References

[1] S. D. Cohen, *The distribution of polynomials over finite fields*, Acta Arith. 17 (1970), pp. 255–271.
[2] M. Fried, *Arithmetical properties of value sets of polynomials*, Acta Arith. 15 (1969), pp. 91–115.
[3] — *On a conjecture of Schur*, Mich. Math. J. 17 (1970), pp. 41–55.
[4] — *Arithmetical properties of value sets of rational functions, II*, Acta Arith. (to appear).
[5] A. Schinzel, *Reducibility of polynomials of the form* $f(x)-g(y)$, Colloq. Math. 18 (1967), pp. 213–218.

UNIVERSITY OF GLASGOW
Glasgow, W. 2., U.K.

Received on 5. 9. 1970 (113)

ACTA ARITHMETICA
XX (1972)

Fixpunktmannigfaltigkeiten symplektischer Matrizen

von

B. Steinle (Erlangen)

EINLEITUNG

Nach H. Cartan besitzt der Quotientenraum $\mathfrak{H}^n = H^n/\mathrm{Sp}(n, \boldsymbol{Z})$, wo H^n den Siegel'schen Halbraum bezeichnet, die Struktur einer projektiven algebraischen Mannigfaltigkeit über dem komplexen Zahlkörper, wenn man $\mathfrak{H}^n$ noch in gewisser Weise „kompaktifiziert". Dabei sind die Fixpunkte von Modulsubstitutionen singuläre Punkte der Mannigfaltigkeit. Es ist daher wichtig, diese Fixpunkte zu kennen.

Modularkorrespondenzen sind gewisse mehrdeutige Abbildungen von $\mathfrak{H}^n$ auf sich, welche durch allgemeinere Matrizen M mit $M^t\cdot J\cdot M = rJ$ $(r\in\boldsymbol{Z}, r>0)$ vermittelt werden. Auch für diese ist die Kenntnis ihrer Fixpunkte wichtig.

Nach ein paar Vorbereitungen in § 1 studieren wir in § 2 die Fixpunktmannigfaltigkeiten $\mathfrak{F}_M$ von Elementen $M\in\mathrm{Sp}(n, \boldsymbol{R})$ im Siegel'schen Halbraum H^n:

$$Z\in\mathfrak{F}_M \Leftrightarrow M(Z) = Z \tag{1}$$

$\left(M(Z) \overset{\text{def}}{=} (AZ+B)\cdot(CZ+D)^{-1}\text{, wenn } M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix}\right)$.

Man kann M mit einer reellen Zahl multiplizieren und also in der etwas allgemeineren Form annehmen:

$$M^t\cdot J\cdot M = rJ; \qquad r\in\boldsymbol{R},\ r>0. \tag{2}$$

Unser Interesse richtet sich dabei auf zweierlei: Einerseits auf die Gestalt der auftretenden M, anderseits auf die Frage nach der Menge der Fixpunkte zu diesem M.

Fixpunkte besitzt ein M, das Lösung von (2) ist, genau dann, wenn seine Eigenwerte sämtlich vom absoluten Betrag $|\sqrt{r}|$ sind (Lemma 3 und 4). Die Lösungsmenge $\mathfrak{F}_M$ der Gleichung 1 zu einem festen M ist eine komplexe Mannigfaltigkeit, deren Dimension m einfach bestimmt werden kann (Satz 2). Nulldimensionale Fixpunktmannigfaltigkeiten bestehen immer aus genau einem Punkt in H^n (Korollar 1 zu Satz 2). Es kommen im $\frac{1}{2}n(n+1)$-dimensionalen H^n höchstens Mannigfaltigkeiten von Fixpunkten der Dimension $\frac{1}{2}n(n-1)+1$ vor (Satz 6).

Besonders studieren wir den Fall $n=2$. Es gibt dann Fixpunktmannigfaltigkeiten der Dimensionen $0, 1$ und 2. Für die mehrdimensionalen Fixpunktmannigfaltigkeiten können wir Parameterdarstellungen angeben (Satz 4, 5 und 6). Außerdem können wir hier auch die Menge der Matrizen N bestimmen, die Gleichung (2) erfüllen und eine gegebene, zu M gehörige Fixpunktmannigfaltigkeit $\mathfrak{F}_M$ punktweise festlassen (Lemma 5, 6 und 7). Damit haben wir in den mehrdimensionalen Fällen (allerdings nur für $n=2$) sogar eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den Fixpunktmannigfaltigkeiten $\mathfrak{F}$ und der Menge der Lösungen von (2), die $\mathfrak{F}$ punktweise festlassen.

Von § 3 ab lassen wir nur noch solche M als Lösungen von (2) zu, deren Koeffizienten rational sind. Die verschiedenen möglichen Fixpunktmannigfaltigkeiten lassen sich nach dem charakteristischen Polynom von M in verschiedene Isomorphietypen zusammenfassen.

Wie in dem bekannten klassischen Fall $n=1$ gibt es endlich viele nach der Modulgruppe $\mathrm{Sp}(n, \boldsymbol{Z})$ nicht äquivalente M mit gleichem charakteristischen Polynom. Dabei wird M und M' die gleiche Fixpunktmannigfaltigkeit $\mathfrak{F}_M = \mathfrak{F}_{M'}$ zugeordnet, wenn die von M' erzeugte Matrixalgebra $\boldsymbol{Q}\{M'\}$ im vollen Matrixring $\mathfrak{M}\{2n, \boldsymbol{Q}\}$ mit $\boldsymbol{Q}\{M\}$ zusammenfällt (Nach den Lemmas 5, 6 und 7 ist für $n=2$ und $\mathrm{Dim}(\mathfrak{F}_M) > 0$ die Zuordnung zwischen $\boldsymbol{Q}\{M\}$ und $\mathfrak{F}_M$ umkehrbar-eindeutig). Den verschiedenen $\boldsymbol{Q}\{M\}$ mit zugehörigen $\mathfrak{F}_M$ lassen sich gewisse Idealklassen in algebraischen Zahlkörpern zuordnen. Dieser Zuordnung gilt unser eigentliches Interesse.

In § 4 behandeln wir den Fall, in dem das charakteristische Polynom in $\boldsymbol{Q}$ irreduzibel ist. $\mathfrak{F}_M$ ist hier nulldimensional. $\boldsymbol{Q}\{M\}$ ist eine Injektion eines speziellen algebraischen Zahlkörpers K vom Grade $2n$ über $\boldsymbol{Q}$ in $\mathfrak{M}\{2n, \boldsymbol{Q}\}$ (Sätze 7 und 8). Den Zusammenhang zwischen den verschiedenen $\boldsymbol{Q}\{M\}$ dieses Typs und gewissen Idealklassen des Körpers K beschreiben wir in den Sätzen 9, 10 und 11. Die Verhältnisse stellen sich, wie nicht anders zu erwarten war, als sehr viel komplexer heraus als im bekannten Fall $n=1$, wo K ein imaginärquadratischer Zahlkörper ist.

Ist das charakteristische Polynom von M reduzibel, so sprechen wir von einer Entartung. Unter der einschränkenden Voraussetzung $n=2$ behandeln wir in den Paragraphen 5 und 6 gewisse Entartungsfälle mit null- oder mehrdimensionalen Fixpunktmannigfaltigkeiten $\mathfrak{F}_M$ über die in § 2 und § 3 gemachten Aussagen hinaus: Wir untersuchen diejenigen $\boldsymbol{Q}\{M\}$, die isomorphe Bilder von algebraischen Zahlkörpern K sind. Diese Entartungsfälle nennen wir „schwach-entartet". Es handelt sich

bei den auftretenden Körpern K um quadratische Zahlkörper, und zwar um imaginäre bei null- oder eindimensionalem $\mathfrak{F}_M$ (Satz 13) und um reelle bei zweidimensionalem $\mathfrak{F}_M$ (Satz 16). Allerdings ist in den hier behandelten Fällen $\boldsymbol{Q}\{M\}$ nicht eine maximale kommutative Unteralgebra in $\mathfrak{M}\{4, \boldsymbol{Q}\}$. Damit gelingt auch eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den Idealklassen von K und den Einbettungsklassen der $\boldsymbol{Q}\{M\}$ nicht mehr. Betrachten wir aber die Menge $\mathfrak{N}$ der mit $\boldsymbol{Q}\{M\}$ elementweise vertauschbaren Matrizen, so werden Äquivalenzklassen der $\mathfrak{N}$ (Dem Zentrum $\boldsymbol{Q}\{M\}$ von $\mathfrak{N}$ ist $\mathfrak{F}_M$ eineindeutig zugeordnet) durch gewisse Idealklassen dieser quadratischen Körper K ineinander übergeführt (Satz 14 und 17).

Die hier behandelten $\mathfrak{F}_M$ der Dimension 1 und 2 werden als Ganzes in sich transformiert durch Untergruppen von $\mathrm{Sp}(2, \boldsymbol{Z})$, in welchen als Normalteiler mit endlichem Index gewisse Modulgruppen auftreten (Satz 15 und 18). Es sind also selber Modulmannigfaltigkeiten. Isolierte Fixpunkte des schwach-entarteten Typs liegen stets auf Fixpunktmannigfaltigkeiten der Dimension 1 „derselben Art" (Korollar 1 zu Satz 13).

In § 7 schlußendlich wollen wir mit Hilfe unserer allgemeinen Sätze für $n=2$ die Menge aller Fixpunktmannigfaltigkeiten zu Elementen der Siegel'schen Modulgruppe $\mathrm{Sp}(2, \boldsymbol{Z})$ in $\mathfrak{H}^2 = H^2/\mathrm{Sp}(2, \boldsymbol{Z})$ bestimmen. Für die Fälle, wo $\boldsymbol{Q}\{M\}$ eine maximale kommutative Unteralgebra in $\mathfrak{M}\{4, \boldsymbol{Q}\}$ ist, ist dies ohne zusätzliche Hilfsmittel möglich. Wir erhalten hier einfach Beispiele zu unserer allgemeinen Theorie. Ist $\boldsymbol{Q}\{M\}$ dagegen nicht maximal-kommutativ in $\mathfrak{M}\{4, \boldsymbol{Q}\}$, so treten weitere Schwierigkeiten auf. Aber bei Beschränkung auf $M \in \mathrm{Sp}(2, \boldsymbol{Z})$ kann durch einige zusätzliche Überlegungen (u.a. Satz 19) die Klassifizierung durchgeführt werden. Unsere Ergebnisse decken sich mit denjenigen, welche Gottschling [8] auf andere Weise erhalten hatte (¹).

Bezeichnungstabelle

$\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{R}; \boldsymbol{Z}$	: Körper der rationalen bzw. reellen Zahlen; Ring der ganzen rationalen Zahlen.
$\mathfrak{M}\{m, K\}$	: Volle Matrixalgebra vom Range m über dem (kommutativen) Körper K.
$\mathfrak{J} = \mathfrak{M}\{m, \boldsymbol{Z}\}$	: Voller Matrizenring vom Range m mit ganzrationalen Koeffizienten.
$\boldsymbol{Q}\{M\}$	: Durch M erzeugte Unteralgebra in $\mathfrak{M}\{m, \boldsymbol{Q}\}$.
$\mathfrak{N}$	: Menge der mit $\boldsymbol{Q}\{M\}$ elementweise vertauschbaren Matrizen aus $\mathfrak{M}\{m, \boldsymbol{Q}\}$.

(¹) Herrn Prof. Dr. M. Eichler möchte ich für sein Interesse an dieser Arbeit und seine wertvollen Ratschläge meinen herzlichsten Dank aussprechen.

$\chi_M(x)$	: Charakteristisches Polynom der Matrix M.
$K, \mathfrak{o}$	: Endlicher alg. Zahlkörper, resp. Ordnung eines endl. alg. Zahlkörpers und auch isomorphes Bild von K bzw. $\mathfrak{o}$ in $\mathfrak{M}\{m, Q\}$.
$J = \begin{pmatrix} O & E \\ -E & O \end{pmatrix}$	: aus $\mathfrak{J} = \mathfrak{M}\{2n, \boldsymbol{Z}\}$; O: Nullmatrix, E: n-reihige Einheitsmatrix ([1]).
M^*	: *-Antiautomorphismus auf $\mathfrak{M}\{2n, \boldsymbol{R}\}$ bzw. $\mathfrak{M}\{2n, Q\}$ bzw. $\mathfrak{J}$: $M \overset{*}{\to} J^{-1}\cdot M^t \cdot J = M^*$.
Σ, Γ	: Menge der symplektischen Matrizen aus $\mathfrak{M}\{2n, \boldsymbol{R}\}$ bzw. $\mathfrak{J} = \mathfrak{M}\{2n, \boldsymbol{Z}\}$ ([2]); d.h. $\{M \in \mathfrak{M}\{2n, \ldots\} \mid M^t \cdot J \cdot M = rJ, r > 0\}$, $r \in \boldsymbol{R}$ bzw. $\boldsymbol{Z}$. Soll ein bestimmtes r festgehalten werden: Σ_r bzw. Γ_r. Speziell ist für $r = 1$:
$\Gamma_1 = \mathrm{Sp}(n, \boldsymbol{Z})$	: Die Siegel'sche Modulgruppe.
H^n	: Siegel'scher Halbraum der komplexen Dimension $\frac{1}{2}n(n+1)$.
$\mathfrak{F}, \mathfrak{F}_M$	: Fixpunktmannigfaltigkeiten in H^n: $\{Z \in H^n \mid M(Z) = Z\}$ für ein M aus Σ oder Γ.

§ 1. BEZEICHNUNGEN UND HILFSÄTZE

1.1. H^n sei der Siegel'sche Halbraum der komplexen Dimension $\frac{1}{2}n(n+1)$, also der Bereich aller komplexwertigen, n-reihigen, symmetrischen Matrizen $Z = X + iY$, deren Imaginärteil Y positiv definit ist. Eine $2n$-reihige, reell-wertige Matrix M nennen wir *symplektisch*, wenn für sie gilt:

$$M^t \cdot J \cdot M = rJ \quad (r > 0, r \in \boldsymbol{R}) \tag{1}$$

$\left(J = \begin{pmatrix} O & E \\ -E & O \end{pmatrix}\right.$, O: Nullmatrix, $E = E_n$: n-reihige Einheitsmatrix).

Mit (1) gleichbedeutend ist:

$$\begin{aligned} &\text{a) } A^tD - C^tB = rE, \\ &\text{b) } A^tC = C^tA, \\ &\text{c) } B^tD = D^tB, \end{aligned} \qquad M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Die Menge der symplektischen Matrizen bezeichnen wir mit Σ, oder, wenn ein spezielles r in (1) festgehalten werden soll, mit Σ_r. Dabei ist (wenn zwei sich nur durch das Vorzeichen unterscheidende M identifiziert werden) $\Sigma_1 = \mathrm{Sp}(n, \boldsymbol{R})$.

([2]) Welches n jeweils gemeint ist, geht an den betreffenden Stellen aus dem Zusammenhang hervor. Auf Ausdrücke wie J_n, $\Sigma^{(n)}$, $\Gamma_r^{(n)}$ etc. wurde daher verzichtet.

Zwei Matrizen M und M' bezeichnen wir als Σ_1-äquivalent, wenn sie in der Beziehung

$$M = N \cdot M' \cdot N^{-1} \quad \text{mit} \quad N \in \Sigma_1$$

zueinander stehen.

Ist M eine Lösung von (1) in ganzen rationalen Zahlen, so schreiben wir dafür $M \in \Gamma$ (resp. $M \in \Gamma_r$ und für $r = 1$: $M \in \Gamma_1 = \mathrm{Sp}(n, \boldsymbol{Z})$).

1.2. Sei $\mathfrak{M}\{2n, \boldsymbol{R}\}$, resp. $\mathfrak{M}\{2n, Q\}$, resp. $\mathfrak{J} = \mathfrak{M}\{2n, \boldsymbol{Z}\}$ der volle Matrixring der $2n$-reihigen, quadratischen Matrizen mit reellen (bzw. rationalen, bzw. ganz-rationalen) Koeffizienten:

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad A, B, C, D\colon n\text{-reihig}.$$

Den Anti-Automorphismus

$$M \to M^* = J^{-1} \cdot M^t \cdot J \quad (\text{mit } J \text{ aus } (1))$$

von $\mathfrak{M}\{2n, \boldsymbol{R}\}$, resp. $\mathfrak{M}\{2n, Q\}$, resp. $\mathfrak{J}$, bezeichnen wir als *-Anti-Automorphismus.

Ist $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, so ist $M^* = \begin{pmatrix} D^t & -B^t \\ -C^t & A^t \end{pmatrix}$.

Symplektische Matrizen sind dabei nach (1) gekennzeichnet durch

$$M^* = rM^{-1}.$$

1.3. In den Paragraphen 4 bis 6 benützen wir folgenden Automorphismensatz (zum Beweis siehe etwa v.d. Waerden [13] ([3]), Bd. II, S. 253):

Lemma 1. *Sind A_1 und A_2 zwei isomorphe, einfache Unteralgebren der zentralen einfachen Algebra $\mathfrak{M}$, so wird jeder Isomorphismus zwischen A_1 und A_2, der die Elemente des Grundkörpers invariant läßt, durch einen innern Automorphismus von $\mathfrak{M}$ vermittelt:*

$$\exists S \in \mathfrak{M}\colon A_2 = S \cdot A_1 \cdot S^{-1}.$$

1.4. Ebenfalls in den Paragraphen 4 bis 6 benötigen wir noch folgenden Hilfssatz:

Lemma 2. *Ist für ein beliebiges S aus $\mathfrak{J} = \mathfrak{M}\{2n, \boldsymbol{Z}\}$ $S \cdot S^* = aU$ ($a \in \boldsymbol{Z}, a > 0$) mit unimodularen U, so existiert ein unimodulares V:*

$$U = V \cdot V^*$$

(oder mit andern Worten: $\exists V\colon V^{-1} \cdot S \in \Gamma_a$).

([3]) Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit.

Beweis. Wir multiplizieren S von links mit einem unimodularen T_1 so, daß $T_1 S$ unter der Diagonale aus lauter Nullen besteht. Damit ist $(T_1 S)\cdot(T_1 S)^* = T_1\cdot SS^*\cdot T_1^*$ von der Gestalt

$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ O & D_1 \end{pmatrix}$, mit $B_1^t = -B_1$ und $D_1^t = A_1$ wegen der*-Invarianz, d.h.:

$$S\cdot S^* = aU = aT_1^{-1}\cdot\begin{pmatrix} A & B \\ O & A^t \end{pmatrix}\cdot T_1^{-*} \qquad (\text{mit } B^t = -B). \tag{3}$$

A ist dabei eine unimodulare $n\times n$-Matrix.

Mit einer Dreiecksmatrix C $\left(c_{ik} = \begin{cases} 0, & i > k \\ b_{ik}, & \text{sonst}\end{cases}\right)$ aus $\mathfrak{M}\{n, \boldsymbol{Z}\}$ gilt:

$$C - C^t = B.$$

Wir bilden nun die unimodulare Matrix $T_2 = \begin{pmatrix} E & C \\ O & A^t \end{pmatrix}$. Es ist

$$T_2 T_2^* = \begin{pmatrix} A & B \\ O & A^t \end{pmatrix}.$$

Mit (3) also:

$$SS^* = aU = aT_1^{-1}\cdot T_2\cdot T_2^*\cdot T_1^{-*} = aV\cdot V^*,$$

wobei $V = T_1^{-1}\cdot T_2$ unimodular ist. q.e.d.

§ 2. FIXPUNKTMANNIGFALTIGKEITEN IM REELLEN

2.1. Wir untersuchen die Gesamtheiten derjenigen M aus Σ, die Fixpunkte Z in H^n besitzen. Dazu bringen wir M in eine Normalgestalt: Wenn Z Fixpunkt von M ist, so ist $N(Z)$, $N\in\Sigma_1$, Fixpunkt von $N\cdot M\cdot N^{-1}$. Da Σ_1 in H^n transitiv ist, gibt es zu jedem $Z\in H^n$ ein N mit $N(Z) = iE$. Es genügt also, solche $M = M_{iE}$ zu studieren, welche iE festlassen.

