v^{1/n} = o(1).$$

Nous allons démontrer un lemme analogue pour les valeurs absolues non-archimédiennes:

LEMME 1.2. *Si f est à caractéristique bornée pour $|x|_v < 1$, $v \notin V_\infty$ alors*:

$$|\Delta_n|_v^{1/n} = O(1).$$

La preuve est analogue à celle de D. Cantor: f étant à caractéristique bornée pour $|x|_v < 1$, on peut poser:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

où

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n, \qquad s_n = O(1),$$

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n x^n, \qquad t_n = O(1).$$

Si $\quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_0 & \ldots & a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & \ldots & a_{2n} \end{vmatrix}.$$

On peut en faisant des combinaisons linéaires sur les lignes et les colonnes mettre Δ_n sous la forme:

$$\Delta_n = \text{Dét}\ (d_{h,k})$$

où

$$d_{h,k} = \sum_{i=0}^{h} \sum_{j=0}^{k} t_i t_j a_{h+k-i-j}$$

d'où

$$d_{h,k} = a_{h,k} + a_{k,h} - \beta_{h,k}$$

avec

$$a_{h,k} = \sum_{i=0}^{h} t_i s_{h+k-i}, \quad \beta_{h,k} = \sum_{i=0}^{h+k} t_i s_{h+k-i}$$

donc

$$|d_{h,k}| \leqslant \mathrm{Max}(|a_{h,k}|, |a_{k,h}|, |\beta_{h,k}|)$$

or

$$|a_{h,k}| \leqslant \mathrm{Max}|t_i| \mathrm{Max}|s_j|, \quad |\beta_{h,k}| \leqslant \mathrm{Max}|t_i| \mathrm{Max}|s_j|$$

donc, il existe une constante M telle que

$$|d_{h,k}| \leqslant M \quad \text{et} \quad |\Delta_n| \leqslant M^n.$$

Corollaire. *Si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est à caractéristique bornée pour $|x| < \varrho$*

$$\varrho^n |\Delta_n|^{2/n} = O(1).$$

En effet, faisons le changement de variable $x = \varrho y$, on obtient alors une fonction g à caractéristique bornée pour $|y| < 1$

$$g(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varrho^n y^n.$$

Si Δ_n' est le déterminant de Kronecker d'ordre n de g on a

$$\Delta_n' = \varrho^{n(n+1)/2} \Delta_n,$$

donc:

$$|\Delta_n'|^{2/n} = \varrho^{n+1} |\Delta_n'|^{2/n}$$

et d'après le lemme:

$$\varrho^n |\Delta_n|^{2/n} = O(1).$$

Cet énoncé est analogue à celui de D. Cantor dans le cas complexe: *Si g est régulière à l'origine et à caractéristique bornée pour $|z|_v < \varrho$ $v \in V_\infty$ alors*:

$$\lim_{n\to\infty} \varrho^n |\Delta_n|^{2/n} = 0.$$

Nous allons maintenant pouvoir étendre le théorème de D. Cantor à certains sous-anneaux de $\boldsymbol{K}$.

Définition 1.3. Soit V un ensemble *fini* de valeurs absolues de $\boldsymbol{K}$ *contenant toutes les valeurs absolues archémédiennes*. Posons

$$\boldsymbol{K}^V = \{x \in \boldsymbol{K} | \ |x|_v \leqslant 1 \ \text{ pour } v \notin V\}$$

$\boldsymbol{K}^V$ est alors un sous-anneau de $\boldsymbol{K}$ contenant l'anneau des entiers algébriques.

Nous pouvons alors démontrer le théorème suivant:

Théorème 1.1. *Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $a_n \in \boldsymbol{K}^V$ une fonction à caractéristique bornée pour $|x|_v < \varrho_v$, $v \in V$, où $\prod_{v\in V} \varrho_v \geqslant 1$.*

Preuve. D'après le lemme de D. Cantor pour $v \in V_\infty$, à partir d'un certain rang:

$$\varrho_v^n |\Delta_n|_v^{2/n} < \varepsilon.$$

Si $v \in V - V_\infty$, $\varrho_0^n |\Delta_n|_v^{2/n} \leqslant M_v$, $v \notin V$, $|\Delta_n|_v \leqslant 1$ autrement dit

$$\prod_v |\Delta_n|_v \leqslant M^{n/2} \varepsilon^{nS/2} \prod_{v\in V} \varrho_v^{-n^2}$$

si $\prod_{v\in V} \varrho_v \geqslant 1$, on peut donc choisir ε assez petit pour que:

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{v\in V} |\Delta_n|_v = 0$$

donc, à partir d'un certain rang $\Delta_n = 0$, et f est une fraction rationnelle.

