together show that four cubes suffice. But I have not been able to prove a similar result in general; perhaps this is not altogether surprising, since the corresponding result is unproven even in Z.

References

[1] H. Maass, *Darstellung total positiver Zahlen des Körpers $R(5^{1/2})$ als Summe von drei Quadraten*, Hamburger Abhandlungen, 14 (1941), pp. 185–191.

[2] C. L. Siegel, *Generalisation of Waring's problem to algebraic number fields*, Amer. Journ. Math. 66 (1944), pp. 122–136.

[3] — *Sums of m-th powers of algebraic integers*, Ann. of Math. (2) 46 (1945), pp. 313–339.

ROYAL HOLLOWAY COLLEGE
Englefield Green, Surrey

Received on 22. 1. 1970 (26)

ACTA ARITHMETICA
XX (1972)

Об оценке количества представлений специальным классом бинарных кубических форм положительного дискриминанта

Э. Т. Аванесов (Кисловодск)

Пусть $F(x,y) = x^3+\sum_{i=1}^{3} a_i x^{3-i} y^i$ — неприводимая бинарная кубическая форма с целыми коэффициентами и дискриминантом D. Если $D<0$, то задача определения всех целых решений (x,y) неопределенного уравнения

$$F(x,y) = x^3+\sum_{i=1}^{3} a_i x^{3-i} y^i = 1 \tag{1}$$

разрешается с помощью результатов Делоне [9] и Нагелла [13]. При $D>0$ их метод оказывается, вообще говоря, неприменимым.

На основании известных результатов Бэйкера (см. например, [4]) для возможных целых решений (x,y) уравнения (1) справедлива следующая оценка:

$$\max(|x|,|y|) < \exp(3^{1536^2}\cdot H^{41472}),$$

где

$$H = \max_i |a_i|.$$

Очевидно, применение последней оценки на конкретных примерах должно приводить к чрезвычайно большому объему вычислений, требующему использования мощной электронно-вычислительной техники (см. [5]).

В связи с этим возникает необходимость развития методов фактического определения решений или понижения оценки Бэйкера, например, для уравнения (1) в случае положительного дискриминанта.

Мы исследуем специальный класс бинарных кубических форм положительного дискриминанта

$$x^3 - mx^2y-(m+3)xy^2-y^3 = 1, \tag{2}$$

m — произвольное целое число.

Это классическое уравнение (частным случаям его, получающимся при $m=0$, -1 и 2, посвящены соответственно работы [12], [6] и [1]) впервые было рассмотрено Лежандром [11] и рекомендовано нам для исследования А. Шинцелем и Д. Льюисом.

С точки зрения алгебраической теории единиц, уравнение (2) означает, что $x+y\eta$ есть единица, т.е.

$$x+y\eta = \pm\varepsilon_1^u\varepsilon_2^v, \tag{3}$$

где u, v — неизвестные целые показатели, а ε_1 и ε_2 — основные единицы кольца $O(\eta)$ с базисом $[1, \eta, \eta^2]$, порожденного произвольным корнем η уравнения

$$\eta^3+m\eta^2-(m+3)\eta+1 = 0, \tag{4}$$

имеющего циклическую группу Галуа, ибо дискриминант уравнения (4) равен $D = (m^2+3m+9)^2 > 0$.

Итак, задача сводится к отысканию двучленных единиц в кольце $O(\eta)$. Основная трудность, встречающаяся при таком подходе, заключается в том, что для определения двух неизвестных показателей u и v имеется только одно уравнение.

В работе [2] дан метод, являющийся подробным развитием идеи Сколема из работы [14] и различающийся по технике от метода Люнггрена [12]. Этот метод позволяет свести задачу решения уравнения (1) при $D > 0$ к исследованию некоторой совокупности систем уравнений, в которых число уравнений, по крайней мере, совпадает с числом неопределенных показателей степеней. Указанное сведение осуществлено с помощью перехода от кольца третьей степени $O(\eta)$ к четырем кольцам шестой степени

$$O\left(\sqrt{\varepsilon_1^{-k_1}\varepsilon_2^{-k_2}F'(\eta, -1)}\right), \quad \text{где} \quad k_i = 0 \quad \text{или} \quad 1 \quad (i = 1, 2).$$

Соответствующие уравнения, порождающие эти кольца, имеют хотя бы одну пару комплексных корней, что и обуславливает принципиальную возможность использования локального метода Сколема ([15], [8]) вложения поля алгебраических чисел во все его пополнения.