Zunächst folgt aus $M_{iE}(iE) = iE$ und der Symplektizität von M_{iE}:

$$M_{iE} = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}, \quad \text{mit } A^t\cdot B = B^t\cdot A \text{ und } A^t\cdot A + B^t\cdot B = rE. \tag{1}$$

Die Menge der iE festlassenden N_{iE} aus Σ_1 bildet eine Untergruppe von Σ_1, die *Isotropiegruppe* von iE. Für N_{iE} aus der Isotropiegruppe gilt:

$$N_{iE} = \begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ -B_0 & A_0 \end{pmatrix}, \quad \text{mit } A_0^t\cdot B_0 = B_0^t\cdot A_0 \text{ und } A_0^t\cdot A_0 + B_0^t\cdot B_0 = E. \tag{2}$$

Wir ordnen nun M_{iE} aus (1) resp. N_{iE} aus (2) die komplexwertige, n-reihige Matrix

$$U = A - iB, \quad \text{resp. } U_0 = A_0 - i \quad uB_0z. \tag{3}$$

Dabei gilt: $\overline{U}^t\cdot U = rE$, resp. $\overline{U}_0^t\cdot U_0 = E$.

Wir erhalten hier nebenbei folgende Aussage:

SATZ 1. *Durch* (3) *wird ein Isomorphismus zwischen der Isotropiegruppe zu iE und der unitären Gruppe $\mathfrak{U}(n)$ induziert.*

Weiter transformieren wir $U = A - iB$ mit einem unitären U_0 $(= A_0 - iB_0)$ auf Diagonalgestalt:

$$U \to U' = \sqrt{r}\begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{i\varphi_n} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Die Transformation (4): $U \to U_0\cdot U\cdot U_0^{-1}$ ist gleichbedeutend mit $M_{iE} \to N_{iE}\cdot M_{iE}\cdot N_{iE}^{-1} = M'$:

$$M' = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix},$$

$$A = \sqrt{r}\begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \cos\varphi_n \end{pmatrix}, \qquad B = -\sqrt{r}\begin{pmatrix} \sin\varphi_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sin\varphi_n \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Wir haben somit folgendes Lemma bewiesen:

LEMMA 3. *Jedes $M\in\Sigma$ mit Fixpunkt Z in H^n ist Σ_1-äquivalent zu einem $M'\in\Sigma$ der Gestalt* (5) *mit Fixpunkt iE.*

Wir bezeichnen die Matrix

$$U(M) = A - iB = \sqrt{r}\begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{i\varphi_n} \end{pmatrix} \tag{6}$$

als „die zu M gehörige Matrix $U(M)$" und schreiben

$$M \xrightarrow{N} U(M) \tag{6_1}$$

wobei N das Element aus Σ_1 ist, das M in $N\cdot M\cdot N^{-1} = M'$ von der Gestalt (5) transformiert.

Aus Lemma 3 folgt nun unmittelbar (vgl. E. Gottschling [8], Lemma 2c, § 4):

LEMMA 4. *Die Eigenwerte einer Matrix $M\in\Sigma$ mit Fixpunkt Z in H^n sind $\sqrt{r}e^{i\varphi_j}$, $\sqrt{r}e^{-i\varphi_j}$, $j = 1, \ldots, n$, wenn $U(M)$ die Gestalt* (6) *hat.*

2.2. Wir fragen jetzt umgekehrt nach der Gesamtheit $\mathfrak{F}_M$ aller Fixpunkte eines symplektischen M, sofern M überhaupt mindestens einen Fixpunkt Z in H^n besitzt.

O.B.d.A. nehmen wir $Z = iE$ und M von der Gestalt (5) an. Zum Studium der Gleichung

$$M(Z) = Z \tag{7}$$

ist es zweckmäßig, die folgende Transformation vorzunehmen:

(8) $$Z \to W = (Z - iE)\cdot(Z + iE)^{-1}.$$

Sie ist eindeutig umkehrbar durch

(9) $$Z = i(E+W)\cdot(E-W)^{-1}.$$

Da Z nie den Eigenwert $-i$ hat, läßt sich W für jedes Z aus H^n nach (8) berechnen und kann folglich jedes Z umgekehrt in der Weise (9) geschrieben werden. (9) ist ein Analogon zur kongredienten automorphen Transformation von Cayley und Wedderburn (vgl. dazu W. Gröbner [10], S. 240 ff). Bei der Transformation (8) geht (7) in die einfache Gleichung

(10) $$\overline{U}\cdot W = W\cdot U, \qquad U = A - iB$$

über (U von der Gestalt (6), $M = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$).

Das heißt also: $w_{ik}(e^{-i\varphi_i} - e^{i\varphi_k}) = 0$, oder mit anderen Worten:

(10_1) $$w_{ik} = 0$$

oder

(10_2) $$\varphi_i + \varphi_k \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 2\pi).$$

Daraus entnehmen wir folgenden Satz:

Satz 2. *Die Lösungsmenge $\mathfrak{F}_M$ ist eine komplexe m-dimensionale Mannigfaltigkeit* (*in Zukunft als Fixpunktmannigfaltigkeit bezeichnet*). *Dabei ist die Dimension m gleich der Anzahl der Paare (i, k), $i \leqslant k$, für welche $\varphi_i + \varphi_k$ kongruent Null* mod 2π *ist.*

Vgl. dazu E. Gottschling [8], Lemma 3, § 4. Darin wird dieser Satz für $M \in \Sigma_1$ bewiesen. Unser Beweis ist einfacher.

Korollar 1. *Besitzt M eine nulldimensionale Fixpunktmannigfaltigkeit, so hat M genau einen Fixpunkt in H^n.*

Denn eine nulldimensionale Fixpunktmannigfaltigkeit liegt vor, wenn für alle Paare (i, k) gilt:

$$\varphi_i + \varphi_k \not\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 2\pi).$$

Es erfüllt also kein $W \neq O$ die Gleichung (10), d.h., außer iE besitzt das zu M Σ_1-äquivalente M' aus Lemma 3 keinen Fixpunkt in H^n.

2.3. Als Anwendung von 2.1 und 2.2 wollen wir hier sämtliche vorkommenden mehrdimensionalen Mannigfaltigkeiten zu symplektischen M im Spezialfall $n = 2$ untersuchen:

2.3.1. Die Matrix M besitze eine eindimensionale Fixpunktmannigfaltigkeit. Daraus folgt, daß genau eine der Kongruenzen (10_2) erfüllt ist.

Wir betrachten zuerst den Fall, daß die Kongruenz für ein $i = k$ eintritt, d.h., daß

(11) $$\varphi_1 \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, \pi) \wedge \varphi_2 \not\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, \pi)$$

gilt.

Das zu M gehörige $U(M)$ vgl. (6) hat daher die Gestalt:

(12) $$U(M) = \pm\sqrt{r}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \pm\sqrt{r}\begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \varphi \not\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, \pi).$$

Wir behaupten nun folgendes:

Lemma 5. *$U(M)$ habe die Gestalt* (12) *und M_1 sei eine weitere symplektische Matrix. Dann und nur dann gehören zu M und M_1 dieselben Fixpunktmannigfaltigkeiten $\mathfrak{F}_M$ und $\mathfrak{F}_{M_1}$, wenn M und M_1 durch dasselbe $N \in \Sigma_1$ in die Gestalt*

$$U(M) = \pm\sqrt{r}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix}, \quad \textit{resp.} \quad U(M_1) = \pm\sqrt{r_1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_1} \end{pmatrix},$$

$\varphi, \varphi_1 \not\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, \pi)$, transformiert werden.

Beweis. Bei der Zuordnung $M \xrightarrow{N} U(M)$ wird M_1 ein U_1 aus $\mathfrak{M}\{2, C\}$ zugeordnet mit $\overline{U}_1^t \cdot U_1 = r_1 E$ (da M_1 symplektisch und $\mathfrak{F}_{M_1} = \mathfrak{F}_M$ ist, also $N\cdot M_1\cdot N^{-1}$ wie $N\cdot M\cdot N^{-1}$ den Fixpunkt iE hat). Die zu $U(M)$ gehörige Fixpunktmannigfaltigkeit W — $\overline{U}\cdot W = W\cdot U$ — hat die Gestalt $W = \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $w \in \boldsymbol{C}$.

Als Fixpunktmatrix muß auch U_1 erfüllen

$$\overline{U}_1 \cdot W = W \cdot U_1$$

und daraus folgt mit $\overline{U}_1^t \cdot U_1 = r_1 E$ sofort:

$$U_1 = \pm\sqrt{r_1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_1} \end{pmatrix}.$$

Dabei ist $\varphi_1 \not\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, \pi)$, da $\dim(\mathfrak{F}_{M_1}) = \dim(\mathfrak{F}_M) = 1$ sein soll. Die Umkehrung des Lemmas ist trivial. w.z.b.w.

Satz 3. *Es sei $n = 2$. Unter der Voraussetzung, daß*

$$U(M) = \pm\sqrt{r}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix} \qquad (\varphi \not\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, \pi))$$

ist, hat $\mathfrak{F}_M$ die Parameterdarstellung

$$\mathfrak{F}_M = \left\{ N\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \middle|\ \mathrm{Im}(z) > 0 \right\} \quad \textit{für ein } N \in \Sigma_1.$$

Denn die zu M Σ_1-äquivalente Matrix M' aus (5) hat ja als Fixpunktmannigfaltigkeit nach (9)

$$Z = i(E+W)(E-W)^{-1},$$

wobei in unserem Falle $W = \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist. Daraus folgt sofort $Z = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$.

2.3.2. In 2.3.1 hatten wir $\varphi_1 \equiv 0 \pmod{\pi}$. Jetzt diskutieren wir $\varphi_1+\varphi_2 \equiv 0 \pmod{2\pi}$, $\varphi_1 \not\equiv 0 \pmod{\pi}$, $\varphi_2 \not\equiv 0 \pmod{\pi}$. Das zugehörige $U(M)$ hat also die Gestalt

$$U(M) = \sqrt{r}\begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix}, \qquad \varphi \not\equiv 0 \pmod{\pi}. \tag{13}$$

Hier gilt (vgl. Lemma 5):

Lemma 6. *$U(M)$ habe die Gestalt (13). Die Menge der Matrizen aus Σ, die die Fixpunktmannigfaltigkeit $\mathfrak{F}_M$ in H^2 besitzen, ist identisch mit der Menge der M_1 aus $\mathfrak{M}\{4, \boldsymbol{R}\}$ mit $M_1 = \alpha E+\beta M$; $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$, $\beta \neq 0$.*

Beweis. Aus $U(M) = \sqrt{r}\begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix}$ folgt $M+M^* = kE$, $k \in \boldsymbol{R}$. Daraus ergibt sich, daß $M_1 = \alpha E+\beta M$ für jede Wahl von α und β aus $\boldsymbol{R}$ symplektisch ist:

$$\begin{aligned} M_1^* M_1 &= (\alpha E+\beta M)^*(\alpha E+\beta M) = (\alpha^2+\beta^2 r)E+\alpha\beta(M+M^*) \\ &= (\alpha^2+\beta^2 r+k\alpha\beta)E. \end{aligned}$$

Sei nun $M_1 \in \Sigma$ und $\mathfrak{F}_{M_1} = \mathfrak{F}_M$. Bei der Zuordnung $M \overset{N}{\to} U(M)$ (vgl. (6) und (6')) wird $M_1 \overset{N}{\to} U_1$ übergeführt, wobei $\overline{U}_1^t U_1 = r_1 E$. (Da M_1 symplektisch ist und $N \cdot M_1 \cdot N^{-1}$ wie $N \cdot M \cdot N^{-1}$ den Fixpunkt iE hat.) $U(M)$ erfüllt nach den Gleichungen (10):

$$\overline{U} \cdot W = W \cdot U \quad \text{mit} \quad W = w\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad w \in \boldsymbol{C}.$$

U_1 erfüllt also wegen $\mathfrak{F}_{M_1} = \mathfrak{F}_M$:

$$\overline{U}_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot U_1.$$

Hieraus, aus $\overline{U}_1^t \cdot U_1 = r_1 E$ und aus $\dim(\mathfrak{F}_{M_1}) = \dim(\mathfrak{F}_M) = 1$ folgt:

$$U_1 = \sqrt{r_1}\begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi_1} \end{pmatrix} \quad \text{mit einem } \varphi_1 \not\equiv 0 \pmod{\pi}.$$

Dieses U_1 läßt sich aber offensichtlich für geeignetes $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$ $(\beta \neq 0)$ schreiben als $U_1 = \alpha E+\beta U(M)$ und somit ist

$$M_1 = \alpha E+\beta M.$$

w.z.b.w.

Satz 4. *Es sei $n = 2$. Unter der Voraussetzung, daß*

$$U(M) = \sqrt{r}\begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix}$$

ist, hat $\mathfrak{F}_M$ die Parameterdarstellung

$$\mathfrak{F}_M = \left\{N\begin{pmatrix} i & z \\ z & i \end{pmatrix} \middle| \operatorname{Im}(z) > 0\right\} \quad \textit{für ein } N \in \Sigma_1.$$

Das zu M Σ_1-äquivalente M' aus Lemma 3 hat ja als Fixpunktmannigfaltigkeit nach (9) die Menge der Z aus H^2 mit $Z = i(E+W)\cdot(E-W)^{-1}$, wobei in unserem Fall $W = w\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist.

2.3.3. Es bleibt für $n = 2$ noch der Fall $\dim(\mathfrak{F}_M) = 2$ übrig. Nach (10_2) hat das zu M gehörige $U(M)$ aus (6) die Gestalt

$$U(M) = \pm H, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Es gilt in diesem Fall die folgende Aussage (vgl. Lemma 5 und 6):

Lemma 7. *$U(M)$ habe die Gestalt (14). M_1 sei eine weitere symplektische Matrix.*

Dann und nur dann gehören zu M und M_1 dieselben Fixpunktmannigfaltigkeiten $\mathfrak{F}_M$ und $\mathfrak{F}_{M_1}$, wenn

$$M_1 = \alpha \cdot M$$

ist.

Beweis. Die bei der Zuordnung $M \overset{N}{\to} U(M)$ der Matrix $M_1 \in \Sigma$ mit $\mathfrak{F}_{M_1} = \mathfrak{F}_M$ zugeordnete unitäre Matrix U_1 muß erfüllen:

$$\overline{U}_1 \cdot \begin{pmatrix} w_1 & 0 \\ 0 & w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 & 0 \\ 0 & w_2 \end{pmatrix} \cdot U_1.$$

Daraus folgt, daß U_1 Diagonalgestalt mit reellen Koeffizienten hat. Aus $\overline{U}_1^t \cdot U_1 = r_1 E$ und $U_1 \neq \alpha \cdot E$ (wegen $\mathfrak{F}_M \neq H^2$) folgt:

$$U_1 = \alpha \cdot H.$$

w.z.b.w.

Ganz analog zu Satz 3 und Satz 4 gilt im zweidimensionalen Fall:

Satz 5. *Es sei $n = 2$. Unter der Voraussetzung, daß $U(M) = \pm\sqrt{r}H$ ist $\left(H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$, hat $\mathfrak{F}_M$ die Parameterdarstellung:*

$$\mathfrak{F}_M = \left\{N\begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix} \middle| \operatorname{Im}(z_1) > 0, \operatorname{Im}(z_2) > 0\right\} \quad \textit{für ein } N \in \Sigma_1.$$

2.4. Wir kehren zum Fall eines beliebigen n zurück. Unter den $\frac{1}{2}n(n+1)$ Zahlen $\varphi_i+\varphi_k$ $(i \leqslant k)$ sind höchstens n untereinander unabhängig. Daraus ergibt sich folgende Aussage über die größtmöglichen Dimensionen der $\mathfrak{F}_M$:

Satz 6. *Für $n > 2$ und $M \neq rE$ ist die Co-Dimension von $\mathfrak{F}_M$ größer als $n-2$.*

Es gibt solche $M \in \Sigma$ (sogar aus $\Gamma_1 = \mathrm{Sp}(n, \boldsymbol{Z})$), deren Fixpunktmannigfaltigkeit die Co-Dimension $n-1$ hat.

Beweis. Co-Dimension h bedeutet, daß genau h der $\frac{1}{2}n(n+1)$ Gleichungen $\varphi_i+\varphi_k \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 2\pi)$ $(i \leqslant k)$ in (10_2) nicht erfüllt sind.

a) Ist $h = 0$, so ist $\mathfrak{F}_M = H^n$ und daher $M = rE$.

b) Es sei nun $h > 0$ und etwa $\varphi_i+\varphi_k \not\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 2\pi)$ (hier und im folgenden ist immer $i = k$ zugelassen). Existierte nun ein $j \neq i$ und $\neq k$ mit

$$(15) \qquad \varphi_j+\varphi_i \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 2\pi) \wedge \varphi_j+\varphi_k \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 2\pi) \wedge \varphi_j \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, \pi),$$

so führte dies auf den Widerspruch $\varphi_i+\varphi_k \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 2\pi)$. Es ist also für alle j $(\neq i$ und $\neq k)$ mindestens eine der drei Kongruenzen (15) nicht erfüllt. Dies ergibt zusätzlich zu $\varphi_i+\varphi_k \not\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 2\pi)$ im Falle $i \neq k$ $n-2$ und im Falle $i = k$ sogar $n-1$ weitere Ungleichungen.

Somit folgt aus $h > 0$: $h \geqslant n-1$.

Als Beispiel für ein $M \in \Sigma$ mit Co-Dimension von $\mathfrak{F}_M$ gleich $n-1$ wählen wir etwa

$$M = \begin{pmatrix} H & O \\ O & H \end{pmatrix}, \qquad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & \\ \vdots & \\ 0 & -E_{n-1} \end{pmatrix} \qquad (M \in \Gamma_1!).$$

q.e.d.

Eine Aussage in dieser Richtung findet sich auch bei E. Gottschling [9]. Dort wird für die Elemente der Siegel'schen Modulgruppe $\Gamma_1 = \mathrm{Sp}(n, \boldsymbol{Z})$ gezeigt, daß die Co-Dimension von $\mathfrak{F}_M$ für $n > 3$ größer als 1 ist. Wir haben hier auf recht einfache Art eine wesentliche — und gleich für unsere allgemeineren symplektischen $M \in \Sigma$ gültige — Verschärfung dieses Satzes erhalten.

§ 3. ZUR ALGEBRA DER SYMPLEKTISCHEN MATRIZEN

3.1. Die Koeffizienten der symplektischen Matrix M seien jetzt ganzrational: $M \in \Gamma$. Wir betrachten die durch M in $\mathfrak{M}\{2n, \boldsymbol{Q}\}$ erzeugte kommutative Algebra $\boldsymbol{Q}\{M\}$ und den Ring $\mathfrak{o} = \boldsymbol{Q}\{M\} \cap \mathfrak{M}\{2n, \boldsymbol{Z}\}$. (Zur Abkürzung: $\mathfrak{J} = \mathfrak{M}\{2n, \boldsymbol{Z}\}$.)

$\mathfrak{o}$ ist ein *-automorpher (kurz „*-a".) Ring, d.h. es gilt $\mathfrak{o}^* = \mathfrak{o}$. Es ist nämlich $M^* = rM^{-1}$ und M genügt in $\boldsymbol{Q}$ einer Gleichung $M^{2n}+\ldots+a_1M+|M| = O$ mit $|M| \neq 0$. Also ist $|M|\cdot M^{-1} = -M^{2n-1}-\ldots-a_1E$ in $\boldsymbol{Q}\{M\}$. Da M^* mit M in $\mathfrak{J}$ liegt ist die Behauptung $\mathfrak{o}^* = \mathfrak{o}$ bewiesen.

Wir können nun die Resultate der Arbeit von M. Eichler [5] übertragen: An die Stelle der $\mathfrak{F}$-automorphen („$\mathfrak{F}$-a.") Ringe tritt bei uns der *-a. Ring. An die Stelle der $\mathfrak{F}$-orthogonalen Matrizen S: $S^t\cdot\mathfrak{F}\cdot S = \mathfrak{F}$ treten die J-orthogonalen S: $S^t\cdot J\cdot S = J$, oder also die symplektischen S im engeren Sinne: $S^*\cdot S = E$. Ein wesentlicher Unterschied besteht allerdings, denn unser J stellt die Null eigentlich dar: Aus $S^t\cdot J\cdot S = O$ folgt i.a. nicht $S = O$. *-*a*. Ringe sind daher i.a. nicht halbeinfach, auch dann nicht, wenn sie von symplektischen M erzeugt werden. Beispielsweise ist für $M = \begin{pmatrix} E & S \\ O & E \end{pmatrix}$, $S \neq O$, $S^t = S$, $M-E$ nilpotent.