Par ailleurs $\boldsymbol{K}^V$ qui est une intersection d'anneaux de valuation est un anneau de Fatou [1], donc si $f(x) = \sum a_n x^n$, $a_n \in \boldsymbol{K}^V$ est une fraction rationnelle. Ses pôles sont les inverses d'entiers algébriques sur $\boldsymbol{K}^V$.

Chapitre II

FAMILLES COMPACTES DE FRACTIONS RATIONNELLES

Nous allons considérer des familles compactes de fractions rationnelles, analogues à celles qui étaient associées aux nombres $\theta \in S$ dans le cas où $\boldsymbol{K}$ était le corps des rationnels ou un corps quadratique imaginaire. Nous associerons ensuite à certaines familles des ensembles de nombres algébriques.

Définition 2.1. Soit $\mathscr{F}(\boldsymbol{K}, V, r, h, \delta)$ la famille des fractions rationnelles non constantes ayant les propriétés suivantes.

(1) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ au voisinage de l'origine et $a_n \in \boldsymbol{K}^V$, $x \in \Omega_v$;

(2) f a au plus h_v pôles où $0 \leqslant h_v$ dans le disque $|x|_v < r_v$, $v \in V$ et les pôles sont dans la couronne, $0 < \delta_v \leqslant |x|_v < r_v$;

(3) Pour $|x|_v = r_v$, $|f(x)|_v \leqslant 1$ si $v \in V_\infty$, et pour $r_v' < |x|_v < r_v$ $|f(x)|_v \leqslant 1$ si $v \in V - V_\infty$;

(4) $\prod_{v\in V} r_v \geqslant 1$.

Nous poserons $h = \{h_v\}_{v\in V}$, $r = \{r_v\}_{v\in V}$, $\delta = \{\delta_v\}_{v\in V}$.

Cette définition est légèrement différente de celle de Senge ([13]).

Théorème 2.1. *La famille $\mathscr{F}(K, V, r, h, \delta)$ est compacte.*

Preuve. Soit $(f_\lambda)_{\lambda\in N}$ une suite de fonctions de $\mathscr{F} = \mathscr{F}(K, V, r, h, \delta)$ nous supposons que toutes les fonctions f_λ ont exactement k_v pôles $(0 \leqslant k_v \leqslant h_v)$ dans la couronne:

$$0 < \delta_v \leqslant |x|_v < r_v, \quad v \in V, \text{ de } \Omega_V$$

nous désignerons ces pôles par $a_{1,\lambda} \ldots, a_{k_v,\lambda}$.

Examinons maintenant séparément les deux types de valeurs absolues:

(a) $v \in V_\infty$.

$$\varphi_\lambda(x) = \prod_{i=1}^{k} \frac{(a_{i,\lambda}-x)r}{r^2-\bar{a}_{i,\lambda}x}$$

si $k_v = 0$ nous poserons simplement $\varphi_\lambda(x) = 1$.

Alors φ_λ est holomorphe pour $\{x \in \Omega|\ |x|_v \leqslant r_v\}$ et

$$|x|_v = r_v \Rightarrow |\varphi_\lambda(x)|_v = 1.$$

Il en résulte que:

$$|\varphi_\lambda(x) f_\lambda(x)|_v \leqslant 1 \quad \text{pour} \quad \{x \in \Omega_\infty|\ |x|_v = r_0\}.$$

Les fonctions forment donc une famille compacte $\{F_\lambda\}_{\lambda\in N}$ de laquelle on peut extraire une suite uniformément convergente dans tout compact de $\{x \in \Omega_\infty|\ |x|_v < r_v\}$, nous désignerons par F la limite de cette suite.