Предлагаемая здесь общая конструкция опирается на идеи, описанные в работе [12] для частного случая $m = 0$, и отлична от приведенной в [2]. Она использует циклическую группу Галуа уравнения (4) и сводит вопрос о нахождении всех целых решений уравнения (2) к специальному исследованию во вспомогательном кольце шестой степени $O(\sqrt{\eta})$.

Существенным обстоятельством на этом пути является устанавливаемое соответствие (не взаимное!) между двучленными единицами кольца $O(\eta)$ и единицами особого вида в расширенном кольце $O(\sqrt{\eta})$.

Наличие пары комплексных корней для уравнения, порождающего кольцо $O(\sqrt{\eta})$, позволяет считать задачу разыскания этих последних единиц определенной, а получаемые при исследовании системы

показательных уравнений имеют конечное число решений не только в целых рациональных, но и в целых 4-адических числах.

Целью этой статьи является установление оценки количества представлений вида (2) для произвольного m в терминах основных единиц кольца $O(\sqrt{\eta})$ и выделение классов уравнений (2), имеющих более точную оценку количества целых решений.

§ 1. Вспомогательные предложения. С помощью преобразования Чирнгаузена устанавливается справедливость следующей леммы.

Лемма 1. *Пусть η, η' и η'' — вещественные корни уравнения* (4). *Если в качестве η принять наибольший положительный корень* (4) *и $\eta' > 0$, то $1 < \eta < 2$, $0 < \eta' < 1$, $\eta'' < 0$, и далее*

$$\eta' = \eta^2+m\eta-m-2, \quad \eta'' = -\eta^2-(m+1)\eta+2.$$

Лемма 2. *Число целых решений (x, y) уравнения* (2) *кратно* 3.

В самом деле, пусть $x = x_0$, $y = y_0$ — решение (2). Непосредственной подстановкой в (2) можно убедиться в том, что $x = -x_0-y_0$, $y = x_0$ тоже будет решением (2). Аналогично прямой проверкой устанавливается и третье решение $x = y_0, y = -x_0-y_0$.

Таким образом, каждое решение уравнения (2) порождает два новых решения, а потому общее число решений кратно трем.

Лемма 3. *Единицы η и η' не являются степенями какой-либо единицы из кольца $O(\eta)$.*

Доказательство. Пусть, например,

$$\eta = \varepsilon^k = (a+b\eta+c\eta^2)^k, \tag{5}$$

где, очевидно, $k > 1$ и нечетно; a, b и c — целые рациональные числа. Ввиду эквивалентности форм (2), получающихся при $m = m_0$ и $m = -m_0-3$, достаточно рассмотреть случай $m \geqslant -1$. Впрочем, учитывая то обстоятельство, что устанавливаемые здесь и далее факты можно непосредственно проверить для всех m $(-1 \leqslant m \leqslant 3)$, будем считать ради удобства доказательства, что $m > 3$. Из представлений

$$\begin{cases} \eta^{1/k} = a+b\eta+c\eta^2, \\ \eta'^{1/k} = a+b\eta'+c\eta'^2, \\ \eta''^{1/k} = a+b\eta''+c\eta''^2, \end{cases} \tag{6}$$

находим:

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{m^2+3m+9}[(\eta'-\eta'')(\eta+m)\eta^{1/k}+ \\ &\qquad +(\eta''-\eta)(\eta'+m)\eta'^{1/k}+(\eta-\eta')(\eta''+m)\eta''^{1/k}], \\ c &= \frac{1}{m^2+3m+9}[(\eta'-\eta'')\eta^{1/k}+(\eta''-\eta)\eta'^{1/k}+(\eta-\eta')\eta''^{1/k}]. \end{aligned} \tag{7}$$