Für *-a. Ringe, die von symplektischen M mit Fixpunkten in H^n erzeugt sind, gilt die Halbeinfachheit aber doch: $\boldsymbol{Q}\{M\}$ ist hier isomorph zu $\boldsymbol{Q}\{M'\}$, $M' = N\cdot M\cdot N^{-1}$ mit $N \in \Sigma_1$ von der Gestalt (5) aus § 2. Diese Matrix ist aber normal: $M'^t\cdot M' = M'\cdot M'^t$ und normale Matrizen erzeugen halbeinfache Ringe (vgl. W. Gröbner [10], S. 166 ff.)

Die Beweise von Satz 2 und Satz 3 bei Eichler [5] lassen sich mit den oben erwähnten Abänderungen wörtlich übertragen. Daß die dort durch (6) eingeführten Matrizen $\mathfrak{G}_\sigma$ einen halbeinfachen Ring bilden, folgt bei uns aus ihrer elementweisen Vertauschbarkeit mit $\mathfrak{o}$ und der Voraussetzung für Satz 3, daß $\mathfrak{o}$ den Rang $2n$ hat. Zusammen haben wir folgende Aussagen:

1. *Von symplektischen Matrizen mit Fixpunkten in H^n erzeugte *-a. Ringe $\mathfrak{o}$ sind halbeinfach.*

2. *Sind $\mathfrak{o}_1$ und $\mathfrak{o}_2$ halbeinfache, kommutative *-Operator-isomorphe *-a. Ringe, so gibt es eine symplektische Matrix S $(S^*\cdot S = E)$ mit Elementen aus einem Erweiterungskörper von $\boldsymbol{Q}$, so daß*

$$(1) \qquad \mathfrak{o}_2 = S\cdot\mathfrak{o}_1\cdot S^{-1}$$

ist. (Gleichung elementweise verstanden.)

3. *Haben die *-a. Ringe $\mathfrak{o}_1$ und $\mathfrak{o}_2$ den Rang $2n$, so gibt es ein S mit $S^*\cdot S = E$ und der Eigenschaft* (1) *mit Koeffizienten aus $\boldsymbol{Q}$ genau dann, wenn dies für jede p-adische Erweiterung von $\boldsymbol{Q}$ der Fall ist.*

Bemerkung. Die Aussage 2 ist eine Verallgemeinerung unseres für einfache Algebren gültigen Hilfsatzes 1 aus § 1.

3.2. Sei K ein maximal-kommutativer Körper in $\mathfrak{M}\{2n, \boldsymbol{Q}\}$: $[K:\boldsymbol{Q}] = 2n$. Der Durchschnitt von $\mathfrak{J} = \mathfrak{M}\{2n, \boldsymbol{Z}\}$ mit K ist eine Ordnung $\mathfrak{o}$ von K:

$$\mathfrak{o} = \mathfrak{J} \cap K.$$

Sei nun $\mathfrak{L}$ ein $\mathfrak{J}$-Linksideal, dessen Rechtsordnung $\mathfrak{J}'$ geschnitten mit K auch gleich $\mathfrak{o}$ ist:

$$\mathfrak{o} = \mathfrak{J}' \cap K.$$

Nach einem Satz von Chevalley, Hasse und Noether (vgl. Chevalley [2], Hasse [11] und Noether [12], bei Noether in der hier benötigten vollen Allgemeinheit bewiesen; für $\mathfrak{o}$ nur gleich der Hauptordnung von K bei Chevalley und Hasse) werden diese $\mathfrak{J}$-Linksideale $\mathfrak{L}$ durch $\mathfrak{o}$-Ideale $\mathfrak{a}$ erzeugt:

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{J} \cdot \mathfrak{a}.$$

Die Aussage gilt sogar noch, wenn K eine bezüglich $\boldsymbol{Q}$ halbeinfache Algebra in $\mathfrak{M}\{2n, \boldsymbol{Q}\}$ vom Range $2n$ über $\boldsymbol{Q}$ ist: Nämlich in dieser Allgemeinheit, jedoch mit der Beschränkung von $\mathfrak{o}$ auf die Hauptordnung von K, findet sich der Beweis bei Chevalley [2]. Es ist aber leicht einzusehen, daß die letztere Einschränkung überflüssig ist (vgl. die Bemerkung 1 von E. Noether [12]).

3.3. Betrachten wir jetzt $\boldsymbol{Q}\{M\}$, $M \in \Gamma$ mit Fixpunkt in H^n: $M(Z) = Z$. Wir müssen im Folgenden eine Reihe von Fällen gesondert behandeln. Diese unterscheiden sich einerseits durch die Reduzibilität oder Irreduzibilität der charakteristischen Gleichung von M:

$$\chi_M(x) = |xE - M| = x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \ldots + a_0 = 0, \tag{2}$$

andererseits nach der Dimension der Fixpunktmannigfaltigkeit $\mathfrak{F}_M$.

Wir wollen als erstes voraussetzen, daß die charakteristische Gleichung $\chi_M(x)$ in $\boldsymbol{Q}$ irreduzibel ist. Ein solches M bezeichnen wir als *nicht-entartet*. Die Eigenwerte von M haben nach Lemma 4 (§ 2) die Gestalt $\sqrt{r}\,e^{\pm i\varphi_j}$ ($j = 1, \ldots, n$; r aus $M^* \cdot M = rE$). Da $\chi_M(x)$ irreduzibel ist, die Eigenwerte also alle verschieden sind, folgt insbesondere, daß keine der Kongruenzen (10_2) aus § 2 ($\varphi_i + \varphi_k \equiv 0 \pmod{2\pi}$) erfüllt ist. Daher ist $\mathfrak{F}_M$ eine nulldimensionale Fixpunktmannigfaltigkeit und *M hat genau einen Fixpunkt Z in H^n*. Die Menge der N aus $\mathfrak{M}\{2n, \boldsymbol{Q}\}$: $N = b_0E + b_1M + \ldots + b_{2n-1}M^{2n-1}$, $b_i \in \boldsymbol{Q}$, bildet, da $\chi_M(x)$ irreduzibel ist, einen Körper $2n$-ten Grades über $\boldsymbol{Q} \cdot E$, d.h. im nicht-entarteten Fall ist $K = \boldsymbol{Q}\{M\}$ maximal-kommutativer Körper in $\mathfrak{M}\{2n, \boldsymbol{Q}\}$. Es kann daher der Satz von Chevalley, Hasse und Noether in der engeren Form in 3.2 angewandt werden.

Diesen nicht-entarteten Fall behandeln wir ausführlich in § 4.

3.4. Das charakteristische Polynom $\chi_M(x)$ von $M \in \Gamma$ mit Fixpunkt in H^n sei jetzt reduzibel in $\boldsymbol{Q}$. Ein solches M bezeichnen wir als *entartet*. Bei großer Dimension von H^n existieren viele Entartungsmöglichkeiten. Wir beschränken uns daher auf den Fall $n = 2$. (Im Falle $n = 1$ existiert, abgesehen von $M = rE$, $\mathfrak{F}_M = H^1$, kein Entartungsfall.)

3.4.0. Wir wollen hier zuerst den Fall untersuchen, daß M einen isolierten Fixpunkt Z in H^2 besitzt. Die Eigenwerte von M seien (nach Lemma 4, § 2)

$$\sqrt{r}\,e^{\pm i\varphi_1} \quad \text{und} \quad \sqrt{r}\,e^{\pm i\varphi_2}.$$

In § 2, Formel (10_2), gilt nach Satz 2:

$$\varphi_1 \not\equiv 0 \pmod{\pi}, \quad \varphi_2 \not\equiv 0 \pmod{\pi} \quad \text{und} \quad \varphi_1 + \varphi_2 \not\equiv 0 \pmod{2\pi}. \tag{3}$$

Das charakteristische Polynom $\chi_M(x)$ aus (2) zerfällt in diesem Fall in $\boldsymbol{Q}$ in die zwei sogar in $\boldsymbol{R}$ irreduziblen Polynome zweiten Grades

$$\begin{gathered} x^2 - k_1x + r \quad \text{und} \quad x^2 - k_2x + r, \\ k_1 = 2\sqrt{r}\cos\varphi_1, \quad k_2 = 2\sqrt{r}\cos\varphi_2. \end{gathered} \tag{4}$$

Es sind nun folgende Fälle möglich:

a) $k_1 \neq k_2$. Dann sind (wegen $\chi_M(M) = 0$) $M^2 - k_1M + rE$ und $M^2 - k_2M + rE$ Nullteiler. Diesen Fall wollen wir *stark-entartet* nennen. Es ist hier $\boldsymbol{Q}\{M\}$ eine kommutative, halbeinfache Algebra vom Range 4 über $\boldsymbol{Q}$, d.h.

$$\boldsymbol{Q}\{M\} = R_1 \oplus R_2$$

mit R_1 und R_2 isomorph zu imaginär-quadratischen Zahlkörpern, die durch Auflösung der Gleichung (4) entstehen. Auch auf diesen Fall lassen sich nach den Ausführungen von 3.2 die Aussagen von Chevalley, Hasse und Noether anwenden. Eine Folgerung hieraus werden wir in § 7 ziehen.

b) $k_1 = k_2 = k$. Also $\cos\varphi_1 = \cos\varphi_2$ und mit (3): $\varphi_1 \equiv \varphi_2 \pmod{2\pi}$. Das zu M gehörige unitäre U (vgl. (6), § 2) hat daher die Gestalt

$$U = \sqrt{r}\,e^{i\varphi} \cdot E \qquad (\varphi \not\equiv 0 \pmod{\pi})\tag{5}$$

und M genügt somit den beiden (gleichwertigen) Gleichungen:

$$M + M^* = kE, \qquad M^2 - kM + rE = 0 \qquad (k = 2\sqrt{r}\cos\varphi \in \boldsymbol{Z}).\tag{6}$$

Die Diskriminante dieser quadratischen Gleichung ist negativ. Im Falle $k_1 = k_2$ bildet also $\boldsymbol{Q}\{M\}$ einen zu einem imaginärquadratischen Körper isomorphen Körper in $\mathfrak{M}\{4, \boldsymbol{Q}\}$. Wir nennen diesen Fall *schwach-entartet. Er* hat eine große Ähnlichkeit mit dem schwach-entarteten eindimensionalen Falle (vgl. 3.4.2). Wir werden die beiden Fälle gemeinsam in § 5 weiterbehandeln.

3.4.1. Die Matrix $M \in \Gamma$ besitze nun eine eindimensionale Fixpunktmannigfaltigkeit. Daraus folgt, daß genau eine der Kongruenzen (10_2) ($\varphi_i + \varphi_k \equiv 0 \pmod{2\pi}$) aus § 2 erfüllt ist. Wir untersuchen zuerst den Fall, daß die Kongruenz für ein $i = k$ eintritt, d.h., daß

$$\varphi_1 \equiv 0 \pmod{\pi} \wedge \varphi_2 \not\equiv 0 \pmod{\pi} \tag{7}$$

ist. (Vgl. § 2, 2.3.1, insbesondere Lemma 5 und Satz 3.)

Das zu M gehörige U ((6), § 2) hat die Gestalt:

$$U(M) = \pm\sqrt{r}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{i\varphi}\end{pmatrix}, \quad \varphi \not\equiv 0 \pmod{\pi}. \tag{8}$$

Die charakteristische Gleichung von M ist jetzt:

$$\chi_M(x) = (x-\sqrt{r})^2(x-\sqrt{r}e^{i\varphi})(x-\sqrt{r}e^{-i\varphi})$$

$$= x^4 - x^3(2\sqrt{r}(1+\cos\varphi)) + 2x^2r(1+2\cos\varphi) - 2xr^{3/2}(1+\cos\varphi) + r^2 = 0.$$

Aus dem Koeffizienten bei x^2 entnehmen wir $1+2\cos\varphi \in \boldsymbol{Q}$ und damit aus den Koeffizienten bei x^3 oder x: $\sqrt{r} \in \boldsymbol{Q}$, also $r = q^2$, $q \in \boldsymbol{Z}$. Das charakteristische Polynom zerfällt also über $\boldsymbol{Q}$ in zwei lineare Glieder $x-q$ und, wegen $\varphi \not\equiv 0 \pmod{\pi}$, in einen quadratischen Term mit Wurzeln in einem imaginärquadratischen Zahlkörper $K = \boldsymbol{Q}(\sqrt{d})$, $d < 0$. Diesen Fall nennen wir den *stark-entarteten* eindimensionalen Fall. Da M einen halbeinfachen Ring erzeugt (vgl. S. 75), besitzt das Minimalpolynom von M nur einfache Nullstellen. Anderseits sind sämtliche Wurzeln des charakteristischen Polynoms auch Wurzeln des Minimalpolynoms. Dieses ist also vom Grade 3 und zerfällt über $\boldsymbol{Q}$ in ein lineares und ein quadratisches Primpolynom. Daher ist

$$\boldsymbol{Q}\{M\} = R_1 \oplus R_2,$$

wobei R_1 isomorph zu $\boldsymbol{Q}$ und R_2 isomorph zu einem imaginärquadratischen Zahlkörper ist.

Erweitern wir $\boldsymbol{Q}\{M\}$ in irgend einer Weise zu einem kommutativen, halbeinfachen Ring vom Range 4 über $\boldsymbol{Q}$, so ist auch auf diesen erweiterten Ring die Aussage in 3.2 anwendbar.

3.4.2. Wir behandeln den zweiten Typus der eindimensionalen $\mathfrak{F}_M$ in H^2 (vgl. § 2, 2.3.2, insbesondere Lemma 6 und Satz 4). Es sei also $\varphi_1+\varphi_2 \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$. Das zu M gehörige U ist von der Form:

$$U(M) = \sqrt{r}\begin{pmatrix}e^{i\varphi} & 0\\ 0 & e^{-i\varphi}\end{pmatrix}, \quad \varphi \not\equiv 0 \pmod{\pi}. \tag{9}$$

Nach (9) erfüllt M die Gleichung

$$M+M^* = kE \quad \text{oder also} \quad M^2 - kM + rE = 0; \quad k = 2\sqrt{r}\cos\varphi. \tag{10}$$

Auch dieses M gehört folglich zur Einbettung eines imaginärquadratischen Zahlkörpers in $\mathfrak{M}\{4, \boldsymbol{Q}\}$ (vgl. 3.4.0). Wir sprechen hier vom eindimensionalen *schwach-entarteten* Falle. Wie gesagt werden wir ihn, zusammen mit dem nulldimensionalen schwach-entarteten Fall, genauer in § 5 untersuchen.

3.4.3. Es bleibt für $n = 2$ nur noch der Fall übrig, daß $M \in \Gamma$ in H^2 eine zweidimensionale Fixpunktmannigfaltigkeit besitzt (vgl. § 2, 2.3.3, insbesondere Lemma 7 und Satz 5). Das zu M gehörige $U(M)$ hat hier die Gestalt:

$$U(M) = \pm\sqrt{r}H, \quad H = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}. \tag{11}$$

Die Eigenwerte von M sind also alle reell. Es gilt für M:

$$M = M^* \quad \text{und daher} \quad M^2 = rE. \tag{12}$$

Ist r schon selbst ein Quadrat: $r = q^2$, $q \in \boldsymbol{Z}$, so sind $M-qE$ und $M+qE$ Nullteiler. Diesen Fall nennen wir den zweidimensionalen *stark-entarteten* Fall.

Erweitern wir das halbeinfache, kommutative $\boldsymbol{Q}\{M\}$ (vom Range 2) zu einer halbeinfachen, kommutativen Unteralgebra von $\mathfrak{M}\{4, \boldsymbol{Q}\}$ vom Range 4, so gilt für diese erweiterte Algebra der Satz von Chevalley, Hasse und Noether in der allgemeineren Form aus 3.2.

Ist hingegen $\sqrt{r} \notin \boldsymbol{Q}$, so ist $\boldsymbol{Q}\{M\}$ das isomorphe Bild eines reell-quadratischen Zahlkörpers in $\mathfrak{M}\{4, \boldsymbol{Q}\}$. Diesen *schwach-entarteten* Fall werden wir in § 6 weiter behandeln.

§ 4. DER NICHT-ENTARTETE FALL: ISOLIERTE FIXPUNKTE UND EINGEBETTETE ZAHLKÖRPER

4.1. Im Anschluß an 3.3 behandeln wir hier den nicht-entarteten Fall, in dem also $\chi_M(x) = |xE-M|$ in $\boldsymbol{Q}$ irreduzibel ist. Wir behaupten:

SATZ 7. *$\boldsymbol{Q}\{M\}$ ist ein isomorphes Bild eines total-imaginären Körpers K, vom Grade $2n$ über $\boldsymbol{Q}$. Die $*$-invarianten Elemente in $\boldsymbol{Q}\{M\}$ bilden einen Körper, der isomorph ist zu einem total-reellen Unterkörper L von K mit $[K:L] = 2$. Dieser Unterkörper wird von $M+M^*$ erzeugt.*

Beweis. Da keine der Kongruenzen (10_2) aus § 2 erfüllt ist, sind sämtliche Eigenwerte von M echt komplex, was zusammen mit 3.3 den ersten Teil von Satz 6 beweist.

Die Eigenwerte von $M+M^*$ sind alle reell nach Lemma 3 (§ 2). $M+M^*$ genügt keiner Gleichung vom Grade $m < n$, da sonst M einer Gleichung vom Grade $m+n < 2n$ genügte, wie man nach Multiplikation der Gleichung für $M+M^*$ mit M^n und unter Benutzung von $M^* = rM^{-1}$ sieht.

Andererseits muß $M+M^*$ einer Gleichung n-ten Grades genügen, da $M+M^*$ einen total-reellen Körper erzeugt, der in $\boldsymbol{Q}\{M\}$ liegt (M und $M^* = rM^{-1}$ sind aus $\boldsymbol{Q}\{M\}$) und dessen Index in $\boldsymbol{Q}\{M\}$ mindestens zwei ist. Also hat $\boldsymbol{Q}\{M+M^*\}$ den Grad n. Wir haben jetzt nur noch zu zeigen, daß jedes $*$-invariante Element aus $\mathbf{Q}\{M\}$ in dem von $M+M^*$ erzeugten Körper liegt: Sei $N\in\mathbf{Q}\{M\}$: $N = b_0E+b_1M+\ldots+b_{2n-1}M^{2n-1}$. N^* ist ebenfalls in $\mathbf{Q}\{M\}$, da $M^* = rM^{-1}$ in $\mathbf{Q}\{M\}$ liegt. Es ist $N^* = b_0E+b_1M^*+\ldots+b_{2n-1}M^{*2n-1}$. Ist nun N $*$-invariant, so folgt:

$$N = \tfrac{1}{2}(N+N^*) = b_0E+\frac{b_1}{2}(M+M^*)+\ldots+\frac{b_{2n-1}}{2}(M^{2n-1}+M^{*2n-1}),$$

M^m+M^{*m} ist als Polynom m-ten Grades in $M+M^*$ ausdrückbar und daraus folgt, daß N als Polynom in $M+M^*$ geschrieben werden kann. q.e.d.

4.2. Wir beweisen im Folgenden die Umkehrung von Satz 7:

SATZ 8. *Zu jedem total-imaginären Körper K vom Grade $2n$ über $\mathbf{Q}$ mit total-reellem Unterkörper L ($[K:L]=2$, $[L:\mathbf{Q}]=n$) gibt es eine Injektion $K\xrightarrow{\psi}\mathfrak{M}\{2n,\mathbf{Q}\}$, so daß $\psi(K)=\mathbf{Q}\{M\}$ wird für ein symplektisches $M\in\Gamma$ mit isoliertem Fixpunkt $Z\in H^n$.*

Eine solche Einbettung $\psi(K)$ nennen wir eine *symplektische Einbettung* von K.