Par ailleurs, quitte à extraire de la suite donnée une suite partielle on a:

$$\lim_{\lambda\to\infty} a_{i,\lambda} = a_i \quad \text{avec} \quad 0 < \delta_v \leqslant |a_i|_v \leqslant r_v \quad \text{pour} \quad v \in V_\infty.$$

Il en résulte que la suite $\{\varphi_\lambda\}$ converge uniformément vers φ définie par:

$$\varphi(x) = \prod_{i=1}^{k} \frac{(a_i-x)r}{r^2-\bar{a}_i x}$$

alors $|x|_v = r_v \Rightarrow |\varphi(x)|_v = 1$.

Posons maintenant:

$$f(x) = \lim_{\lambda\to\infty} f_\lambda(x).$$

Alors

$$f(x) = \frac{F(x)}{\varphi(x)}$$

et

$$|x|_v = r_v \Rightarrow |f(x)|_v \leqslant 1$$

et f admet au plus h_v pôles dans la couronne $\delta_v \leqslant |x|_v < r_v$.

Considérons maintenant les développement de Taylor de f_λ et f au voisinage de l'origine:

$$f_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\lambda,n} x^n, \quad a_{\lambda,n} \in K^V,$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

étant donnée la convergence uniforme de la suite f_λ vers f dans tout compact de $|x|_v < \delta_v$, on a:

$$a_n = \lim_{\lambda\to\infty} a_{\lambda,n}$$

soit $\eta_v < \delta_v$, alors

$$\operatorname*{Max}_{|x|_v=\eta_v} |f_\lambda(x)| = \operatorname*{Max}_{|x|_v=\eta_v} \left|\frac{F_\lambda(x)}{\varphi_\lambda(x)}\right|_v.$$

Or F_λ est holomorphe pour $|x|_v \leqslant r_v$, donc:

$$|F_\lambda(x)|_v \leqslant 1 \quad \text{si} \quad |x|_v = \eta_v.$$

Par ailleurs la suite $\{a_{i,\lambda}\}$ converge vers a_i, $|a_i|_v \leqslant r_v$ donc:

$$|\varphi_\lambda(x)|_v \geqslant \left(\frac{r_v(\delta_v-\eta_v)}{r_v^2+\eta_v r_v}\right) \quad \text{pour} \quad |x|_v = \eta_v.$$

On peut donc trouver une constante M_v telle que

$$\operatorname*{Max}_{|x|_v=\eta_v} |f_\lambda(x)|_v \leqslant M_v$$

d'où, d'après l'inégalité de Cauchy:

$$|a_{\lambda,\eta}|_v \leqslant \frac{M_v}{\eta_v^n}.$$

(b) $v \in V - V_\infty$. Posons

$$\varphi_\lambda(x) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{k} \left(1-\dfrac{x}{a_{i,\lambda}}\right) & \text{si} \quad k_v \neq 0, \\ 1 & \text{si} \quad k_v = 0, \end{cases}$$

les $|a_{i,\lambda}|_v$ sont bornés, et $\varphi_\lambda(x) \in K_v[x]$, K_v étant à valuation discrète, on peut supposer quitte à extraire une suite partielle qu'à partir d'un certain rang tous les φ_λ ont même polygône de Newton, ils forment donc une famille compacte.

Soit $\eta_v \in \Gamma_v$, $\eta_v < \delta_v$ et soit r_v'' un nombre tel que $r_v' < r_v'' < r_v$ alors pour $x \in \Omega_v$

$$\operatorname*{Max}_{|x|_v=\eta_v} |f_\lambda(x)|_v = \operatorname*{Max}_{|x|_v=\eta_v} |\varphi(x) f_\lambda(x)|_v = \operatorname*{Max}_{|x|_v=\eta_v} |F_\lambda(x)|_v$$

où $F_\lambda(x) = \varphi_\lambda(x) f_\lambda(x)$.