Исходя из элементарно определяемых оценок $m > 3$, $|\eta''| < m+3$, $\eta-\eta' < 2$, $\eta-\eta'' < m+5$, $\eta'-\eta'' < m+4$, получим: $|c| < 1$, $|b| < 2$, т.е. $c = 0$, $b = 0$ или $|b| = 1$. Итак, $\eta = \pm(\eta+a)^k$, ибо случай $b = 0$ вообще невозможен. Но норма $N(\eta) = -1$; значит, и $N(\eta+a) = \pm 1$, т.е. из формулы нормы в кольце $O(\eta)$ имеем:

$$N(\eta+a) = a^3 - ma^2 - (m+3)a - 1 = \pm 1. \tag{8}$$

В первом случае из уравнения $a^3 - ma^2 - (m+3)a - 2 = 0$ найдем: $a_1 = -1$; $2a_{2,3} = m+1 \pm \sqrt{(m+1)^2+8}$, и очевидно, подкоренное выражение будет полным квадратом только при $m_1 = 0$ или $m_2 = -2$. Беря в правой части (8) нижний знак, получим: $a_4 = 0$, $2a_{5,6} = m \pm \pm\sqrt{(m+2)^2+8}$, откуда $m_3 = -1$ и $m_4 = -3$. Таким образом, окончательно, для (5): $c_1 = 0$, $b_1 = 1$, $a_1 = 0$, и это невозможно при $k > 1$, так как η не является особенной единицей; $c_2 = 0$, $b_2 = 1$, $a_2 = -1$, но тогда

$$\eta = (\eta-1)^k = (\eta\eta')^k = \left(-\frac{1}{\eta''}\right)^k = (-\eta'')^{-k},$$

что не может быть хотя бы в силу соображений, описанных в [10], стр. 73-74.

Следовательно, $\eta \neq \varepsilon^k$; аналогично $\eta' \neq \varepsilon^k$, и лемма 3 доказана.

Из леммы 3 вытекает, что каждая из единиц η и η' в отдельности является основной единицей кольца $O(\eta)$.

В работе [12] Люнггрен утверждает, что η и η' составляют систему основных единиц кольца $O(\eta)$ при любом целом значении m. Во многих случаях это утверждение верно, хотя и не всегда оно справедливо. В самом деле, как указано В. Д. Подсыпаниным, при $m = 12$ имеем: $\eta = \eta_1^3\eta_1'^4$, $\eta' = \eta_1^{-4}\eta_1'$, где η_1 и η_1' образуют систему основных единиц кольца $O(\eta_1)$, $\eta_1^3+2\eta_1^2-\eta_1-1 = 0$. Очевидно, ввиду условия

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} \neq \pm 1$$

система единиц $\{\eta, \eta'\}$ — не основная.

В дальнейшем для определенности положим, что положительные корни η и η' образуют систему основных единиц в кольце $O(\eta)$, и, таким образом, уравнение (2) перепишется в виде

$$x + y\eta = \pm\eta^u\eta'^v. \tag{9}$$

Лемма 4. *В каждой тройке решений (u, v) показательного уравнения (9) всегда можно выбрать такое решение, что $u \equiv v \equiv 0 \pmod 2$.*

Для доказательства леммы 4 представим (9) в виде

$$(\eta'-\eta'')\eta^u\eta'^v + (\eta''-\eta)\eta'^u\eta''^v + (\eta-\eta')\eta''^u\eta^v = 0. \tag{10}$$

Но

$$\frac{\eta'-\eta''}{\eta-\eta'} = -\eta'', \quad \frac{\eta''-\eta}{\eta-\eta'} = \eta\eta'',$$

а потому, разделив (10) на $\eta-\eta' \neq 0$, получим:

$$-\eta^u\eta'^v\eta'' + \eta\eta'^u\eta''^{v+1} + \eta''^u\eta^v = 0,$$

и далее

$$\eta^{2u-v-1}\eta'^{u+v-1} + (-1)^{v+1}\eta^{u-2v}\eta'^{2u-v-1} = (-1)^{u+1}. \tag{11}$$

Непосредственно вытекает, что уравнение (11) невозможно для u — четного и v — нечетного; действительно, при этом уравнение (11) запишется в следующем виде:

$$\left(\eta^{u-\frac{v+1}{2}}\eta'^{\frac{u+v-1}{2}}\right)^2 + \left(\eta^{\frac{u}{2}-v}\eta'^{u-\frac{v+1}{2}}\right)^2 = -1,$$

что неверно.

Пусть теперь (u, v) решение (11). Составим уравнение, сопряженное с (11), и заменим в нем η'' величиной $-(\eta\eta')^{-1}$. Тогда уравнение

$$\eta^{-u-v+1}\eta'^{u-2v} + (-1)^{u-v+1}\eta^{-2u+v+1}\eta'^{-u-v+1} = (-1)^{v+2}$$

определит решение (u_1, v_1) уравнения (11), где $u_1 = -v+1$, $v_1 = u-v$.