Beweis. Die zu $L=L^{(1)}$ konjugierten Körper bezeichnen wir mit $L^{(i)}$, $i=2,\ldots,n$; zu $\mu=\mu^{(1)}\in L$ konjugierte Elemente aus $L^{(i)}$ mit $\mu^{(i)}$.
Einem $\mu\in L$ ordnen wir die Matrix

$$G(\mu) = \begin{pmatrix}\mu^{(1)} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \mu^{(n)}\end{pmatrix}$$

zu. Eine Injektion von K in $\mathfrak{M}\{2n,\mathbf{R}\}$ erhalten wir, indem wir jedem Element $\xi=\alpha+\beta\sqrt{\delta}$ aus $K=L(\sqrt{\delta})$ die Matrix

(1) $$M'_\xi = \begin{pmatrix}G(\alpha) & G(\beta)\\ G(\beta\delta) & G(\alpha)\end{pmatrix}$$

zuordnen. Diese Matrix hat den Fixpunkt

$$T = \begin{pmatrix}(\sqrt{\delta^{(1)}})^{-1} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & (\sqrt{\delta^{(n)}})^{-1}\end{pmatrix} \quad\text{in}\quad H^n\colon\ M'_\xi(T)=T.$$

Sei nun $\omega_1,\ldots,\omega_n$ eine $\mathbf{Q}$-Basis von L. Mit $\Omega=(\omega_{ik})\overset{\mathrm{def}}{=}(\omega_k^{(i)})$ bilden wir

(2) $$M_\xi = \begin{pmatrix}\Omega^t & O\\ O & \Omega^{-1}\end{pmatrix} M'_\xi \begin{pmatrix}\Omega^{-t} & O\\ O & \Omega\end{pmatrix},$$

M_ξ hat Koeffizienten in $\mathbf{Q}$: Denn durch

(3) $$\mu\omega_l = \sum_{j=1}^{n} m_{jl}\,\omega_j$$

bekommt man eine rationale Darstellung $\mu\to(m_{jl}) = G_0(\mu)$ von L. Aus (3) folgt:

$$G(\mu)\,\Omega = \Omega\, G_0(\mu).$$

$\Omega^t\Omega = \big(s_{L/\mathbf{Q}}(\omega_j\omega_l)\big)$ ist ebenfalls in $\mathfrak{M}\{u,\mathbf{Q}\}$. Also ist

$$M_\xi = \begin{pmatrix}\Omega^tG(\alpha)\,\Omega^{-t} & \Omega^tG(\beta)\,\Omega^{-t}\Omega^t\Omega\\ \Omega^{-1}G(\beta\delta)\,\Omega\,(\Omega^t\Omega)^{-1} & \Omega^{-1}G(\alpha)\,\Omega\end{pmatrix} \quad\text{in}\quad \mathfrak{M}\{2n,\mathbf{Q}\}.$$

Weiter ist M_ξ symplektisch unter der Voraussetzung $n_{K/L}(\xi)=a>0$, $a\in\mathbf{Q}$. Endlich hat M_ξ den Fixpunkt $Z=\Omega^tT\Omega$ in H^n (M_ξ hat dann, sofern ξ nicht schon in L ist, nach früheren Überlegungen genau einen Fixpunkt, also genau den Fixpunkt Z in H^n). Satz 7 ist also vollständig bewiesen, wenn wir gezeigt haben, daß es ein erzeugendes Element ξ von $K/\mathbf{Q}$ gibt, mit $n_{K/L}(\xi)=a\in\mathbf{Q}$, $a>0$.

Sei ϑ ein erzeugendes Element von L: $L=\mathbf{Q}(\vartheta)$. Also $K=\mathbf{Q}(\vartheta,\sqrt{\delta})$ und damit auch $K=\mathbf{Q}(\vartheta/\sqrt{\delta},\sqrt{\delta})$. Wir bilden in K: $\varrho=u\vartheta+\delta+\sqrt{\delta}$ mit $u\in\mathbf{Q}$. Für $\xi=\varrho^{1-\sigma}$ (σ der nichtidentische Automorphismus von K/L) gilt: $n_{K/L}(\xi)=1$. Andererseits findet man nach kurzer Rechnung:

$$\frac{\xi-\dfrac{1}{\xi}}{\xi+\dfrac{1}{\xi}-2} = u\frac{\vartheta}{\sqrt{\delta}}+\sqrt{\delta}.$$

Bei geeigneter Wahl von $u\in\mathbf{Q}$ (so daß $u\vartheta/\sqrt{\delta}+\sqrt{\delta}$ und seine Konjugierten bez. $\mathbf{Q}$ alle verschieden sind), ist dies ein erzeugendes Element von $K/\mathbf{Q}$. Also ist auch ξ für geeignetes u Erzeugendes von $K/\mathbf{Q}$. Dies vervollständigt unsern Beweis.

In der speziellen Einbettung von K in Satz 8 war Z nicht nur Fixpunkt des erzeugenden Elementes von K, sondern aller M_ξ, wie aus dem Beweis hervorgeht. Dies gilt natürlich auch allgemein: Ist $N\in\mathbf{Q}\{M\}$ und ist $M(Z)=Z$, so ist auch $N(Z)=Z$, denn es gilt mit $M_1(Z)=Z$ und $M_2(Z)=Z$ immer $(M_1+M_2)(Z)=Z$ und $M_1\cdot M_2(Z)=Z$. Wir bezeichnen deshalb in Zukunft den Fixpunkt Z von M als den *Fixpunkt der symplektischen Einbettung* $\mathbf{Q}\{M\}$ von K.

4.3. $\mathbf{Q}\{M\}$ ist in $\mathfrak{M}\{2n,\mathbf{Q}\}$ eine einfache Unteralgebra vom Range $2n$ und als solche eine maximale kommutative Unteralgebra. Wir betrachten jetzt verschiedene symplektische Einbettungen von K in $\mathfrak{M}\{2n,\mathbf{Q}\}$. Wir bezeichnen der Einfachheit halber eine (im folgenden festgehaltene)

Einbettung von K wieder mit K (und den total-reellen Unterkörper mit L) und weitere symplektische Einbettungen mit K' (bzw. L'). Nach Lemma 1 (§ 1) erhalten wir alle diese aus K durch innere Automorphismen von $\mathfrak{M}\{2n, Q\}$:

(4) $$K' = S\cdot K\cdot S^{-1}, \quad S\epsilon\mathfrak{M}\{2n, Q\},$$

wobei diese Transformation elementweise verstanden werden soll. Durch Anwendung des $*$-Operators folgt: $K' = K'^* = S^{-*}\cdot K^*\cdot S^* = S^{-*}\cdot K\cdot S^*$ (mit der Abkürzung: $S^{-*} = (S^{-1})^* = (S^*)^{-1}$). Daraus folgt, daß $S^*\cdot S$ K in sich transformiert, d.h. in K einen Automorphismus erzeugt. Da S auch L in L' transformiert und da diese Unterkörper nach Satz 7 durch Elementweise $*$-Invarianz ausgezeichnet sind, folgt:

$$S\cdot N\cdot S^{-1} = (S\cdot N\cdot S^{-1})^* = S^{-*}\cdot N\cdot S^* \quad \text{für alle } N\epsilon L.$$

Also $S^*\cdot S\cdot N = N\cdot S^*\cdot S$ und $S^*\cdot S$ erzeugt daher in L den identischen Automorphismus. In K kann $S^*\cdot S$ daher nur entweder den identischen Automorphismus oder den $*$-Automorphismus erzeugen. Aus $S^*\cdot S\cdot M\times \times(S^*\cdot S)^{-1} = M^*$ würde aber folgen:

$$S\cdot M\cdot S^{-1} = S^{-*}\cdot M^*\cdot S^* = (S\cdot M\cdot S^{-1})^*,$$

also $M' = M'^*$ für alle M' aus K'. $S^*\cdot S$ muß daher in K den identischen Automorphismus erzeugen und da K eine maximale kommutative Unteralgebra von $\mathfrak{M}\{2n, Q\}$ ist, folgt $S^*\cdot S\epsilon K$. Da $S^*\cdot S$ $*$-invariant ist, gilt sogar:

(5) $$S^*\cdot S\epsilon L.$$

Jede Matrix $S\epsilon\mathfrak{M}\{2n, Q\}$ mit der Eigenschaft (5) vermittelt einen Isomorphismus zwischen K und $K' = S\cdot K\cdot S^{-1}$ so, daß dadurch symplektische M aus K auf symplektische M' aus K' abgebildet werden: In der Tat, sei $M\epsilon K$, M symplektisch. Es ist

$$(S\cdot M\cdot S^{-1})^* = S^{-*}\cdot \underbrace{M^*}_{\epsilon K}\; \underbrace{S^*\cdot S}_{\epsilon L \text{ nach } (5)}\cdot S^{-1}$$
$$= S^{-*}\cdot S^*\cdot S\cdot M^*\cdot S^{-1} = S\cdot M^*\cdot S^{-1} = rS\cdot M^{-1}\cdot S^{-1},$$

also ist $M' = S\cdot M\cdot S^{-1}$ ebenfalls symplektisch.

Die Matrizen S sind natürlich nur gegeben bis auf Rechtsmultiplikation mit Elementen aus K, $S^*\cdot S$ also nur bis auf Multiplikation mit einer Relativnorm von K/L aus L.

4.4. Wir führen jetzt eine erste, gröbere Äquivalenzrelation zwischen den verschiedenen symplektischen Einbettungen K', K'' etc. ein:

(6) $$K' \sim K'' \Leftrightarrow K'' = U\cdot K'\cdot U^{-1}$$

mit einer Einheit aus $\mathfrak{J}$, für welche $U^*\cdot U\epsilon L'$ liegt. Unter dieser Voraussetzung ist mit $S^*\cdot S$ auch $(U\cdot S)^*\cdot U\cdot S$ in L. Der Durchschnitt der festen Einbettung K in $\mathfrak{M}\{2n, Q\}$ mit $\mathfrak{J}$ ist eine Ordnung $\mathfrak{o}$ des Körpers K:

$$\mathfrak{o} = K \cap \mathfrak{J}.$$

Wir betrachten nun unter den übrigen symplektischen Einbettungen $K' = S\cdot K\cdot S^{-1}$ nur diejenigen mit der Eigenschaft

(7) $$\mathfrak{o}' = S\cdot\mathfrak{o}\cdot S^{-1} = K'\cap\mathfrak{J}.$$

Dies ist gleichbedeutend mit $\mathfrak{o} = K\cap\mathfrak{J}'$, $\mathfrak{J}' = S^{-1}\cdot\mathfrak{J}\cdot S$. Nun sind nach dem in § 3, 3.2, zitierten Satz von Chevalley, Hasse und Noether die $\mathfrak{J}$-Linksideale $\mathfrak{L}$, für deren Rechtsordnung $\mathfrak{J}'$ ebenfalls $\mathfrak{J}'\cap K = \mathfrak{o}$ ist, erzeugt durch $\mathfrak{o}$-Ideale $\mathfrak{a}$ (mit der genauen Ordnung $\mathfrak{o}$): $\mathfrak{L} = \mathfrak{J}\cdot\mathfrak{a}$. Durch die Gleichung

(8) $$\mathfrak{J}\cdot S = \mathfrak{J}\cdot\mathfrak{a}$$

wird somit jedem Körper K' und dem zugehörigen S, S: $K\to K' = S\times \times K\cdot S^{-1}$ mit der Eigenschaft (7) ein $\mathfrak{o}$-Ideal $\mathfrak{a}$ aus K zugeordnet.

Aus der Bedingung (5): $S^*\cdot S\epsilon L$ folgt für $\mathfrak{a}$:

$$n_{K/L}(\mathfrak{a}) \sim (1)_L.$$

Beweis. Sei $S^*\cdot S = \lambda\epsilon L$. Die Rechtsordnung von $\mathfrak{J}\cdot S = \mathfrak{J}\cdot\mathfrak{a}$ ist $\mathfrak{J}' = S^{-1}\cdot\mathfrak{J}\cdot S$. Die Linksordung von $(\mathfrak{J}\cdot\mathfrak{a})^* = S^*\cdot\mathfrak{J}$ ist $S^*\cdot\mathfrak{J}\cdot S^{-*} = \lambda\cdot S^{-1}\cdot\mathfrak{J}\cdot S\cdot\lambda^{-1} = \lambda\cdot\mathfrak{J}'\cdot\lambda^{-1}$. Also ist die Linksordnung von $\lambda^{-1}\cdot\mathfrak{a}^*\cdot\mathfrak{J} = \lambda^{-1}\cdot S^*\cdot\mathfrak{J}$: $\lambda^{-1}\cdot S^*\cdot\mathfrak{J}\cdot S^{-*}\cdot\lambda = \mathfrak{J}'$, d.h.:

$$\mathfrak{J}\cdot\mathfrak{a}\cdot\lambda^{-1}\cdot(\mathfrak{J}\cdot\mathfrak{a})^* = \mathfrak{J}\cdot\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{a}^*\cdot\lambda^{-1} = \mathfrak{J}\cdot S\cdot\lambda^{-1}\cdot S^* = \mathfrak{J}$$

und folglich $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^* = (\lambda)$, wie behauptet.

Sei umgekehrt $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^* = (\lambda)$, $\lambda\epsilon L$. Es ist $\mathfrak{J}\cdot\mathfrak{a} = \mathfrak{J}\cdot S$ mit einem S aus $\mathfrak{M}\{2n, Q\}$. Also $\lambda^{-1}\cdot\mathfrak{a}^*\cdot\mathfrak{J} = \lambda^{-1}\cdot S^*\cdot\mathfrak{J} = \mathfrak{a}^{-1}\cdot\mathfrak{J}$. Daher $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}\cdot\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{a}^{-1}\cdot\mathfrak{J} = \mathfrak{J}\cdot S\cdot\lambda^{-1}\cdot S^*\cdot\mathfrak{J}$ und somit ist $S\cdot\lambda^{-1}\cdot S^*$ eine Einheit U mit $U^* = S\cdot\lambda^{-1}\cdot S^* = U$.

Also ist $J\cdot U$ eine schiefsymmetrische Einheit. Folglich existiert nach dem Elementarteilersatz für schiefsymmetrische Matrizen ein unimodulares V: $J\cdot U = V^t\cdot J\cdot V$, oder also: $U = V^*\cdot V$. Ersetzen wir S durch $S' = V\cdot S$ $(\mathfrak{J}\cdot\mathfrak{a} = \mathfrak{J}\cdot S')$, so gilt $S'^*\cdot S^* = \lambda$. Multipliziert man die Gleichung (8) von rechts mit einem Element aus K, so ändert sich $K' = S\cdot K\cdot S^{-1}$ nicht, wie wir oben sahen, und $\mathfrak{a}$ wird durch ein $\mathfrak{o}$-Ideal derselben Klasse $[\mathfrak{a}]$ ersetzt. Zusammen haben wir:

Satz 9. *Die Gleichung $\mathfrak{J}\cdot S = \mathfrak{J}\cdot\mathfrak{a}$ definiert eine eineindeutige Zuordnung zwischen den $\mathfrak{o}$-Idealklassen $[\mathfrak{a}]$ mit der Eigenschaft $n_{K/L}(\mathfrak{a}) \sim (1)_L$ und den groben Klassen symplektischer Einbettungen von K mit $\mathfrak{o} = K\cap\mathfrak{J}$.*

4.5. Erfüllt S außer (7) nicht nur (5), sondern sogar $S^* \cdot S = aE$, $a \in \boldsymbol{Q}$, $a > 0$; d.h. ist $S \in \Gamma$, so folgt daraus, nach analogen Schlüssen wie auf S. 83, für das $\mathfrak{o}$-Ideal $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{J} \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{J} \cdot S$:

$$n_{K/L}(\mathfrak{a}) = (a)$$

und umgekehrt.

Führen wir nun als engere Äquivalenzrelation ein:

$$K' \approx K'' \Leftrightarrow K'' = U \cdot K' \cdot U^{-1} \quad \text{mit} \quad U \in \Gamma_1,$$

so haben wir:

Satz 10. *Ausgehend von einer festen symplektischen Einbettung K (mit $\mathfrak{o} = \mathfrak{J} \cap K$) erhält man durch die Gleichung $\mathfrak{J} \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{J} \cdot S$ zu den $\mathfrak{o}$-Idealklassen $[\mathfrak{a}]$ mit $n_{K/L}(\mathfrak{a}) = (a) n_{K/L}(\alpha)$, $a \in \boldsymbol{Q}$, $\alpha \in K$, Klassen symplektischer Einbettungen $K' = S \cdot K \cdot S^{-1}$ im engeren Sinne, die diesen Idealklassen eineindeutig zugeordnet sind.*

4.6. Die $\mathfrak{o}$-Idealklassen $[\mathfrak{a}]$ mit $n_{K/L}(\mathfrak{a}) = (a) n_{K/L}(\alpha)$, $a \in \boldsymbol{Q}$, $\alpha \in K$, können eine echte Untergruppe der Gruppe der Idealklassen $[\mathfrak{a}]$ mit $n_{K/L}(\mathfrak{a}) \sim (1)_L$ bilden. In diesem Fall gehen aus einer festen symplektischen Einbettung K nicht alle symplektischen Einbettungen $K' = S \cdot K \cdot S^{-1}$ (mit $\mathfrak{o}' = S \cdot \mathfrak{o} \cdot S^{-1} = K' \cap \mathfrak{J}$) durch symplektische Matrizen $S \in \Gamma$ hervor. Für die durch $\mathfrak{J} \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{J} \cdot S$ zu diesen S gehörenden Idealen $\mathfrak{a}$ gilt nach Satz 9: $n_{K/L}(\mathfrak{a}) = (\lambda)$, wobei hier also λ nicht rationales Vielfaches einer Norm aus K/L ist.

Es stellen sich jetzt zwei Fragen:

1. In wieviele Äquivalenzklassen der engeren Art zerfallen die gröberen Äquivalenzklassen?

2. Der wievielte Teil *aller* symplektischen Einbettungen von K mit $\mathfrak{o} = K \cap \mathfrak{J}$ geht aus einer festen Einbettung durch Transformation mit Elementen aus Γ hervor?

1. Die verschiedenen $K', K'', \ldots$ einer gröberen Klasse gehen aus einem K durch Transformation mit Einheiten $U \in \mathfrak{J}$ hervor, wobei $U^* \cdot U \in L'$. Also $U^* \cdot U = \varepsilon$ ist eine Einheit aus L'. U ist nach früheren Überlegungen (4.3 letzter Absatz) nur bis auf den rechtsseitigen Faktor V, wo $V = \eta$ eine Einheit von K' ist, festgelegt. Also ist $\varepsilon = U^* \cdot U$ nur festgelegt bis auf $U \to U \cdot V$, $(U \cdot V)^* \cdot U \cdot V = V^* \cdot \varepsilon \cdot V = V^* \cdot V \cdot \varepsilon = n_{K/L}(\eta) \cdot \varepsilon$, d.h. bis auf Normen von Einheiten aus K'. Jede Einheit ε ist anderseits in der Weise $\varepsilon = U^* \cdot U$ mit U Einheiten aus $\mathfrak{J}$ darstellbar (vgl. S. 83). Also ist die Anzahl D der engeren Klassen in den gröberen Klassen gleich dem Index $\big(\varepsilon_L, n_{K/L}(\varepsilon_K)\big)$.

Nun ist der Index $(\varepsilon_L, \varepsilon_L^2) = 2^n$, der Index $\big(\varepsilon_L, (\varepsilon_L \gg 0)\big) = 2^{n-g}$, wo g die Anzahl der total-positiven Grundeinheiten von L ist. D ist also eine Potenz von 2: $D = 2^d$ mit $n - g \leqslant d \leqslant n$. (Denn jede Norm von K/L ist total-positiv und Quadrate sind sicher Normen. Die Zahl d hängt nur von der Relativdiskriminante von K/L ab (vgl. Cassels und Fröhlich [1], S. 29).) Ist speziell $g = 0$, d.h. sind alle total-positiven Zahlen schon Quadrate, so ist $d = n$.