Alors puisque F_λ est holomorphe pour $|x|_v < r_v$

$$\operatorname*{Max}_{|x|_v=\eta_v} |f_\lambda(x)|_v \leqslant \operatorname*{Max}_{|x|_v=r''_v} |F_\lambda(x)|_v \leqslant \operatorname*{Max}_{|x|_v=r''_v} |\varphi_\lambda(x)|_v \leqslant \left(\frac{r_v}{\delta_v}\right)^{k_v}$$

d'où d'après les inégalités de Cauchy

$$|a_{\lambda,n}|_v \leqslant \left(\frac{r_v}{\delta_v}\right)^{k_v} \frac{1}{\eta_v^n}.$$

Si $v \notin V$ alors puisque $a_{\lambda,n} \in \boldsymbol{K}^V$ on a

$$|a_{\lambda,n}|_v \leqslant 1.$$

Il résulte des considérations précédentes que

$$H(a_{\lambda,n}) = \prod_v \operatorname{Max}(1, |a_{\lambda,n}|_v) \leqslant M_n.$$

M_n ne dépendant pas de λ, donc les $a_{\lambda,n}$ appartenant à un ensemble de hauteur bornée forment une suite discrète et à partir d'un certain rang:

$$a_{\lambda,n} = a_n, \quad \text{et} \quad a_n = \lim_{\lambda\to\infty} a_{\lambda,n} \in \boldsymbol{K}^V.$$

Posons $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Nous avons vu que $|f_\lambda(x)|_v$ est uniformément bornée pour $|x|_v \leqslant \eta_v$ de plus les séries formelles $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\lambda,n} x^n$ convergent faiblement vers $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ donc pour $|x|_v \leqslant \eta_v$ la suite $\{f_\lambda\}$ converge uniformément vers f ([7], p. 9, lemme 1.3).

De plus la suite des polynômes $\{\varphi_\lambda\}$ on peut extraire une suite partielle convergeant vers un polynôme φ. Et la suite des fonctions $\{F_\lambda\}$ qui est uniformément bornée dans $|x|_v \leqslant r_v$ converge faiblement vers F, donc converge uniformément et F est holomorphe et bornée pour $|x|_v < r_v$.

Il résulte de ce qui précède que $f = F/\varphi$ est à caractéristique bornée pour $|x|_v < r_v$, donc est une fraction rationnelle, dont les pôles éventuels sont les inverses d'entiers algébriques sur $\boldsymbol{K}^V$. Et $f \in \mathscr{F}(\boldsymbol{K}, V, r, h, \delta)$.

Nous allons maintenant étudier des sous-familles compactes de $\mathscr{F} = \mathscr{F}(\boldsymbol{K}, V, r, h, \delta)$, et à certains d'entre elles nous pourrons d'associer des ensembles fermés de nombres algébriques.

DÉFINITION 2.2 ([13]). Nous désignons pour $\mathscr{F}_1(\boldsymbol{K}, V, r, h, \delta)$ la sous famille de $\mathscr{F}$ ainsi définie

(1) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $a_n \in \boldsymbol{K}^V$;

(2) f admet au plus h_v pôles dans $|x|_v < r_v$ qui sont situés dans la couronne $0 < \delta_v \leqslant |x|_v < r_v$;

(3) $|f(x)|_v \leqslant 1$ pour $|x|_v = r_v$ si $v \in V_\infty$ et pour $r'_v < |x|_v < r_v$ pour $v \in V - V_\infty$;

(4) $|f(0)|_v \geqslant 1$ pour tout $v \in V$;

(5) $\prod_{v\in V} r_v \geqslant 1$.

Il est clair que *cette famille est compacte* puisque si $|f_\lambda(0)|_v \geqslant 1$ alors $|f(0)|_v \geqslant 1$.

De plus la condition (4) entraîne que pour $v \in V_\infty$ f a au moins un pôle dans $|x|_v \leqslant r_v$, tandis que pour pouvoir affirmer l'existence d'au moins un pôle dans $|x|_v \leqslant r_v$ et $v \in V - V_\infty$ il faudrait une condition supplémentaire (cf. [13]).

DÉFINITION 2.3. Soit V' un sous-ensemble quelconque de V, nous désignerons par $\mathscr{F}_{V'}(\boldsymbol{K}, V, r, h, \delta)$ la sous famille de $\mathscr{F}$ vérifiant

$$|f(0)|_v \geqslant 1 \quad \text{pour} \quad v \in V'.$$

On a également une famille compacte de fractions rationnelles et on peut affirmer que pour $v \in V' - V_\infty$, f admet au mois un pôle dans $|x|_v \leqslant r_v$ ([5]).