Аналогично второе уравнение, сопряженное с (11), порождает третье решение (u_2, v_2) по формулам $u_2 = -u+v+1$, $v_2 = -u+1$.

Итак, каждое решение (u, v) уравнения (11) в соответствии с леммой 2 определяет еще два решения (u_1, v_1) и (u_2, v_2), а в этой тройке всегда найдется хотя бы одно решение, состоящее из четных чисел, что и доказывает лемму 4.

Рассмотрим расширенное кольцо шестой степени $O(\sqrt{\eta})$, где $O(\sqrt{\eta})$ есть совокупность чисел вида $M_1 + M_2\sqrt{\eta}$, M_1 и M_2 — целые числа кольца $O(\eta)$.

По теореме Дирихле, в кольце $O(\sqrt{\eta})$ имеется четыре основных единицы. Для двух из них выполняется соотношение:

$$\lambda\lambda' = (A_0 + B_0\sqrt{\eta})(A_0 - B_0\sqrt{\eta}) = 1.$$

Назовем такое соотношение *относительной нормой*, а сами единицы *относительно-основными*. В качестве одной из таких единиц всегда можно принять

$$\lambda_1 = -2\eta^2 - 2(m+1)\eta + 3 + 2[-\eta^2 - (m+1)\eta + 2]\sqrt{\eta} = \eta''(1+\sqrt{\eta})^2.$$

Заметим, что все единицы λ кольца $O(\sqrt{\eta})$ с относительной нормой $+1$ представляются в виде степеней со всевозможными целыми рациональными показателями, двух относительно-основных единиц λ_1 и λ_2.

Лемма 5. *Каждой тройке решений уравнения* (2) *соответствует в кольце $O(\sqrt{\eta})$ единица вида $\eta''(A+B\sqrt{\eta})^2$, у которой относительная норма равна $+1$ и в кольце $O(\eta)$ выполняется равенство $|N(A)| = |N(B)| = 1$.*

В самом деле, в силу леммы 4 уравнение (11) примет следующий вид:

$$\eta^{2u-v-1}\eta'^{u+v-1} - \eta^{u-2v}\eta'^{2u-v-1} = -1,$$

и после умножения обеих частей на $\eta\eta'\eta'' = -1$

$$\eta^{2u-v}\eta'^{u+v}\eta'' - \eta^{u-2v}\eta'^{2u-v}\eta\eta'' = 1, \quad \text{или} \quad A^2\eta'' - B^2\eta\eta'' = 1, \tag{12}$$

где $A = \eta^{u-v/2}\eta'^{(u+v)/2}$, $B = \eta^{u/2-v}\eta'^{u-v/2}$.

Очевидно, выражение (12) означает, что для каждой пары четных значений (u, v), однозначно порождаемой с помощью произвольной тройки решений (2), единица $\lambda = \eta''(A+B\sqrt{\eta})^2$ определяется единственным образом, имеет относительную норму $+1$, далее $|N(A)| = |N(B)| = 1$, и тем самым лемма 5 доказана.

Определение. Единицу вида $\eta''(A+B\sqrt{\eta})^2$ кольца $O(\sqrt{\eta})$, для которой относительная норма равна $+1$ и $|N(A)| = |N(B)| = 1$, назовем *требуемой* единицей.

Итак, каждой тройке решений уравнения (2) отвечает требуемая единица кольца $O(\sqrt{\eta})$. Обратное утверждение не всегда имеет место, но это обстоятельство, с учетом последующей леммы 6, не мешает нам оценку числа целых решений (x, y) уравнения (2) заменить оценкой числа требуемых единиц кольца $O(\sqrt{\eta})$.

Легко устанавливаются

Лемма 6. *Пусть требуемая единица имеет вид: $\eta''(A+B\sqrt{\eta})^2$, где $|N(A)| = |N(B)| = 1$ и $A = \eta^{k_1}\eta'^{k_2}$, $B = \eta^{k_3}\eta'^{k_4}$. Если одновременно выполняются следующие условия: 1) $k_1 = k_4$, 2) $k_1 = k_2+k_3$, 3) $k_2 \equiv k_3 \pmod 3$, то требуемая единица порождает тройку решений уравнения* (2).