2. Der Index der Idealklassen $[\mathfrak{a}]$ mit $n_{K/L}(\mathfrak{a}) = \big(a \cdot n_{K/L}(\alpha)\big)$, $a \in \boldsymbol{Q}$, in dem der Klassen $[\mathfrak{a}]$ mit $n_{K/L}(\mathfrak{a}) \sim (1)_L$ ist höchstens gleich der Relativgeschlechtszahl $g_{K/L}$ (Gleich $g_{K/L}$ genau dann, wenn alle $a \in \boldsymbol{Q}$, $a > 0$ die als Idealnormen auftreten, schon unter den Relativnormen von K/L auftreten). Zusammen:

Satz 11. *Die gröberen Klassen von symplektischen Einbettungen von K zerfallen in $D = \big(\varepsilon_L, n_{K/L}(\varepsilon_K)\big)$ engere Klassen. (Dabei ist $D = 2^d$, $n - g \leqslant d \leqslant n$, g: Anzahl der total-positiven Grundeinheiten von L.) Der Index der Menge der durch $S \in \Gamma$ auseinander hervorgehenden symplektischen Einbettungen K mit $\mathfrak{o} = \mathfrak{J} \cap K$ in der Menge aller diesser K ist höchstens*

$$D \cdot g_{K/L}$$

($g_{K/L}$: *Relativgeschlechtszahl*).

4.7. Als Beispiel wählen wir uns $K = \boldsymbol{Q}(e^{2\pi i/5})$. Es ist $K = \boldsymbol{Q}\big(\sqrt{5}, \sqrt{-\varepsilon\sqrt{5}}\big)$ mit $\varepsilon = (1+\sqrt{5})/2$. ε ist die Grundeinheit von $L = \boldsymbol{Q}(\sqrt{5})$ und die Norm von ε über $\boldsymbol{Q}$ ist -1.

Die Idealklassenzahl([4]) und damit auch die Anzahl der Klassen $[\mathfrak{a}]$ mit $n_{K/L}(\mathfrak{a}) \sim (1)_L$ sowie die Relativgeschlechtszahl $g_{K/L}$ ist 1. Sei τ der nicht-identische Automorphismus von $L/\boldsymbol{Q}$. Alle Einbettungen gehen nach Satz 9 und 11 aus einer festen Einbettung K durch Transformationen mit unimodularen Matrizen U hervor (wobei nach (5) $U^* \cdot U = \pm 1$, $\pm\varepsilon$, $\pm\varepsilon^\tau$, $\pm\varepsilon^2, \ldots$ etc. sein muß). Da jede total-positive Einheit in L schon ein Quadrat ist (die Grundeinheit ε hat ja die Norm -1) zerfällt nach Satz 11 die Äquivalenzklasse nach den unimodularen Matrizen in $D = 2^n = 4$ Klassen nach Γ_1.

Da $K = \boldsymbol{Q}(e^{2\pi i/5})$ der einzige total-imaginäre Körper vierten Grades mit reell quadratischem Zahlkörper als Grundkörper ist, der durch eine Einheit erzeugt wird, erhalten wir hier gleichzeitig eine Aussage über die Menge der Fixpunkte in H^2/Γ_1 zu nicht-entartetem M aus Γ_1. Es gibt also höchstens 4 verschiedene Fixpunkte in H^2/Γ_1 dieser Art.

Diese Aussage läßt sich aber noch präzisieren: Da, wie wir gleich zeigen werden, zwei Einheiten U_1, U_2 aus $\mathfrak{J}$ existieren mit $U_1^* \cdot U_1 = -1$ resp. $U_2^* \cdot U_2 = \varepsilon$, die in K den $*$-Automorphismus resp. τ induzieren: $K^* = U_1 \cdot K \cdot U_1^{-1}$, resp. $K^\tau = U_2 \cdot K \cdot U_2^{-1}$, so sind, ausgehend von einem Repräsentanten K einer engeren Klasse symplektischer Einbettungen von

([4]) Die einzige auftretende Ordnung ist die Hauptordnung von K, da ε und $e^{2\pi i/5}$ als Einheiten in jeder Ordnung liegen, anderseits aber auch die Hauptordnung erzeugen.

K die Körper $K' = K^*$, resp. $K'' = K^\tau$, resp. $K''' = K^{\tau *}$ Repräsentanten der drei restlichen Klassen. Der Fixpunkt von K ist aber nach 4.2, S. 81 auch Fixpunkt von K', K'' und K''' (da diese Körper ja mit K als Ganzes zusammenfallen).

Es existiert also genau ein Fixpunkt in H^2/Γ_1 zu nicht-entartetem $M \in \Gamma_1$.

Zum Beweis von $U_1 \cdot K \cdot U_1^{-1} = K^*$ für ein $U_1^* \cdot U_1 = -1$ resp. $U_2 \cdot K \cdot U_2^{-1} = K^\tau$ für $U_2^* \cdot U_2 = \varepsilon$ greifen wir auf unsere spezielle Einbettung $K = \{M_\xi\}$ aus (2) (S. 80) zurück:

$$M_\xi = M_{\alpha+\beta\sqrt{\delta}} = \begin{pmatrix} \Omega^t & O \\ O & \Omega^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} G(\alpha) & G(\beta) \\ G(\beta\delta) & G(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Omega^{-t} & O \\ O & \Omega \end{pmatrix}.$$

$U_1 = \begin{pmatrix} E & O \\ O & -E \end{pmatrix}$ erfüllt $U^* \cdot U_1 = -1$ und es ist

$$U_1 \cdot M_\xi \cdot U_1^{-1} = U_1 \cdot M_{\alpha+\beta\sqrt{\delta}} \cdot U_1^{-1} = M_{\alpha-\beta\sqrt{\delta}} = M_\xi^*.$$

$$U_2 = \begin{pmatrix} \Omega^t & O \\ O & \Omega^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} G \cdot G(\varepsilon) & O \\ O & G \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Omega^{-t} & O \\ O & \Omega \end{pmatrix} \qquad \left(G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

ist eine Einheit aus $\mathfrak{J}$ (vgl. M. Eichler [6], S. 56 ff) und es ist $U_2^* \cdot U_2 = M_\varepsilon$. Weiter ist

$$U_2 \cdot M_\xi \cdot U_2^{-1} = U_2 \cdot M_{\alpha+\beta\sqrt{\delta}} \cdot U_2^{-1} = M_{\alpha^\tau + \beta^\tau \sqrt{\varepsilon^\tau}\sqrt{\delta}} = M_{\xi^\tau}.$$

q.e.d.

4.8. Zum Schluß überlegen wir uns, welche Ordnungen $\mathfrak{o}$ in der Form $\mathfrak{o} = \mathfrak{J} \cap K$ auftreten. Wir behaupten:

Satz 12. *Ist $\mathfrak{o}$ eine beliebige Ordnung von K, so existiert eine symplektische Einbettung von K, so daß*

$$\mathfrak{o} = \mathfrak{J} \cap K.$$

Der Beweis dieses Satzes stützt sich auf zwei Hilfssätze:

Lemma 9. *Ist $\omega_1, \ldots, \omega_n$ eine $\boldsymbol{Z}$-Basis einer beliebigen Ordnung $\mathfrak{o}_L$ von L, so ist $M_\xi = M_{\alpha+\beta\sqrt{\delta}}$ aus* (2) *genau dann in $\mathfrak{J}$, wenn $\alpha \in \mathfrak{o}_L$, $\beta \in \mathfrak{d}_{\mathfrak{o}_L}^{-1}$ und $\beta\delta \in \mathfrak{d}_{\mathfrak{o}_L}$ ($\mathfrak{d}_{\mathfrak{o}_L}$: Differente von $\mathfrak{o}_L$ bez. $\boldsymbol{Z}$).*

Der Beweis des Lemmas ergibt sich aus der Einbettung (2), S. 80, wenn wir wie im Lemma gefordert $\omega_1, \ldots, \omega_n$ als $\boldsymbol{Z}$-Basis der beliebigen Ordnung $\mathfrak{o}_L$ von L wählen (vgl. M. Eichler [6], S. 56 ff).

Lemma 10. *Sei K eine symplektische Einbettung mit $\mathfrak{o} = \mathfrak{J} \cap K$. Sei $\mathfrak{o}_0$ eine $\mathfrak{o}$ umfassende Ordnung von K. Es gibt dann eine symplektische Einbettung K' derart, daß $\mathfrak{o}_0' = \mathfrak{J} \cap K'$ die zu $\mathfrak{o}_0$ isomorphe Ordnung ist.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{a}_0$ ein $\mathfrak{o}_0$-Ideal zur genauen Ordnung $\mathfrak{o}_0$ mit $n_{K/L}(\mathfrak{a}_0) \sim (1)_L$. Es ist $\mathfrak{J} \cdot \mathfrak{a}_0 = \mathfrak{J} \cdot S = S \cdot \mathfrak{J}'$ ($\mathfrak{J}' = S^{-1} \cdot \mathfrak{J} \cdot S$). Dabei ist $\mathfrak{o}_0 = \mathfrak{J}' \cap K$ und daher gilt mit $\mathfrak{o}_0' = S \cdot \mathfrak{o}_0 \cdot S^{-1}$ und $K' = S \cdot K \cdot S^{-1}$: $\mathfrak{o}' = \mathfrak{J} \cap K'$. K' ist nach 4.4 wieder eine symplektische Einbettung. w.z.b.w.

Aus Lemma 9 und 10 folgt schon direkt, daß die maximale Ordnung $\mathfrak{o}$ von K als Durchschnitt $\mathfrak{o} = \mathfrak{J} \cap K$ auftritt. Sei jetzt $\mathfrak{o}_0$ eine beliebige Ordnung von $K = L(\sqrt{\delta})$. Sei $\mathfrak{o}_L = L \cap \mathfrak{o}_0$ und $\omega_1, \ldots, \omega_n$ eine $\boldsymbol{Z}$-Basis von $\mathfrak{o}_L$. Durch K und L ist $\sqrt{\delta}$ gegeben bis auf Multiplikation mit einem beliebigen Element aus L. Also ist $\sqrt{\delta}$ aus $\mathfrak{o}_0 \cdot \mathfrak{d}_{\mathfrak{o}_L}$ wählbar. Damit ist dann $\delta \in \mathfrak{d}_{\mathfrak{o}_L}^2$. Mit dieser letzten Bedingung reduzieren sich die notwendigen und hinreichenden Bedingungen aus Lemma 9 für $M_\xi = M_{\alpha+\beta\sqrt{\delta}} \in \mathfrak{J}$ auf $\alpha \in \mathfrak{o}_L$, $\beta \in \mathfrak{d}_{\mathfrak{o}_L}^{-1}$. Diese Ordnung ist nun aber in $\mathfrak{o}_0$ enthalten: $\alpha \in \mathfrak{o}_L = \mathfrak{o}_0 \cap L$ und $\beta\sqrt{\delta} \in \mathfrak{o}_0$ wegen $\sqrt{\delta} \in \mathfrak{o}_0 \cdot \mathfrak{d}_{\mathfrak{o}_L}$. Mit Lemma 10 folgt nun unsere Behauptung von Satz 12. q.e.d.

§ 5. DIE SCHWACH-ENTARTETEN NULL- UND EINDIMENSIONALEN FÄLLE

5.1. Wir kehren zurück zu $M \in \Gamma$ mit zugehörigem

$$U(M) = \sqrt{r}\, e^{i\varphi} \cdot E \quad \text{oder} \quad \sqrt{r} \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix} \qquad (\varphi \not\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\, \pi))$$

aus 3.4.0 resp. 3.4.2.

In beiden Fällen genügt M der Gleichung

(1) $$M + M^* = kE, \qquad k = 2\sqrt{r}\cos\varphi \in \boldsymbol{Z},$$

oder also

$$M^2 - kM + rE = 0.$$

In beiden Fällen ist $\{N \in \mathfrak{M}\{4, \boldsymbol{Q}\},\ N = aE + bM,\ a, b \in \boldsymbol{Q}\}$ ein isomorphes Bild eines imaginär-quadratischen Körpers K und in beiden Fällen sind alle diese N auch symplektisch, d.h. aus $\mathfrak{M}\{4, \boldsymbol{Q}\} \cap \Sigma$. Ebenso gilt in beiden Fällen $\mathfrak{F}_N \supseteq \mathfrak{F}_M$ und für $b \neq 0$ $\mathfrak{F}_N = \mathfrak{F}_M$.

5.2. Satz 13. *Sei K ein imaginär-quadratischer Zahlkörper $\boldsymbol{Q}(\sqrt{d})$, $d < 0$. Sei $\mathfrak{o}$ eine beliebige Ordnung von K. Es existieren Einbettungen von K in $\mathfrak{M}\{4, \boldsymbol{Q}\} \cap \Sigma$ mit erzeugendem Element $M \in \Gamma$, M schwach-entartet mit nulldim. bzw. mit eindimensionalem $\mathfrak{F}_M$ so, daß*

(2) $$\mathfrak{o} = K \cap \mathfrak{J}$$

gilt. ($\mathfrak{o}$ *bedeutet hier*: *Bild von* $\mathfrak{o}$ *in* $\mathfrak{M}\{4, \boldsymbol{Q}\}$, $K = \boldsymbol{Q}\{M\}$: *Bild von* K.)

Solche Einbettungen nennen wir in diesem Paragraphen kurz *symplektische Einbettungen* mit nulldim. bzw. eindim. $\mathfrak{F}_M$.

Beweis. Sei $K = \boldsymbol{Q}(\sqrt{d})$, $d < 0$, und sei ω_1, ω_2 eine $\boldsymbol{Z}$-Basis von $\mathfrak{o}$. Wir ordnen einem beliebigen Element μ aus K die Matrix $G_0(\mu)$ aus $\mathfrak{M}\{2, \boldsymbol{Q}\}$ zu:

(3) $$G_0(\mu) = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}: \quad \mu\omega_1 = m_{11}\omega_1 + m_{21}\omega_2, \qquad \mu\omega_2 = m_{12}\omega_1 + m_{22}\omega_2.$$

Es ist

$$G_0(\mu)\in\mathfrak{M}\{2, \mathbf{Z}\} \Leftrightarrow \mu\in\mathfrak{o}.$$

Um ein *schwach-entartetes M mit nulldimensionalem* $\mathfrak{F}_M$ zu erhalten, „blasen" wir die Matrix $G_0(\mu)$ „auf" zu

$$M_\mu = \begin{pmatrix} m_{11}E & m_{12}E \\ m_{21}E & m_{22}E \end{pmatrix} \quad \text{aus} \quad \mathfrak{M}\{4, \mathbf{Q}\}. \tag{4}$$

Die Menge dieser M_μ, $\forall \mu\in K$, ist eine Einbettung von K in $\mathfrak{M}\{4, \mathbf{Q}\} \cap \Sigma$ und die erzeugenden Elemente haben einen isolierten Fixpunkt in H^2, nämlich $Z_0 = z_0 E$, z_0 Lösung der Gleichung

$$m_{21}z_0^2 + (m_{22} - m_{11})z_0 - m_{12} = 0 \quad \text{mit} \quad \operatorname{Im}(z_0) > 0.$$

Es ist $M_\mu\in\mathfrak{J} \Leftrightarrow \mu\in\mathfrak{o}$ und schließlich gilt offensichtlich $M_\mu + M_\mu^* = kE$.

Um ein *schwach-entartetes M mit eindimensionalem* $\mathfrak{F}_M$ *zu erhalten*, „ziehen" wir die Matrix $G_0(\mu)$ (siehe (3)) wie folgt „auseinander":

$$M_\mu = \begin{pmatrix} G_0(\bar\mu)^t & O \\ O & G_0(\mu) \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Dies ist eine Matrix aus $\mathfrak{M}\{4, \mathbf{Q}\} \cap \Sigma$, denn es ist

$$G_0(\bar\mu)G_0(\mu) = G_0(\bar\mu\mu) = \bar\mu\mu E.$$

Es ist wieder $M_\mu\in\mathfrak{J} \Leftrightarrow \mu\in\mathfrak{o}$ und $M_\mu + M_\mu^* = kE$ mit rationalem k. M_μ hat für erzeugendes $\mu\in K$ eine eindimensionale Fixpunktmannigfaltigkeit: Sei

$$G(\mu) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\mu) & \operatorname{Im}(\mu) \\ -\operatorname{Im}(\mu) & \operatorname{Re}(\mu) \end{pmatrix}$$

und

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}$$

eine komplexwertige, symmetrische Matrix; dann sind die Aussagen $G(\mu)^t\cdot T = T\cdot G(\mu)$ und $T = zE$ äquivalent. Es ist

$$G_0(\mu) = \Omega^{-1}\cdot G(\mu)\cdot\Omega \quad \text{mit} \quad \Omega = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\omega_1) & \operatorname{Re}(\omega_2) \\ -\operatorname{Im}(\omega_1) & -\operatorname{Im}(\omega_2) \end{pmatrix}$$

und daher gilt $M_\mu(Z) = Z$ für

$$Z = \Omega^t\cdot T\cdot\Omega = z\cdot\Omega^t\cdot\Omega.$$

q.e.d.

Wir erhalten eine symplektische Einbettung von $K = \mathbf{Q}(\sqrt{d})$ mit nulldim. $\mathfrak{F}_M$ anstelle von (4) auch durch

$$M'_\mu = \begin{pmatrix} \Omega^t & O \\ O & \Omega^{-1} \end{pmatrix}\cdot M_\mu\cdot\begin{pmatrix} \Omega^{-t} & O \\ O & \Omega \end{pmatrix}, \qquad M_\mu \text{ aus } (4).$$

Es ist wieder $M'_\mu\in\mathfrak{M}\{4, \mathbf{Q}\} \cap \Sigma$ (allerdings folgt aus $M_\mu\in\mathfrak{J}$ nicht $M'_\mu\in\mathfrak{J}$). Der Fixpunkt $Z_0 = z_0E$ von M_μ aus (4) geht über in

$$Z_1 = \Omega^t\cdot Z_0\cdot\Omega = z_0\cdot\Omega^t\cdot\Omega \tag{6}$$

dies ist ein Punkt auf der eindim. Fixpunktmannigfaltigkeit von M_μ aus (5) d.h.:

KOROLLAR 1 ZU SATZ 13. *Auf eindimensionalen* $\mathfrak{F}_M$ *zu symplektischen Einbettungen von* $K = \mathbf{Q}(\sqrt{d})$, $d < 0$, *sind durch* (6) *Punkte* Z_1 *ausgezeichnet, die isolierte Fixpunkte symplektischer Einbettungen in K sind.*

KOROLLAR 2 ZU SATZ 13. *Der *-Automorphismus ist in K der nicht-identische Automorphismus.*

Denn nach (1) gilt: $aE + bM \xrightarrow{*} a'E - bM$.

5.3. Die symplektischen Einbettungen $K = \mathbf{Q}\{M\}$ aus Satz 13 sind *einfache* Unteralgebren vom Range 2 in $\mathfrak{M}\{4, \mathbf{Q}\}$. Sei $\mathfrak{N}$ die Menge der Matrizen aus $\mathfrak{M}\{4, \mathbf{Q}\}$, die mit K elementweise vertauschbar sind. $\mathfrak{N}$ ist eine einfache Algebra und kann als Injektion ψ von $\mathfrak{M}\{2, K\}$ in $\mathfrak{M}\{4, \mathbf{Q}\}$ angesehen werden mit Zentrum $K = \psi|_K$ (vgl. M. Deuring [4], Kap. IV, § 4, Satz 6). Verschiedene isomorphe Einbettungen $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}'$ (mit „symplektischem" Zentrum K, K') gehen als einfache Unteralgebren von $\mathfrak{M}\{4, \mathbf{Q}\}$ durch innere Automorphismen ineinander über:

$$\mathfrak{N}' = S\cdot\mathfrak{N}\cdot S^{-1}, \qquad S\in\mathfrak{M}\{4, \mathbf{Q}\}. \tag{7}$$

Dies folgt, wie das Analogon in § 4 aus Lemma 1, § 1 (o.B.d.A. kann man natürlich $S\in\mathfrak{J}$ nehmen).

Der *-Anti-Automorphismus ist auch Antiautomorphismus auf $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{N}'$, denn es gilt ja (Korollar 2 zu Satz 13) $K^* = K$.