Chapitre III

ENSEMBLES DE NOMBRES ALGÉBRIQUES

Nous allons associer des ensembles de nombres algébriques à des familles pour lesquelles $r_v = 1$ pour tout $v \in V$ et $h_v \in \{0, 1\}$; nous désignerons par V' le sous-ensemble de V tel que $h_v = 1$ si $v \in V'$ et $h_v = 0$ si $v \in V - V'$.

1. Ensembles fermés d'entiers algébriques. Si $V = V_\infty$, alors pour $f \in \mathscr{F}$, $a_n \in \boldsymbol{A}$ et les pôles de f sont les inverses d'entiers algébriques.

DÉFINITION 3.1. Nous désignerons par $S_{V'}(\boldsymbol{K})$ l'ensemble suivant $\theta \in S_{V'}(\boldsymbol{K})$ si et seulement si:

1. $\theta \in \Omega_\infty$ et est entier algébrique sur $\boldsymbol{A}$;
2. $|\theta|_v > 1$ si $v \in V'$;
3. Tous les conjugués de θ_v dans Ω_v autre que lui-même pour $v \in V'$ sont de valeur absolue strictement inférieure à 1.

A cet ensemble, on peut associer la famille de fractions rationnelles $\mathscr{F}_{V'}(\boldsymbol{K}, V_\infty, 1, h, \delta)$. A une suite convergente de $\theta_\lambda \in S_{V'}(\boldsymbol{K})$, on peut faire correspondre une famille $f_\lambda \in \mathscr{F}_{V'}(\boldsymbol{K}, V_\infty, 1, h, \delta)$ et de cette famille, on peut extraire une suite partielle convergeant vers une fonction $f \in \mathscr{F}(\boldsymbol{K}, V_\infty, 1, h, \delta)$, nous allons étudier les propriétés de la fonction limite.

Soit $\theta \in S_{V'}(\boldsymbol{K})$ et soit P son polynôme minimal, posons

$$P(x) = x^n + q_1 x^{n-1} + \ldots + q_n \in \boldsymbol{A}[x],$$

$$Q(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + q_1 x + \ldots + q_n x^n.$$

Il est alors facile de voir que si P n'est pas réciproque,

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \in \mathscr{F}(\boldsymbol{K}, V_\infty, 1, h, \delta).$$

Or, dans une suite convergente de nombres $\theta \in S_{V'}(\boldsymbol{K})$, il n'y a qu'un nombre fini de tels éléments, que nous pouvons supprimer sans modifier la limite.

Alors

$$f(0) = q_n, \quad \text{et} \quad \prod_{v \in V_\infty} |f(0)|_v \geqslant 1.$$

On ne peut donc pas affirmer que $|f(0)|_v \geqslant 1$ pour tout $v \in V'$, on peut seulement affirmer que

1. $|f(0)|_v < 1$ pour $v \in V_\infty - V'$ car sinon, f ne serait pas holomorphe dans $|x|_v \leqslant 1$.

2. Pour au moins un $v_0 \in V'$ on a $|f(0)|_{v_0} > 1$.

Toutes ces considérations ne permettent pas de dire si l'ensemble $S_{V'}(\boldsymbol{K})$ est fermé ou non. Toutefois, nous pouvons en obtenir un sous-ensemble fermé avec la définition suivante.

Définition 3.2. $S^*_{V'}(\boldsymbol{K})$ est le sous-ensemble de $S_{V'}(\boldsymbol{K})$, tel que à tout $\theta \in S^*_{V'}(\boldsymbol{K})$ on puisse associer une fraction rationnelle $f \in \mathscr{F}_{V}(\boldsymbol{K}, V, 1, h, \delta)$.

On obtient alors facilement le théorème suivant.

Théorème 3.1. *L'ensemble $S^*_{V'}(\boldsymbol{K})$ est un ensemble fermé.*

Remarques. Si $k = \operatorname{Card} V'$, on voit que les éléments de $S_{V'}(\boldsymbol{K})$ considérés comme entiers algébriques sur Q sont des P.V. k-tuples [8] et si $k = 1$, alors on obtient des nombres P. V. qui sont aussi entiers algébriques sur $\boldsymbol{K}$.