LEMMA 11. *Ist die Abbildung* (7) **-Operator-isomorph, so ist* $S\in\Gamma$ *und umgekehrt.*

Beweis. Sei $N\in\mathfrak{N}$. Bei (7) geht $N \to S\cdot N\cdot S^{-1}$ über und $N^* \to S\cdot N^* \times S^{-1} = (S\cdot N\cdot S^{-1})^*$, da (7) *-Operator-isomorph sein soll. Daher ist $S^*\cdot S\cdot N^* = N^*\cdot S^*\cdot S$, $\forall N\in\mathfrak{N}$. Also $S^*\cdot S$ ist im Zentrum von $\mathfrak{N}$ enthalten, d.h. $S^*\cdot S\in K$ und da $S^*\cdot S$ *-invariant ist, gilt nach Korollar 2 zu Satz 13 $S^*\cdot S = aE$, $a\in\mathbf{Q}$. Die Umkehrung ist trivial. w.z.b.w.

Von jetzt an verlangen wir von S immer: $S\in\Gamma$.

Wir führen noch eine Äquivalenzrelation ein zwischen den $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{N}'$:

$$\mathfrak{N} \sim \mathfrak{N}' \Leftrightarrow \mathfrak{N}' = S\cdot\mathfrak{N}\cdot S^{-1}$$

mit $S\in\Gamma_1$, der Siegel'schen Modulgruppe.

Wir erhalten gleichzeitig eine Klasseneinteilung der den $\mathfrak{N}$ eineindeutig zugeordneten (null- bzw. eindimensionalen) Fixpunktmannigfaltigkeiten $\mathfrak{F}$ ($=\mathfrak{F}_M$); wobei $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}'$ genau dann zur selben Klasse gehören, wenn sie durch ein Element aus Γ_1 ineinander übergehen: $Z\in\mathfrak{F} \Leftrightarrow S(Z)\in\mathfrak{F}'$ mit $S\in\Gamma_1$ oder kurz:

$$\mathfrak{F}' = \Gamma_1(\mathfrak{F}).$$

Die Äquivalenzklassen der $\mathfrak{F}$ sind Punkte oder Teilmannigfaltigkeiten der Modulmannigfaltigkeit H^2/Γ_1.

5.4. In diesem Abschnitt untersuchen wir den Zusammenhang zwischen den $\mathfrak{o}$-Idealklassen von $K = Q(\sqrt{d})$ ($\mathfrak{o}$ eine beliebige Ordnung aus K) und den Äquivalenzklassen der $\mathfrak{F}_M$ im schwach-entarteten null- und eindimensionalen Fall. $K = Q\{M\}$ sei jetzt eine feste symplektische Einbettung (mit nulldim. oder eindim. $\mathfrak{F}_M$) mit

$$\mathfrak{o} = \mathfrak{J}\cap K$$

$\mathfrak{N} = \psi(\mathfrak{M}\{2, K\})$ sei wie in 5.3 die Menge der mit $Q\{M\}$ elementweise vertauschbaren Matrizen. Es sei weiter

$$(8) \qquad \mathfrak{D} = \mathfrak{J}\cap\mathfrak{N}.$$

Sei jetzt $\mathfrak{a}$ ein $\mathfrak{o}$-Ideal zur genauen Ordnung $\mathfrak{o}$. $\mathfrak{a}$ erzeugt in $\mathfrak{M}\{4, Q\}$ ein $\mathfrak{J}$-Linksideal $\mathfrak{L}$ durch $\mathfrak{L} = \mathfrak{J}\cdot\mathfrak{a}$. Die $\mathfrak{J}$-Linksideale $\mathfrak{L}$ sind Hauptideale. Es ist daher:

$$(9) \qquad \mathfrak{J}\cdot\mathfrak{a} = \mathfrak{J}\cdot S_1, \quad S_1\in\mathfrak{M}\{4, Q\}.$$

S_1 ist dabei gegeben bis auf Linksmultiplikation mit Einheiten aus $\mathfrak{J}$. Aus $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^* = (a)$, $a\in Q$, folgt $S_1\cdot S_1^* = aU$ mit $*$-invarianter Einheit U. Nach Lemma 2, § 1, darf daher $S = bS_1$ für ein geeignetes ganz-rationales b als aus Γ vorausgesetzt werden und $\mathfrak{N}' = S\cdot\mathfrak{N}\cdot S^{-1}$ ist daher durch (9) bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmt (vgl. 5.3). Es gilt dabei noch:

$$(10) \qquad \mathfrak{D}' = S\cdot\mathfrak{D}\cdot S^{-1}\subset\mathfrak{J},$$

denn $S^{-1}\cdot\mathfrak{J}\cdot S\cdot\mathfrak{D} = S^{-1}\cdot\mathfrak{J}\cdot\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{D} = S^{-1}\cdot\mathfrak{J}\cdot\mathfrak{D}\cdot\mathfrak{a}\subseteq S^{-1}\cdot\mathfrak{J}\cdot S$, d.h.

(10′) $\qquad \mathfrak{D}$ ist enthalten in der Rechtsordnung von $\mathfrak{J}\cdot S$;

dies ist aber gleichbedeutend mit (10).

Ist a ein beliebiges Element aus K, so definiert $\mathfrak{a}a$ dasselbe $\mathfrak{N}'$: S ist durch das Paar $(\mathfrak{N}, \mathfrak{N}')$ bis auf Rechtsmultiplikation mit Elementen aus K, dem Zentrum von $\mathfrak{N}$, gegeben. Zusammen also:

Lemma 12. *Den $\mathfrak{o}$-Idealklassen* $[\mathfrak{a}]$ *sind, ausgehend von der festen Einbettung $\mathfrak{N} = \psi(\mathfrak{M}\{2, K\})$, Einbettungen $\mathfrak{N}'$ mit der Eigenschaft* (10) *zugeordnet.*

Im Folgenden wollen wir die Umkehrung von Lemma 12 beweisen: $\mathfrak{D}$ aus (8) ist gleich $\mathfrak{o}e_1 + \mathfrak{o}e_2 + \mathfrak{o}e_3 + \mathfrak{o}e_4$, wobei

$$e_1 = \psi\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right), \quad e_2 = \psi\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right), \quad e_3 = \psi\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right), \quad e_4 = \psi\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)$$

bedeuten soll.

Für die e_i gilt u.a.:

$$(11) \qquad e_1^2 = e_1, \quad e_2^2 = e_2, \quad e_1e_2 = e_2e_1 = 0 \quad \text{und} \quad e_1 + e_2 = E.$$

Es ist $\mathfrak{D}\cap K = \mathfrak{o}$.

Wir betrachten jetzt $S\in\Gamma$ mit

$$(2') \qquad \mathfrak{o}' = S\cdot\mathfrak{o}\cdot S^{-1} = \mathfrak{J}\cap K'$$

und

$$(10) \qquad \mathfrak{D}' = S\cdot\mathfrak{D}\cdot S^{-1}\subset\mathfrak{J}.$$

(Dies sind Klasseneigenschaften.)

Sei jetzt $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{o}e_1 + \mathfrak{o}e_2$.

Es ist $\mathfrak{D}_1\subset\mathfrak{D}$, also erfüllt auch $\mathfrak{D}_1$ die Bedingung (10).

$\mathfrak{D}_1$ ist eine direkte Summe und die Summanden sind modul-isomorph zu $\mathfrak{o}$. Der Quotientenring $\overline{\mathfrak{D}}_1$ von $\mathfrak{D}_1$ ist halbeinfach:

$$\overline{\mathfrak{D}}_1 = K\cdot e_1 \oplus K\cdot e_2.$$

Nun gilt nach Sätzen von Chevalley [2] und Hasse [11] (vgl. 3.2): $\mathfrak{J}\cdot S$ definiert für $k = 1, 2$ ein $\mathfrak{J}_k = e_k\cdot\mathfrak{J}\cdot e_k$-Linksideal $\mathfrak{A}_k$, dabei ist $\mathfrak{o}e_k$ gleich dem Durchschnitt der Rechtsordnung von $\mathfrak{A}_k$ mit $K\cdot e_k$.

Nach Noether [12] sind $\mathfrak{J}_k$-Ideale $\mathfrak{A}_k$ dieser Art erzeugt durch $\mathfrak{o}$-Ideale $\mathfrak{a}_k$ ($\mathfrak{o}$: die genaue Ordnung von $\mathfrak{a}_k$).

$\mathfrak{J}\cdot S$ definiert also zwei $\mathfrak{o}$-Ideale $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$:

$$(12) \qquad \mathfrak{J}\cdot S = \mathfrak{J}\cdot\mathfrak{a}_1\cdot e_1 + \mathfrak{J}\cdot\mathfrak{a}_2\cdot e_2.$$

Um die volle Umkehrung von Lemma 12 zu erhalten, müßen wir jetzt noch zeigen, daß die beiden $\mathfrak{o}$-Ideale $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ identisch sind.

Dies wird daraus folgen, daß $\mathfrak{J}\cdot S$ in seiner Rechtsordnung nicht nur $\mathfrak{D}_1$ (allein dies wurde bis jetzt benutzt), sondern sogar $\mathfrak{D}$ enthält:

Es ist $\mathfrak{J}\cdot S\cdot\mathfrak{D} = \mathfrak{J}\cdot S$. Oder also ausgeschrieben:

$$(13) \qquad \mathfrak{J}\cdot\mathfrak{a}_1(e_1\mathfrak{o} + e_3\mathfrak{o}) + \mathfrak{J}\cdot\mathfrak{a}_2(e_2\mathfrak{o} + e_4\mathfrak{o}) = \mathfrak{J}\cdot\mathfrak{a}_1\cdot e_1 + \mathfrak{J}\cdot\mathfrak{a}_2\cdot e_2.$$

(Dabei ist natürlich $\mathfrak{J}\cdot\mathfrak{a}_k = \mathfrak{J}\cdot A_k$ mit $A_k\in\mathfrak{M}\{4, Q\}$). Gleichung (13) bedeutet: $\exists N_1, N_2\in\mathfrak{J}$, so daß für beliebige $M_1, M_2\in\mathfrak{J}$ und $\gamma_{m,n}\in\mathfrak{o}$ ($1\leqslant m, n\leqslant 2$) gilt:

$$(14) \qquad M_1A_1e_1\gamma_{1,1} + M_1A_1e_3\gamma_{1,2} + M_2A_2e_2\gamma_{2,2} + M_2A_2e_4\gamma_{2,1} = N_1A_1e_1 + N_2A_2e_2.$$

Wir nehmen nun an $\mathfrak{a}_2$ sei nicht in $\mathfrak{a}_1$ enthalten: $\mathfrak{a}_2 \nsubseteq \mathfrak{a}_1$. Dann existiert ein $\gamma \in \mathfrak{a}_2$: $\mathfrak{J}\cdot\gamma\cdot e_4 \nsubseteq \mathfrak{J}\cdot\mathfrak{a}_1\cdot e_1$.

(Denn sonst wäre $\mathfrak{J}\cdot e_3\cdot\gamma\cdot e_4$ aus $\mathfrak{J}\cdot\gamma\cdot e_4$ in $\mathfrak{J}\cdot\mathfrak{a}_1\cdot e_1$ enthalten, also $\mathfrak{J}\cdot\gamma\cdot e_1 \subseteq \mathfrak{J}\cdot\mathfrak{a}_1\cdot e_1$, $\forall\gamma\in\mathfrak{a}_2$.)

Es gibt daher ein $M_2 \in \mathfrak{J}$:

$$M_2 A_2 e_4 \notin \mathfrak{J}\cdot\mathfrak{a}_1\cdot e_1. \tag{15}$$

Wählen wir jetzt in (14) $M_1 = 0$, $\gamma_{2,2} = 0$ und $\gamma_{2,1} = 1$. Dann existieren nach (14) ein N_1 und ein $N_2 \in \mathfrak{J}$:

$$M_2 A_2 e_4 = N_1 A_1 e_1 + N_2 A_2 e_2.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung von rechts mit e_1, so haben wir $M_2 A_2 e_4 = N_1 A_1 e_1$ im Widerspruch zu (15). Also ist $\mathfrak{a}_2 \subseteq \mathfrak{a}_1$ und analog $\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2$; d.h. $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}$. Wir haben somit:

SATZ 14. *Im schwach-entarteten null- und eindimensionalen Fall vermittelt die Gleichung $\mathfrak{J}\cdot\mathfrak{a} = \mathfrak{J}\cdot S$ eine umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen den $\mathfrak{o}$-Idealklassen $[\mathfrak{a}]$ von $K = \boldsymbol{Q}(\sqrt{d})$ und den Einbettungsklassen $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}\{2, K\}$ ($\mathfrak{O} = \mathfrak{M}\{2, \mathfrak{o}\}$) mit „symplektischem" Zentrum K für die gilt: $\mathfrak{o} = \mathfrak{J} \cap K$ und $\mathfrak{O} \subset \mathfrak{J}$.*

Diesen $\mathfrak{N}$ sind andererseits durch ihre Zentren K eineindeutig null-, bzw. eindimensionale Fixpunktmannigfaltigkeiten vom schwach-entarteten Typ zugeordnet und den Klassen der $\mathfrak{N}$ entsprechen Fixpunkte resp. fixe Teilmannigfaltigkeiten von H^2/Γ_1.

5.5. Für die schwach-entarteten eindimensionalen Fixpunktmannigfaltigkeiten können wir noch folgenden interessanten Satz beweisen:

SATZ 15. *Sei $\Gamma_{\mathfrak{F}}$ die Untergruppe der Elemente der Siegel'schen Modulgruppe Γ_1, die $\mathfrak{F}$ als Ganzes in sich überführen: $S(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}$.*

Diese Gruppe besitzt einen Normalteiler von endlichem Index, welcher zur elliptischen Modulgruppe isomorph ist. Genau gilt:

$$\Gamma_{\mathfrak{F}} = \mathfrak{U} \times (\Gamma_0 \cup V\Gamma_0),$$

wobei $V \in \Gamma_{\mathfrak{F}}$, $V^2 = E$, $\mathfrak{U}$ isomorph zur Faktorgruppe der Einheitengruppe von K nach $\{\pm E\}$, Γ_0 isomorph zur elliptischen Modulgruppe.

Beweis. $\mathfrak{F}$ sei die zur speziellen Einbettung aus 5.2 gehörige Fixpunktmannigfaltigkeit ($Z = z\cdot\Omega^t\cdot\Omega$, $\Omega = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(\omega_1) & \mathrm{Re}(\omega_2) \\ -\mathrm{Im}(\omega_1) & -\mathrm{Im}(\omega_2)\end{pmatrix}$, $[\omega_1, \omega_2] = \mathfrak{o}$). Sei $S \in \Gamma_1$, $S = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix}$, $S(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}$, d.h.:

$$(AZ+B)(CZ+D)^{-1} = Z' \in \mathfrak{F}, \quad \forall Z \in \mathfrak{F}. \tag{16}$$

Nach den Bezeichnungen von 5.2 gilt für $Z \in \mathfrak{F}$: $\Omega^{-t}\cdot Z\cdot\Omega^{-1} = zE$ ($\mathrm{Im}(z) > 0$).

(16) ist somit gleichbedeutend mit

$$(zA' + B')(zC' + D')^{-1} = z'E, \tag{17}$$

wobei

$$\begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D'\end{pmatrix} = S' \in \Sigma_1$$

und zwar mit Koeffizienten aus $\boldsymbol{Q}(\sqrt{|d|})$ und wobei

$$\left.\begin{aligned} \Omega^t\cdot A'\cdot\Omega^{-t} &= A \\ \Omega^t\cdot B'\cdot\Omega &= B \\ \Omega^{-1}\cdot C'\cdot\Omega^{-t} &= C \\ \Omega^{-1}\cdot D'\cdot\Omega &= D \end{aligned}\right\} \text{ Koeffizienten in } \boldsymbol{Z} \text{ haben.} \tag{18}$$

Eine Matrix aus Σ_1 welche (17) und (18) erfüllt ist z.B.

$$V = \begin{pmatrix} H & O \\ O & H\end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix} \quad (V^2 = E).$$

(Man überzeugt sich sofort davon, daß $\Omega^t\cdot H\cdot\Omega^{-t}$ und $\Omega^{-1}\cdot H\cdot\Omega$ Koeffizienten in $\boldsymbol{Z}$ haben.)

Schreibt man die sich aus (17) ergebenden Gleichungen als Gleichungen für die Koeffizienten von $A', \ldots, D'$ explizit auf, so ergibt sich mit (18) und den Symplektizitätsbedingungen ($S' \in \Sigma_1$):

Entweder S' oder VS' ist von der Gestalt:

$$\begin{pmatrix} a\cdot G(\varepsilon) & b\cdot G(\varepsilon) \\ c\cdot G(\varepsilon) & d\cdot G(\varepsilon)\end{pmatrix}$$

mit $ad - bc = 1$, $a, b, c, d \in \boldsymbol{Z}$ und $\varepsilon = e_1 + e_2\sqrt{d}$: Einheit aus K, wobei

$$G(\varepsilon) = \begin{pmatrix} e_1 & e_2|\sqrt{d}| \\ -e_2|\sqrt{d}| & e_1\end{pmatrix},$$

q.e.d.

§ 6. DER SCHWACH-ENTARTETE ZWEIDIMENSIONALE FALL

6.1. Es sei $M \in \Gamma$ eine symplektische Matrix mit zweidimensionaler Fixpunktmannigfaltigkeit in H^2, also $M\cdot M^* = rE$. M ist schwachentartet, wenn $\sqrt{r} \notin \boldsymbol{Q}$. Das zugehörige $U(M)$ hat nach 3.4.3 die Gestalt

$$U(M) = \pm\sqrt{r}\cdot H, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

M genügt der Gleichung

(1) $$M^2 = rE \quad \text{und daher ist} \quad M = M^*.$$

Wir wissen schon (aus 3.4.3), daß $\boldsymbol{Q}\{M\}$ eine Einbettung eines reell-quadratischen Körpers in $\mathfrak{M}\{4, \boldsymbol{Q}\}$ ist und (aus 2.3.3), daß kein $N \in \boldsymbol{Q}\{M\}$, $N = aE + bM$, mit $a \cdot b \neq 0$ symplektisch ist.

6.2. Damit wir einen analogen Satz wie Satz 13 (§ 5) aufstellen können, studieren wir noch eine spezielle Einbettung eines reellquadratischen Körpers $K = \boldsymbol{Q}(\sqrt{d})$ in $\mathfrak{M}\{4, \boldsymbol{Q}\}$:

$\mathfrak{o}$ sei eine beliebige Ordnung von K und ω_1, ω_2 eine $\boldsymbol{Z}$-Basis von $\mathfrak{o}$. σ bedeute den nicht-identischen Automorphismus von $K/\boldsymbol{Q}$.

Wir ordnen $\mu \in K$ die Matrix $G_0(\mu)$ aus $\mathfrak{M}\{2, \boldsymbol{Q}\}$ zu:

$$\begin{aligned}\mu\omega_1 &= m_{11}\omega_1 + m_{21}\omega_2;\\ \mu\omega_2 &= m_{12}\omega_1 + m_{22}\omega_2\end{aligned} \qquad \mu \leftrightarrow G_0(\mu) = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}.$$

Es ist

$$G_0(\mu) \in \mathfrak{M}\{2, \boldsymbol{Z}\} \Leftrightarrow \mu \in \mathfrak{o}.$$

Ist

$$G(\mu) = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu^\sigma \end{pmatrix},$$

so ist

(2) $$G_0(\mu) = \Omega^{-1} \cdot G(\mu) \cdot \Omega \quad \text{mit} \quad \Omega = \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 \\ \omega_1^\sigma & \omega_2^\sigma \end{pmatrix}.$$

Wir ordnen nun μ die Matrix M aus $\mathfrak{M}\{4, \boldsymbol{Q}\}$ zu:

$$M = \begin{pmatrix} G_0(\mu)^t & O \\ O & G_0(\mu) \end{pmatrix}.$$

Es ist $M \in \mathfrak{J} \Leftrightarrow \mu \in \mathfrak{o}$. M ist symplektisch für $\mu = a\sqrt{d}$, $a \in \boldsymbol{Q}$, es ist offensichtlich $M = M^*$ und $M^2 = rE$, $r = a^2 d$.

Schlußendlich hat die Matrix M eine zweidimensionale Fixpunktmannigfaltigkeit in H^2:

Die komplexwertige, symmetrische Matrix $T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}$ erfüllt die Gleichung $G(\mu)^t \cdot T = (G(\mu) \cdot T =)\ T \cdot G(\mu)$ genau dann, wenn $t_{12} = t_{21} = 0$; t_{11}, t_{22} beliebig. Daher gilt $\forall Z = \Omega^t \cdot T \cdot \Omega$:

$$G_0(\mu)^t \cdot Z = Z \cdot G_0(\mu), \qquad \text{d.h.} \quad M(Z) = Z.$$

Somit haben wir:

Satz 16. *Sei K ein reell-quadratischer Zahlkörper. Sei $\mathfrak{o}$ eine beliebige Ordnung von K. Es existiert eine Einbettung von K in $\mathfrak{M}\{4, \boldsymbol{Q}\}$ mit erzeugendem Element $M \in \Gamma$ mit zweidimensionalem $\mathfrak{F}_M$ in H^2 vom schwach-entarteten Typ, so daß*

(3) $$\mathfrak{o} = \mathfrak{J} \cap K,$$

$\mathfrak{o}$ das Bild der Ordnung $\mathfrak{o}$; $K = \boldsymbol{Q}\{M\}$: das Bild von K.

Solche Einbettungen nennen wir kurz *symplektische Einbettungen* mit zweidim. $\mathfrak{F}_M$.

6.3. In Analogie zu 5.3 seien $K = \psi(K)$, $K' = \psi'(K)$ verschiedene isomorphe Einbettungen eines reell-quadratischen Zahlkörpers K mit zweidimensionalen Fixpunktmannigfaltigkeiten, $\mathfrak{N}$ resp. $\mathfrak{N}'$ die Menge der mit K bzw. K' elementweise vertauschbaren Matrizen aus $\mathfrak{M}\{4, \boldsymbol{Q}\}$. Diese $\mathfrak{N}$ sind wieder isomorph zu $\mathfrak{M}\{2, K\}$ (vgl. § 5, 5.3).

Es gilt nach Lemma 1 wiederum

(4) $$\mathfrak{N}' = S \cdot \mathfrak{N} \cdot S^{-1} \quad \text{mit} \quad S \in \mathfrak{M}\{4, \boldsymbol{Q}\}.$$

Ebenso ist auch hier wegen $K = K^*$ der $*$-Antiautomorphismus auch Antiautomorphismus auf $\mathfrak{N}$. Wir behaupten nun:

Lemma 13. 1. *Ist $N \in \mathfrak{N}$ $*$-invariant, so ist $N \in K$.*

2. *Ist die Abbildung* (4) *$*$-Operator-isomorph, so gibt es unter den diese Abbildung vermittelnden S ein $S \in \Gamma$.*

Beweis. 1. Sei $M \in \Gamma \cap K$. Wegen $M = M^*$ nach (1) hat M die Gestalt

$$\begin{pmatrix} R & aJ \\ bJ & R^t \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};$$

dabei gilt noch: $r_{11} = -r_{22}$ wegen $M \in \Gamma$. Wegen $N^* = N$ hat N die Gestalt $\begin{pmatrix} T & cJ \\ dJ & T^t \end{pmatrix}$. Aus $N \in \mathfrak{N}$, d.h. aus $MN = NM$ folgt jetzt nach elementarer Rechnung $N = aE + bM$; d.h. $N \in K$.

2. Ganz analog wie in 5.3 gilt: $S \cdot N^* \cdot S^{-1} = (S \cdot N \cdot S^{-1})^*$, da (4) $*$-operator-isomorph sein soll. Also ist $S^* \cdot S \cdot N^* = N^* \cdot S^* \cdot S$, $\forall N \in \mathfrak{N}$, also ist $S^* \cdot S$ in K, dem Zentrum von $\mathfrak{N}$ enthalten. Wir gehen nun über zu

$$\psi^{-1}(\mathfrak{N}) = \mathfrak{M}\{2, K\}: \ \psi^{-1}(S^* \cdot S) = \varkappa E, \qquad \varkappa \in K.$$

Für jedes $G = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ aus $\mathfrak{M}\{2, K\}$ gilt: $G^* \cdot G$ ist nach der ersten Aussage von Lemma 13 in K, also ist G^* ein Vielfaches von G^{-1}. Da aber bei $G \to G^*$ die Determinante erhalten bleibt, ist $G^* = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$.

S ist uns gegeben bis auf Rechtsmultiplikation mit Elementen aus $\mathfrak{N}$. Wir multiplizieren nun $\varkappa E = \psi^{-1}(S^* \cdot S)$ von rechts mit G und von links mit G^*, wobei wir $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in G so wählen, daß $G^* \cdot G = (\alpha\delta - \gamma\beta) E$

$= \varkappa^\sigma \cdot E$ wird. Daraus folgt $G^* \varkappa E \cdot G = \varkappa \varkappa^\sigma E = aE$ mit $a \in \boldsymbol{Q}$, $a > 0$. Damit ist $S' = S\psi(G)$ in Σ und ein geeignetes ganzrationales Vielfaches von S' sogar in Γ. q.e.d.

Von jetzt an verlangen wir wieder (wie in § 5), daß $\mathfrak{N}$ *-Operator-isomorph zu $\mathfrak{N}'$ ist. Wir führen noch die Äquivalenzrelation ein:

$$\mathfrak{N} \sim \mathfrak{N}' \Leftrightarrow \mathfrak{N}' = S \cdot \mathfrak{N} \cdot S^{-1} \quad \text{mit} \quad S \in \Gamma_1.$$

Wir erhalten so, wie in 5.3, eine Klasseneinteilung der $\mathfrak{N}$ und der den $\mathfrak{N}$ eineindeutig zugeordneten Fixpunktmannigfaltigkeiten $\mathfrak{F}$.

6.4. Sei $K = \boldsymbol{Q}\{M\}$ jetzt eine feste symplektische Einbettung mit zweidim. $\mathfrak{F}_M$. Sei $\mathfrak{N}$ die Menge der mit K elementweise vertauschbaren Matrizen ($\cong \mathfrak{M}\{2, K\}$) und sei $\mathfrak{O} = \mathfrak{J} \cap \mathfrak{N}$. Es ist nach (3) $\mathfrak{o} = \mathfrak{J} \cap K$. Wir betrachten nun unter allen zu K isomorphen Einbettungen K' nur diejenigen mit

$$\mathfrak{O}' \subset \mathfrak{J} \quad \text{und} \quad \mathfrak{o}' = \mathfrak{J} \cap K'.$$

Wir können auf diesen Fall die Ausführungen von 5.4 übertragen, allerdings müssen wir dabei berücksichtigen, daß der *-Antiautomorphismus nach (1) in K jetzt der identische Automorphismus ist. Wir erhalten also hier durch die Gleichung

$$\mathfrak{J} \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{J} \cdot S \tag{5}$$

$\mathfrak{a}$: $\mathfrak{o}$-Ideal zur genauen Ordnung $\mathfrak{o}$, $S \in \Gamma$:

$$S \cdot \mathfrak{O} \cdot S^{-1} \subset \mathfrak{J}, \quad S \cdot \mathfrak{o} \cdot S^{-1} = \mathfrak{J} \cap S \cdot K \cdot S^{-1} \tag{6}$$

eine umkehrbar-eindeutige Zuordnung zwischen den Fixpunktmannigfaltigkeiten $\mathfrak{F}' = S(\mathfrak{F})$ und denjenigen der $\mathfrak{o}$-Idealklassen von K, die Ideale $\mathfrak{a}$ enthalten mit

$$\mathfrak{a}^2 = (a), \quad a \in \boldsymbol{Q}, \ a > 0.$$

Diese $\mathfrak{o}$-Ideale sind bekanntlich genau diejenigen Ideale, deren Primidealteiler die Diskriminante der Ordnung $\mathfrak{o}$ von K teilen. Also:

Satz 17. *Die Gleichung $\mathfrak{J} \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{J} \cdot S$ vermittelt eine umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen den $\mathfrak{o}$-Idealklassen $[\mathfrak{a}]$ von K mit Repräsentanten $\mathfrak{a} : \mathfrak{a}^2 = (a)$, $a \in \boldsymbol{Q}$, $a > 0$, und den Einbettungsklassen der $\mathfrak{N}$ ($\mathfrak{N} \cong \mathfrak{M}\{2, K\}$, $\mathfrak{o} = \mathfrak{J} \cap K$, $\mathfrak{O} = \mathfrak{J} \cap \mathfrak{N}$), für die gilt:*

$$S \cdot \mathfrak{o} \cdot S^{-1} = \mathfrak{J} \cap S \cdot K \cdot S^{-1},$$

$$S \cdot \mathfrak{O} \cdot S^{-1} \subset \mathfrak{J}.$$

Diesen $\mathfrak{N}$ sind andererseits eineindeutig zweidimensionale Fixpunktmannigfaltigkeiten zum schwach-entarteten Typus zugeordnet.

6.5. Sei $\Gamma_{\mathfrak{F}}$ die Untergruppe von Γ_1 bestehend aus den Elementen S von Γ_1, die $\mathfrak{F}$ als Ganzes in sich transformieren. Für diese Gruppe gilt:

Satz 18. *$\Gamma_{\mathfrak{F}}$ besitzt einen Normalteiler vom Index 2, welcher isomorph zur engeren Hilbert'schen Modulgruppe $H_{\mathfrak{d}_0}$ von K bezüglich der Differente $\mathfrak{d}_0$ ist. Genauer:*

$$\Gamma_{\mathfrak{F}} = H_{\mathfrak{d}_0} \cup V H_{\mathfrak{d}_0}.$$

($V \in \Gamma_1$, $V^2 = E$, $\mathfrak{d}_0$: *Differente von* $\mathfrak{o}$ *bez.* $\boldsymbol{Z}$,

$$H\mathfrak{d}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \ \alpha\delta - \beta\gamma = 1; \ \alpha, \delta \in \mathfrak{o}, \gamma \in \mathfrak{d}_0, \beta \in \mathfrak{d}_0^{-1} \right\}).$$

Beweis. $\mathfrak{F}$ sei die zur speziellen Einbettung von K aus 6.2 gehörige Fixpunktmannigfaltigkeit. $S \in \Gamma_1$ erfülle $S(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}$. Es ist also:

$$S = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_1,$$

$$(AZ + B)(CZ + D)^{-1} = Z' \in \mathfrak{F}, \quad \forall Z \in \mathfrak{F}. \tag{7}$$

Wie wir in 6.2 gesehen haben ist

$$T = \Omega^{-t} \cdot Z \cdot \Omega^{-1} = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 \\ 0 & t_{22} \end{pmatrix}, \quad \text{für} \quad Z \in \mathfrak{F}.$$

(7) ist somit gleichbedeutend mit

$$(A'T + B')(C'T + D')^{-1} = T' = \begin{pmatrix} t'_{11} & 0 \\ 0 & t'_{22} \end{pmatrix}, \tag{8}$$

wobei $S' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = S' \in \Sigma_1$ ist, mit Koeffizienten aus $\boldsymbol{Q}(\sqrt{d})$, $d > 0$ und $A', \ldots, D'$ den Bedingungen genügen:

$$\left. \begin{array}{l} \Omega^t \cdot A' \cdot \Omega^{-t} \\ \Omega^t \cdot B' \cdot \Omega \\ \Omega^{-1} \cdot C' \cdot \Omega^{-t} \\ \Omega^{-1} \cdot D' \cdot \Omega \end{array} \right\} \text{haben Koeffizienten in } \boldsymbol{Z}. \tag{9}$$

Eine Matrix aus Σ_1 von dieser Art ist z.B.:

$$V = \begin{pmatrix} G & O \\ O & G \end{pmatrix} \quad \left(G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \quad (V^2 = E).$$

Man überlegt sich leicht, daß $\Omega^t \cdot G \cdot \Omega^{-t}$ und $\Omega^{-1} \cdot G \cdot \Omega$ Koeffizienten in $\boldsymbol{Z}$ haben.

Schreibt man die sich aus (8) und $S' \in \Sigma_1$ ergebenden Bedingungen für die Koeffizienten der $A', \ldots, D'$ explizit auf, so sieht man, daß immer entweder $A', \ldots, D'$ oder $GA', \ldots, GD'$ Diagonalmatrizen sind. Damit ist aber (vgl. 6.2)

$$A' = G(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^\sigma \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad D' = G(\delta)$$

oder

$$GA' = G(\alpha), \quad \ldots, \quad GD' = G(\delta).$$

Aus $S' \in \Sigma_1$ folgt natürlich $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ und aus (9) folgt: $\alpha, \delta \in \mathfrak{o}, \gamma \in \mathfrak{d}_0$, $\beta \in \mathfrak{d}_0^{-1}$ ($\Omega^t \cdot \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^\sigma \end{pmatrix} \cdot \Omega^{-t}$ ist ja unser $G_0(\alpha)^t$ aus 6.2. $\Omega^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta^\sigma \end{pmatrix} \cdot \Omega$ ist $G_0(\delta)$ und die beiden andern Behauptungen folgen aus $\Omega^t \cdot \Omega = \Delta = (s_{K/Q}(\omega_j \omega_l))$ und aus $\Omega^t \cdot G(\mu) \cdot \Omega^{-1} = \Delta G_0(\mu) = (s_{K/Q}(\omega_j \mu \omega_l))$).

§ 7. ZUR BESTIMMUNG DER MENGE DER BEZ. Γ_1 INÄQUIVALENTEN $\mathfrak{F}_M$ IN H^2 MIT $M \in \Gamma_1$

7.1. Wir wollen uns in diesem Paragraphen überlegen, wie man mit Hilfe unserer allgemeinen Sätze wenigstens für $n = 2$ und $r = 1$ – d.h. für die Elemente der Siegel'schen Modulgruppe Γ_1 und für H^2 – die Menge der bezüglich Γ_1 inäquivalenten Fixpunktmannigfaltigkeiten bestimmen kann. Dabei müssen wir nur noch die entarteten Fälle behandeln. Durch das Beispiel in § 4, 4.7, wird schon die Menge der bez. Γ_1 inäquivalenten Fixpunkte zu nicht entartetem $M \in \Gamma_1$ bestimmt. Es liegt in H^2/Γ_1 genau ein solcher Fixpunkt.

7.2. Betrachten wir nun die schwach-entarteten Fälle. Da r $(=1)$ ein Quadrat ist, tritt kein schwach-entarteter zweidimensionaler Fall auf (vgl. 3.4.3). Im eindimensionalen, bzw. nulldimensionalen Fall ist M nach § 5 erzeugendes Element eines imaginärquadratischen Zahlkörpers. Aus $MM^* = E$ folgt: M ist eine Einheit dieses Körpers. Also treten nur die beiden Fälle auf:

$$K = \boldsymbol{Q}(i) \quad \text{und} \quad K = \boldsymbol{Q}(\varrho), \quad \varrho = e^{2\pi i/6}, \ \varrho^2 - \varrho + 1 = 0.$$

$[1, i]$ und $[1, \varrho]$ bilden dabei in $\boldsymbol{Q}(i)$ resp. $\boldsymbol{Q}(\varrho)$ eine $\boldsymbol{Z}$-Basis der *Hauptordnung* $\mathfrak{o} = [\omega_1, \omega_2]$.

In § 5 hatten wir eine spezielle Einbettung von K in $\mathfrak{M}\{2, \boldsymbol{Q}\}$ erhalten durch:

$$K \ni \mu \Leftrightarrow G_0(\mu) = (m_{ik}) \quad \text{mit} \quad \mu\omega_1 = m_{11}\omega_1 + m_{21}\omega_2, \quad \mu\omega_2 = m_{12}\omega_1 + m_{22}\omega_2.$$

Ist $\mathfrak{o} = [1, i]$, so ist $-G_0(i) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = J$.

Ist $\mathfrak{o} = [1, \varrho]$, so ist $G_0(\varrho) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Durch die speziellen Einbettungen von $K = \boldsymbol{Q}(i)$ resp. $K = \boldsymbol{Q}(\varrho)$ in $\mathfrak{M}\{4, \boldsymbol{Q}\}$ nach § 5 (5.2) erhalten wir:

$M_{i,1\text{-dim.}} = \begin{pmatrix} J & O \\ O & J \end{pmatrix}$ mit der Fixpunktmannigfaltigkeit

$$\mathfrak{F}_M = \{zE, \operatorname{Im}(z) > 0\},$$

$M_{\varrho,1\text{-dim.}} = \begin{pmatrix} G_0(\bar\varrho)^t & O \\ O & G_0(\varrho) \end{pmatrix}$ mit der Fixpunktmannigfaltigkeit

$$\mathfrak{F}_M = \left\{ z \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \operatorname{Im}(z) > 0 \right\},$$

$M_{i,0\text{-dim.}} = \begin{pmatrix} O & E \\ -E & O \end{pmatrix} = J$ mit dem isolierten Fixpunkt

$$\mathfrak{F}_M = Z = iE,$$

$M_{\varrho,0\text{-dim.}} = \begin{pmatrix} O & -E \\ E & E \end{pmatrix}$ mit dem isolierten Fixpunkt

$$\mathfrak{F}_M = Z = \varrho^2 E.$$

Verschiedene, isomorphe Einbettungen K, K' von $\boldsymbol{Q}(i)$ resp. $\boldsymbol{Q}(\varrho)$ gehen, wie wir nach § 5 (5.3) wissen, durch Transformation mit symplektischem S ineinander über:

$$K' = S \cdot K \cdot S^{-1}, \quad S \in \Gamma.$$

Aus den allgemeinen Sätzen in § 5 folgt, da sowohl $\boldsymbol{Q}(i)$ wie $\boldsymbol{Q}(\varrho)$ die Idealklassenzahl 1 haben: Es gibt keine weitere isomorphe symplektische Einbettung K' von K in $\mathfrak{M}\{4, \boldsymbol{Q}\}$ so, daß wieder $S \cdot \mathfrak{O} \cdot S^{-1} = \mathfrak{O}' \subset \mathfrak{J}$ liegt (Dabei war $\mathfrak{O} = \mathfrak{R} \cap \mathfrak{J}$, $\mathfrak{R} \cong \mathfrak{M}\{2, K\}$ die Menge der mit K elementweise vertauschbaren Matrizen). Es ist aber möglich, daß zwar nicht $\mathfrak{O}' \subset \mathfrak{J}$ liegt, aber doch $\mathfrak{o}' = S \cdot \mathfrak{o} \cdot S^{-1}$ $(\mathfrak{o} = \mathfrak{J} \cap K)$ bei Transformation mit einem $S \in \Gamma$. Unsere mit den $\mathfrak{o}$-Idealklassen von K übereinstimmende Klasseneinteilung der Einbettungen K kann also, wenn $\boldsymbol{Q}\{M\}$ nicht maximale kommutative Unteralgebra in $\mathfrak{M}\{4, \boldsymbol{Q}\}$ ist, noch weiter zerfallen.

Betrachten wir nun für die obigen M die möglichen $S \cdot M \cdot S^{-1}$ mit $S \in \Gamma$. Als zusätzliches Hilfsmittel benötigen wir einen Satz über die Gestalt der Repräsentanten der Koklassen von Γ_r bez. Γ_1, den man nach einer Methode von E. Witt [14] (vgl. auch M. Eichler [6], S. 47 f, und [7], S. 52) leicht gewinnen kann:

Satz 19. *$\forall r > 0$ $(r \in \boldsymbol{Z})$ ist Γ_r eine endliche Vereinigung von disjunkten Koklassen:*

$$\Gamma_r = \bigcup_{j=1}^{m(r)} \Gamma_1 M_j, \quad M_j \in \Gamma_r.$$

Die M_j kann man auf folgende Normalform transformieren:

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad C = O,\ B \text{ reduziert } \operatorname{mod} D,\ A^t D = rE,$$

$$A = \begin{pmatrix} r_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & r_n \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \frac{r}{r_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & \frac{r}{r_n} \end{pmatrix}.$$

a_{ik} nach r_k, d_{ik} nach $\frac{r}{r_k}$ reduziert, $r_1|r, \ldots, r_n|r$.

Für $n = 2$ also: $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$

$$M = \begin{pmatrix} r_1 & a & \multicolumn{2}{c}{B} \\ 0 & r_2 & & \\ & & \frac{r}{r_1} & 0 \\ \multicolumn{2}{c}{O} & -d & \frac{r}{r_2} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

$a \operatorname{mod} r_2$, $d \operatorname{mod} \frac{r}{r_1}$, $B \operatorname{mod} D$ und (aus den Symplektizitätsbedingungen): $a\frac{r}{r_1} = dr_2$.