Définition 3.3. Soit v_0 une valeur absolue réelle de $\boldsymbol{K}$ (si il en existe). Nous désignerons par $S_{v_0}(\boldsymbol{K})$ l'ensemble $S_{V'}(\boldsymbol{K})$ où $V' = \{v_0\}$.

Alors les remarques faites plus haut montrent que $|f(0)|_{v_0} \geqslant 1$ donc $f \in \mathscr{F}_{v_0}(\boldsymbol{K}, V_\infty, 1, h, \delta)$ d'où l'on déduit que:

Théorème 3.2. *Les ensembles $S_{v_0}(\boldsymbol{K})$ sont des ensembles fermés.*

Un élément $\theta \in S_{v_0}(\boldsymbol{K})$, si on le considère comme entier algébrique sur Q, appartient à l'ensemble S des nombres P. V., toutefois, les conditions imposées pour que $f \in \mathscr{F}_{v_0}$, montrent que cette fraction ne peut pas être celle qui lui était associée dans le domaine réel, ce qui entraîne que le polynôme irréductible dans $\boldsymbol{Z}[x]$ associé à θ n'est pas irréductible dans $\boldsymbol{A}[x]$, *les ensembles $S_{v_0}(\boldsymbol{K})$ sont donc des sous-ensembles fermés de S distincts de S.*

De plus, si $f(x) = \sum a_n x^n$ est associée à $\theta \in S_{v_0}(\boldsymbol{K})$, alors pour $v \neq v_0$ $|a_n|_v < 1$ il en résulte que $|a_n|_{v_0} > 1$, donc $a_n \in S \cap \boldsymbol{A}$. *Donc les coefficients du développement de Taylor de $f \in \mathscr{F}_{v_0}(\boldsymbol{K}, V_\infty, 1, h, \delta)$ appartiennent à l'ensemble S.*

On peut également construire des ensembles fermés analogues aux ensembles $S \cup \overline{S_2}$ de Kelly [9], en prenant pour v_0 une valeur absolue complexe. On obtient alors un sous-ensemble fermé de $S \cup \overline{S_2}$ et les coefficients a_n sont alors des éléments de cet ensemble.

2. Caractérisation des ensembles $S_{V'}(K)$. Soit V' un sous-ensemble de V_∞, nous allons donner des éléments de $S_{V'}(\boldsymbol{K})$ une caractérisation analogue à celle donnée par C. Pisot [11] pour l'ensemble S.

Théorème 3.3. *Pour qu'un élément $\theta \in \Omega_\infty$ tel que $|\theta|_v > 1$ pour $v \in V'$ appartienne à $S_{V'}(\boldsymbol{K})$, il faut et il suffit qu'il existe $\lambda \in \Omega_\infty$ et une suite U_n d'éléments de $\boldsymbol{A}$ tels que:*

$$\lambda \theta^n = U_n + \varepsilon_n$$

où

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\varepsilon_n|_v^2 < \infty \quad \textit{pour} \quad v \in V',$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |U_n|_v^2 < \infty \quad \textit{pour} \quad v \in V_\infty - V'.$$

Preuve. Posons:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n x^n$$

alors f est à caractéristique bornée pour $|x|_v \leqslant 1$, $v \in V_\infty$. C'est donc une fraction rationnelle dont le seul pôle dans $|x|_v \leqslant 1$ $v \in V'$ est $1/\theta$, et qui est holomorphe pour $|x|_v \leqslant 1$ si $v \in V_\infty - V'$. Donc, d'après le lemme de Fatou, $\theta \in S_{V'}(\boldsymbol{K})$ et $\lambda \in \boldsymbol{K}(\theta)$.

Il est immédiat que si $\theta \in S_{V'}(\boldsymbol{K})$ et si $\lambda \in \boldsymbol{A}[\theta]$, alors la suite $\{\lambda\theta^n\}_{n \in N}$ possède la propriété précédente.