Wir dürfen also $S = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ o.B.d.A. von der Gestalt (1) annehmen. Zusätzlich identifizieren wir zwei $S, S' \in \Gamma$ von der Gestalt (1), wenn $S' = U \cdot S \cdot N$ mit $U \in \Gamma_1$ und $N \in \Gamma$ aus der Menge der mit M vertauschbaren Matrizen ist. Denn, genau für diese S und S' gilt, wie man leicht nachrechnet: $\Gamma_1(\mathfrak{F}_{SMS^{-1}}) = \mathfrak{F}_{S'MS'^{-1}}$. Schließlich soll $\mathfrak{o}' = S \cdot \mathfrak{o} \cdot S^{-1}$ wieder in $\mathfrak{J}$ sein, d.h. $S \cdot M \cdot S^{-1}$ in $\mathfrak{J}$. Nach elementaren Rechnungen folgt aus diesen Bedingungen: Die zu $M_{\varrho,1\text{-dim.}}$, $M_{i,0\text{-dim.}}$ und $M_{\varrho,0\text{-dim.}}$ gehörigen Fixpunktmannigfaltigkeiten sind die einzigen Fixpunktmannigfaltigkeiten in H^2/Γ_1 ihrer Art. Hingegen existiert zu $M_{i,1\text{-dim.}}$ ein (bis auf Skalarfaktor eindeutig gegebenes) $S \in \Gamma$, das sämtliche Bedingungen erfüllt und $\mathfrak{F}_M = \{zE \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$ in eine Γ_1-inäquivalente Mannigfaltigkeit überführt:

$$S = \begin{pmatrix} E & G \\ O & 2E \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$S \cdot M_{i,1\text{-dim.}} \cdot S^{-1} = S \begin{pmatrix} J & O \\ O & J \end{pmatrix} S^{-1} = \begin{pmatrix} J & GJ - JG \\ O & J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J & \begin{matrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \\ O & J \end{pmatrix} = M'_{i,1\text{-dim.}}$$

mit der Fixpunktmannigfaltigkeit $\mathfrak{F}_{M'} = \{zE + \frac{1}{2}G \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$.

7.3. In 3.4.3 hatten wir schon eine spezielle zweidimensionale Fixpunktmannigfaltigkeit kennengelernt:

$$\mathfrak{F}_M = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix} \middle| \operatorname{Im}(z_1) > 0, \operatorname{Im}(z_2) > 0 \right\} \tag{2}$$

$$\text{zu} \quad M = \begin{pmatrix} H & O \\ O & H \end{pmatrix} \in \Gamma_1 \text{ gehörig.}$$

($H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$). Es ist $M = M^*$ und die charakteristische Gleichung von M lautet: $(x^2-1)^2 = 0$. Alle zweidimensionalen Fixpunktmannigfaltigkeiten sind nach § 2 zu (2) Σ_1-äquivalent. Es gilt also für alle zugehörigen M: $M^* = M$. Ein $M \in \Gamma_1$ mit zweidimensionaler Fixpunktmannigfaltigkeit ist daher allgemein von der Gestalt:

$$M = \begin{pmatrix} A & bJ \\ cJ & A^t \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & -a_1 \end{pmatrix}, \quad a_1, a_2, b, c \in \mathbf{Z}.$$

Das charakteristische Polynom eines solchen M lautet: $(x^2 - a_1^2 + a_2^2)^2 - 2a_1^2 bc$ und muß nach obigem gleich $(x^2-1)^2$ sein. Daraus folgt: $b \cdot c = 0$ und $a_2 = 0$, $a_1 = \pm 1$. Wir nehmen o.B.d.A. $c = 0$ an. (Ist $c \neq 0$, $b = 0$, so transformieren wir M in das Γ_1-äquivalente $J^{-1} \cdot M \cdot J$.) Soll dieses $M = \pm \begin{pmatrix} H & bJ \\ O & H \end{pmatrix}$ eine zweidimensionale Fixpunktmannigfaltigkeit besitzen, so muß

$$\begin{pmatrix} z_1 & +z_1 + b \\ -z_2 - b & -z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 & -z_2 \\ z_2 & -z_3 \end{pmatrix}$$

sein, d.h. z_1, z_3 beliebig, $z_2 = b/2$. Ist b gerade, so sind alle diese Fixpunktmannigfaltigkeiten zu (2) Γ_1-äquivalent, ist aber b ungerade, so sind sie äquivalent zu

$$\mathfrak{F}_M = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & z_2 \end{pmatrix} \middle| \operatorname{Im}(z_1) > 0, \operatorname{Im}(z_2) > 0 \right\} \text{ mit zugehörigem} \tag{3}$$

$$M = \begin{pmatrix} H & J \\ O & H \end{pmatrix} \in \Gamma_1.$$

(2) und (3) sind also die beiden einzigen stark-entarteten zweidimensionalen Fixpunktmannigfaltigkeiten zu Matrizen aus Γ_1 in H^2/Γ_1.

Stark-entartete, eindimensionale Fixpunktmannigfaltigkeiten gehören nach § 3 zu Einbettungen von direkten Summen $K \oplus \mathbf{Q}$ in $\mathfrak{M}\{4, \mathbf{Q}\}$, wobei $K = \mathbf{Q}(\sqrt{d})$, $d < 0$. Das erzeugende Element der Einbettung soll eine Matrix aus Γ_1 sein, d.h. für d kommen wie in 7.2 nur -1 und -3 in Frage:

$$K = \mathbf{Q}(i) \quad \text{und} \quad K = \mathbf{Q}(\varrho), \quad \varrho = e^{2\pi i/6}.$$

Spezielle Einbettungen erhalten wir — unter Benützung der in 7.2 beschriebenen Einbettung von K in $\mathfrak{M}\{2,Q\}$ — durch

$$Q(i)\oplus Q\to Q\{M_1\}\quad \text{mit}\quad M_1=\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$Q(\varrho)\oplus Q\to Q\{M_2\}\quad \text{mit}\quad M_2=\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Wie man sieht, ist $M=\begin{pmatrix}H&O\\O&H\end{pmatrix}$ in beiden Matrizenringen enthalten: $-M_1^2=M$ resp. $-M_2^3=M$. Zu M_1 bzw. M_2 Σ_1-äquivalente M_1' bzw. M_2' aus Γ_1 erfüllen daher, da es ja nur zwei Γ_1-inäquivalente M mit stark-entarteten zweidimensionalen Fixpunktmannigfaltigkeiten gibt:

$$-M_1'^2\quad \Gamma_1\text{-äquivalent zu}\quad M=\begin{pmatrix}H&O\\O&H\end{pmatrix}\quad \text{oder}\quad M'=\begin{pmatrix}H&J\\O&H\end{pmatrix},$$

$$-M_2'^3\quad \Gamma_1\text{-äquivalent zu}\quad M=\begin{pmatrix}H&O\\O&H\end{pmatrix}\quad \text{oder}\quad M'=\begin{pmatrix}H&J\\O&H\end{pmatrix}.$$

Also o.B.d.A. $-M_1'^2=M$ oder M', $-M_2'^3=M$ oder M'.

Man erkennt nach elementarer Rechnung: Die Gleichung $-M_1'^2=M'$ und $-M_2'^3=M'$ führen auf einen Widerspruch zu M_1' bzw. $M_2'\in\Gamma_1$, aus den Gleichungen $-M_1'^2=M$ bzw. $-M_2'^3=M$ folgt: M_1' ist Γ_1-äquivalent zu M_1, M_2' Γ_1-äquivalent zu M_2.

M_1 mit der Fixpunktmannigfaltigkeit

$$\mathfrak{F}_M=\left\{\begin{pmatrix}i&0\\0&z\end{pmatrix}\Big|\ \mathrm{Im}(z)>0\right\},$$

M_2 mit der Fixpunktmannigfaltigkeit

$$\mathfrak{F}_M=\left\{\begin{pmatrix}\varrho^2&0\\0&z\end{pmatrix}\Big|\ \mathrm{Im}(z)>0\right\}$$

sind also die einzigen Matrizen mit stark-entarteten eindimensionalen Fixpunktmannigfaltigkeiten in H^2/Γ_1.

7.4. Als letztes behandeln wir den „stark-entarteten" nulldimensionalen Fall.

$Q\{M\}$ ist in diesem Fall ein maximaler kommutativer, halbeinfacher Ring in $\mathfrak{M}\{4,Q\}$. Die charakteristische Gleichung von M ist reduzibel und zerfällt in Q in zwei sogar in R irreduzible Faktoren

$$x^2-k_1x+r,\qquad x^2-k_2x+r\qquad \text{mit}\quad k_1\neq k_2,$$

$Q\{M\}$ wird direkte Summe zweier imaginär-quadratischer Körper (vgl. § 3, 3.4.0).

Ist $M^*\cdot M=E$, so wird jeder dieser Körper durch eine Einheit erzeugt, es tritt also wiederum nur $Q(i)$ und $Q(\varrho)$ auf:

$$Q\{M\}=R_1\oplus R_2\quad \text{mit}\quad R_1\cong Q(i)\ \text{und}\ R_2\cong Q(\varrho)\qquad (\varrho=e^{2\pi i/6}).$$

Eine Einbettung von $Q(i)\oplus Q(\varrho)$ in $\mathfrak{M}\{4,Q\}$ erhalten wir durch „Verschachteln" der Einbettungen von $Q(i)$ und $Q(\varrho)$ in $\mathfrak{M}\{2,Q\}$. Mit $G_0(i)=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ und $G_0(\varrho)=\begin{pmatrix}0&-1\\1&1\end{pmatrix}$ (vgl. 7.2):

$$M=\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&1\\1&0&1&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}\tag{4}$$

(1. und 3. Zeile + Spalte: $G_0(\varrho)$).

Genau die Hauptordnung $\mathfrak{O}=\mathfrak{o}_{Q(i)}\oplus\mathfrak{o}_{Q(\varrho)}$ wird auf diese Weise in $\mathfrak{J}$ eingebettet.

Jede Transformation wird nach dem Satz von Chevalley, Hasse und Noether erzeugt durch ein $\mathfrak{O}$-Ideal $\mathfrak{A}=\mathfrak{a}_{Q(i)}\oplus\mathfrak{a}_{Q(\varrho)}$ (vgl. in diesem Fall insbesondere C. Chevalley [2], S. 84-88).

$Q(i)$ und $Q(\varrho)$ haben die Klassenzahl 1. Jede Transformation $\mathfrak{O}\to\mathfrak{O}'\subset\mathfrak{J}$ wird uns daher durch eine Matrix $U\cdot S$ mit U unimodular und S aus $Q\{M\}$ geliefert. S transformiert $Q\{M\}$ elementweise in sich, wir können uns also beschränken auf das Betrachten der Transformation mit unimodularem U.

$U\cdot Q\{M\}\cdot U^{-1}$ soll wieder eine von einer symplektischen Einheit erzeugte Einbettung der hier behandelten Art sein. Also insbesondere $(U\cdot Q\{M\}\cdot U^{-1})^*=U\cdot Q\{M\}\cdot U^{-1}$, d.h. $U^*\cdot U$ vertauschbar mit $Q\{M\}$. Da aber $Q\{M\}$ maximal-kommutativer Ring in $\mathfrak{M}\{4,Q\}$ ist, folgt: $U^*\cdot U\in Q\{M\}$. Ausserdem ist natürlich $U^*\cdot U^*$-invariant und unimodular.

Dies ist nur möglich (vgl. (4)), wenn

$$U^*\cdot U=\pm\begin{pmatrix}H&O\\O&H\end{pmatrix}\quad \text{oder}\quad \pm E\quad \text{ist.}\qquad \left(H=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}.\right)$$

Das Vorzeichen stört nicht:

$$\begin{pmatrix}-E&O\\O&E\end{pmatrix}\qquad \left(\begin{pmatrix}-E&O\\O&E\end{pmatrix}^*\begin{pmatrix}-E&O\\O&E\end{pmatrix}=-E\right)$$

induziert in $Q\{M\}$ einen nicht-identischen Automorphismus. $\begin{pmatrix}H&O\\O&H\end{pmatrix}$ kann geschrieben werden als $\begin{pmatrix}H&O\\O&E\end{pmatrix}^*\begin{pmatrix}H&O\\O&E\end{pmatrix}$. Auch $\begin{pmatrix}H&O\\O&E\end{pmatrix}$ erzeugt in $\boldsymbol{Q}\{M\}$ einen nicht-identischen Automorphismus. Die $\boldsymbol{Q}\{M\}$ unserer Art gehen also alle durch symplektische Einheiten auseinander hervor! Daher ist der zu (4) gehörige Fixpunkt $\begin{pmatrix}\varrho^2 & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}$ der einzige Fixpunkt in H^2/Γ_1 der zum stark-entarteten nulldimensionalen Fall gehört.

7.5. Auf einem andern Weg bestimmt E. Gottschling [8] die Menge der bez. Γ_1-inäquivalenten Fixpunktmannigfaltigkeiten zu $M \in \Gamma_1$ im Fall $n = 2$. Hier sind aber noch sehr viele Γ_1-äquivalente $\mathfrak{F}_M$ mit aufgeführt. U. Christian [3] hat dann untersucht, welche von diesen $\mathfrak{F}_M$ genau Γ_1-inäquivalent sind. Wir wollen diese Liste zum Vergleich hier aufführen, wobei wir uns in den Bezeichnungen an die spätere Arbeit [9] von E. Gottschling halten:

$$Z_{01} = \begin{pmatrix}\omega & \omega+\omega^{-2}\\ \omega+\omega^{-2} & -\omega^{-1}\end{pmatrix}, \qquad \omega = e^{2\pi i/5},$$

$$Z_{02} = \begin{pmatrix}\eta & \frac{1}{2}(\eta-1)\\ \frac{1}{2}(\eta-1) & \eta\end{pmatrix}, \qquad \eta = \tfrac{1}{3}+2\sqrt{2}i/3,$$

$$Z_{03} = iE,$$

$$Z_{04} = \varrho^2\cdot E, \qquad \varrho = e^{2\pi i/6},$$

$$Z_{05} = \frac{i\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix},$$

$$Z_{11} = \begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & z\end{pmatrix},$$

$$Z_{12} = \begin{pmatrix}\varrho^2 & 0\\ 0 & z\end{pmatrix},$$

$$Z_{13} = zE,$$

$$Z_{14} = zE+\tfrac{1}{2}G, \qquad G = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

$$Z_{15} = z\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix},$$

$$Z_{21} = \begin{pmatrix}z_1 & 0\\ 0 & z_2\end{pmatrix},$$

$$Z_{22} = \begin{pmatrix}z_1 & 0\\ 0 & z_2\end{pmatrix}+\tfrac{1}{2}G.$$

Abgesehen vom Auftreten von Z_{02} und Z_{05} stimmen die Ergebnisse genau mit unseren Untersuchungen überein. Z_{02} und Z_{05} sind in unserem Sinne

keine echten isolierten Fixpunkte von $M \in \Gamma_1$, sondern nur Schnittpunkte von Fixpunktmannigfaltigkeiten. Z_{02} ist Schnittpunkt von

$$z\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix} \qquad \left(\text{zu } \begin{pmatrix}1 & -1 & & \\ 1 & 0 & & 0\\ & & 0 & -1\\ 0 & & 1 & 1\end{pmatrix} \text{ aus 7.2 gehörig}\right)$$

und

$$\begin{pmatrix}z & z'\\ z' & z\end{pmatrix}, \qquad z'^2-z^2+1 = 0 \qquad \left(\text{zu } M = \begin{pmatrix}O & -H\\ H & O\end{pmatrix} \text{ gehörig}\right);$$

Z_{05} ist Schnittpunkt von

$$\begin{pmatrix}z & z'\\ z' & z\end{pmatrix}, \qquad z^2-z-z'^2+1 = 0 \qquad \left(\text{zu } \begin{pmatrix}\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{matrix} & H\\ H & \begin{matrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\end{pmatrix} \text{ gehörig}\right)$$

mit

$$\begin{pmatrix}z & z'\\ z' & z\end{pmatrix}, \qquad z^2 = z'(z'+2) \qquad \left(\text{zu } \begin{pmatrix}J & O\\ H & J\end{pmatrix} \text{ gehörig}\right)(^5).$$

Z_{01} ist der einzige nicht-entartete isolierte Fixpunkt in H^2/Γ_1 zu $M \in \Gamma_1$ (vgl. § 4, 4.7, $\boldsymbol{Q}\{M\} \cong \boldsymbol{Q}(e^{2\pi i/5})$). Z_{03} und Z_{04} sind unsere schwach-entarteten Fixpunkte aus 7.2 und Z_{05} gehört zum stark-entarteten Fall von 7.4. Daß bei diesen isolierten Fixpunkten nur Koeffizienten aus $\boldsymbol{Q}(e^{2\pi i/5}), \boldsymbol{Q}(i)$ und $\boldsymbol{Q}(e^{2\pi i/6})$ auftreten können, ist bei unserer Deutung wohl einsichtiger.

Z_{13} und Z_{14} sind die zu $\boldsymbol{Q}(i)$ gehörigen, Z_{15} der zu $\boldsymbol{Q}(e^{2\pi i/6})$ gehörige schwach-entartete(n) eindimensionale(n) Fixpunktmannigfaltigkeit(en) aus 7.2. Es sind dies genau alle eindimensionalen Fixpunktmannigfaltigkeiten zu $M \in \Gamma_1$ in H^2/Γ_1, die „uniformisierbar" sind. Z_{11} und Z_{12} sind die beiden starkentarteten Fixpunktmannigfaltigkeiten aus 7.3. Sie sind „uniformisierbar".

Z_{21} und Z_{22} schließlich sind die beiden zweidimensionalen Fixpunktmannigfaltigkeiten aus 7.3 (Es sind „uniformisierbare" Mannigfaltigkeiten).

Literaturverzeichnis

[1] J. Cassels and A. Fröhlich, *Algebraic Number Theory*, New York 1967.
[2] C. Chevalley, *Sur certains idéaux d'une algèbre simple*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamb. 10 (1934), S. 84–88.
[3] U. Christian, *Über die Uniformisierbarkeit der Fixpunkte der Modulgruppe 2. Grades*, Nachr. Akad. Wiss. Gottingen II (1964), S. 211–231.
[4] M. Deuring, *Algebren*, Ergebn. der Math. 4 (1935), S. 40–48.

(5) Z_{02} und Z_{05} sind übrigens die beiden einzigen isolierten Fixpunkte in H^2/Γ_1, die „uniformisierbar" sind. In H^1/Γ_1 und $H^n/\Gamma_1, n > 2$, existieren solche Fixpunkte ebenfalls nicht.

[5] M. Eichler, *Zur Algebra der orthogonalen Gruppen*, Math. Zeitschr. 53 (1950), S. 11–20.
[6] M. Eichler, *Modulformen und projektive Mannigfaltigkeiten*, Vorlesungsausarbeitung, Basel 1969.
[7] — *Einführung in die Theorie der algebraischen Zahlen und Funktionen*, Basel 1963.
[8] E. Gottschling, *Über die Fixpunkte der Siegel'schen Modulgruppe*, Math. Ann. 143 (1961), S. 111–149.
[9] — *Die Uniformisierbarkeit der Fixpunkte eigentlich diskontinuierlicher Gruppen von biholomorphen Abbildungen*, Math. Ann. 169 (1967), S. 25–54.
[10] W. Gröbner, *Matrizenrechnung*, Mannheim 1966.
[11] H. Hasse, *Über gewisse Ideale in einer einfachen Algebra*, Act. scient. ind. 109 (1934), S. 12–16.
[12] E. Noether, *Zerfallende verschränkte Produkte und ihre Maximalordnungen*, Act. scient. ind. 148 (1934), S. 5–15.
[13] B. L. van der Waerden, *Algebra*, Bd. I und II, Berlin 1959, 1964.
[14] E. Witt, *Eine Identität zwischen Modulformen zweiten Grades*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamb. 14 (1941), S. 323–337.

Eingegangen 31. 10. 1970 (120)