Bibliographie

[1] B. Benzaghou, *Algèbres de Hadamard*, Bull. S.M.F. 98 (1970), p. 209–252.
[2] F. Bertrandias, *Ensembles remarquables d'adèles algébriques*, Bull. Soc. Math. France, Mémoire 4, 1965.
[3] D. Cantor, *On sets of algebraic integer whose remaining conjugates lie in the unit circle*, Trans. Amer. Math. Soc. 105 (1962), p. 391–406.
[4] — *Power series with integral coefficients*, Bull. Amer. Math. Soc. 69 (1963), p. 362–366.
[5] C. Chamfy, *Fonctions méromorphes dans le cercle unité et leurs séries de Taylor*, Ann. Inst. Fourier Grenoble 8 (1958), p. 237–245.
[6] J. Dufresnoy et C. Pisot, *Etude de certaines fonctions méromorphes bornées sur le cercle unité. Applications à un ensemble fermé d'entiers algébriques*, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup., Ser. 3, 72 (1955), p. 69–92.
[7] B. Dwork, *On the zeta function of a hypersurface*, Publ. Math. IHES nº 12, p. 5–68.
[8] M. Grandet-Hugot, *Ensembles fermés d'entiers algébriques*, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. 82 (1965), p. 1–35.
[9] J. B. Kelly, *A closed set of algebraic integers*, Amer. J. Math. 72 (1950), p. 565–572.
[10] H. Petersohn, *Über Potenzreihen mit ganzen algebraischen Zahlenkoeffizienten*, Abh. Math. Sem. Hamburg 8 (1931), p. 315–322.
[11] C. Pisot, *La répartition modulo 1 et les nombres algébriques*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, s. 2, 7 (1938), p. 205–248.
[12] R. Salem, *A remarkable class of algebraic integers, proof of a conjucture of Vijayaraghavan*, Duke. Math. J. 11 (1944).
[13] H. G. Senge, *Closed sets of algebraic numbers*, Duke Math. J. 34 (1967), p. 307–325.

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
UNIVERSITE DE CAEN
Calvados, France

Reçu le 5. 4. 1971 (154)

ACTA ARITHMETICA
XX (1972)

On a theorem of Ramachandra

by

T. N. Shorey* (Colaba, Bombay)

§ 1. Let $S(H)$ denote the set of all triplets of rational numbers $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ satisfying (i) $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ are multiplicatively independent, (ii) the heights of $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ respectively do not exceed H, H and $(\log H)^{100}$. The object of this paper is to prove

Theorem 1. *Let $H \geq e^e$. Then the minimum of $|\beta_1 \log\alpha_1 - \log\alpha_2|$ as $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ run through $S(H)$ exceed*

$$\exp\left(-C(\log H)^3(\log\log H)^2\right) \tag{1}$$

where C is an absolute constant.

This is an improvement of a similar theorem proved recently by K. Ramachandra [5] where one has $C(\varepsilon)\exp\left(-(\log H)^{4+\varepsilon}\right)$ where $\varepsilon > 0$ and $C(\varepsilon)$ depends only on ε.

§ 2. Since it is convenient to use the notion of size in the proof, we give the definition of size of an algebraic number. The *size* of an algebraic number α is $\overline{|\alpha|} + d(\alpha)$ where $\overline{|\alpha|}$ denotes the maximum of the absolute values of the conjugates of α and $d(\alpha)$ is the least natural number for which $\alpha d(\alpha)$ is an algebraic integer.

The height $H(\alpha)$ and the size $S(\alpha)$ of an algebraic number α of degree not exceeding h are related by the inequalities:

$$S(\alpha) \leq 2^h\left(H(\alpha)\right)^h, \qquad H(\alpha) \leq 2^h\left(S(\alpha)\right)^{2h}$$

(see [6], page 76); it is immaterial whether we state the theorem in terms of size or height.

Our notation is the same as that of Ramachandra's paper [5] except when specified explicitly. In § 5 however we follow a different notation and in particular k should not be confused with the k which occurs in [5]. S_1 will stand for a number $\geq e^e$.

* I am thankful to Professor K. Ramachandra for suggesting me the problem and for the supervision of my work. My thanks are due to Professor K. G. Ramanathan for encouragement and for helping me in preparing the manuscript.