Лемма 7. *Если определитель $|a_{ij}|$ $(i, j = 1, 2, \ldots, k)$ есть нечетное число, то система уравнений относительно неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_k$*

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij}x_j + 4\sum_{r_1+\ldots+r_k=2}\prod_{j=1}^{k}\binom{x_j}{r_j} m_{il_1}^{(1)} + 4^2\sum_{r_1+\ldots+r_k=3}\prod_{j=1}^{k}\binom{x_j}{r_j} m_{il_2}^{(2)} + \ldots + 4^s\sum_{r_1+\ldots+r_k=s+1}\prod_{j=1}^{k}\binom{x_j}{r_j} m_{il_s}^{(s)} + \ldots = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, k; \tag{13}$$

где $r_j \geqslant 0$, a_{ij}, b_i и $m_{il_s}^{(s)}$ — произвольные целые числа, имеет единственное решение в целых 4-адических числах, а значит, не более одного целого рационального решения.

Справедливость леммы 7, являющейся обобщением соответствующей теоремы (см. [6], теорема 2, стр. 148-149), показана в работах [2] и [3]. Заметим, что лемма 7 в требуемом случае $k = 2$ установлена уже в работе Сколема [15].

§ 2. Оценки количества целых решений уравнения $x^3 - mx^2y - (m+3)xy^2 - y^3 = 1$. Прежде всего заметим, что наше исследование можно разбить на две части в зависимости от вида второй относительно-основной единицы λ_2 кольца $O(\sqrt{\eta})$.

В самом деле, очевидно, что либо

$$\lambda_2 = (A_2+B_2\sqrt{\eta})^2, \quad \text{где} \quad (A_2+B_2\sqrt{\eta})(A_2-B_2\sqrt{\eta}) = A_2^2 - B_2^2\eta = -1,$$

либо

$$\lambda_2 = A_1+B_1\sqrt{\eta} \neq (A_2+B_2\sqrt{\eta})^2, \quad A_1^2 - B_1^2\eta = 1,$$

все A_i, B_i $(i = 1, 2)$ — целые числа кольца $O(\eta)$.

Исходя из первой возможности для второй относительно-основной единицы λ_2 кольца $O(\sqrt{\eta})$ докажем следующую теорему:

Теорема 1. *Пусть положительные корни η и η' уравнения* (4) *составляют систему основных единиц кольца $O(\eta)$, а $\lambda_1 = \eta''(1+\sqrt{\eta})^2$ и $\lambda_2 = (A_2+B_2\sqrt{\eta})^2$ — относительно-основные единицы кольца $O(\sqrt{\eta})$, причем $\lambda_{20} = \sqrt{\lambda_2} = A_2+B_2\sqrt{\eta}$, $\lambda_{20}\lambda_{20}' = -1$, $A_2 = \alpha_1\eta^2+\alpha_2\eta+\alpha_3$, $B_2 = \beta_1\eta^2+\beta_2\eta+\beta_3$. Если $\alpha_1 \not\equiv (m+1)\beta_1 \pmod 2$, то в кольце $O(\sqrt{\eta})$ существует не более четырех требуемых единиц.*

Доказательство. Прежде всего естественно предположить, что вторая относительно-основная единица имеет вид:

$$\bar{\lambda}_2 = (A_1\sqrt{\eta''}+B_1\sqrt{\eta\eta''})^2 = \eta''(A_1+B_1\sqrt{\eta})^2.$$

Тогда эта возможность очевидным образом сведется к случаю, формулируемому в условии теоремы 1. В самом деле, пусть требуемые единицы определяются из представления:

$$\eta''(A+B\sqrt{\eta})^2 = \lambda_1^{t_1}\bar{\lambda}_2^{t_2}, \tag{14}$$

или

$$(A+B\sqrt{\eta})^2 = \eta''^{t_1+t_2-1}(1+\sqrt{\eta})^{2t_1}(A_1+B_1\sqrt{\eta})^{2t_2}.$$

Отсюда непосредственно находим, что должно быть $t_1+t_2 \equiv 1 \pmod 2$, т.е. t_1 и t_2 — разной четности. С другой стороны, записав (14) в виде

$$\eta''(A+B\sqrt{\eta})^2 = \lambda_1^{t_1-t_2}(\lambda_1\bar{\lambda}_2)^{t_2}, \tag{14*}$$

получим, что, во-первых, $t_1-t_2\equiv 1 \pmod 2$, а во-вторых, единицы λ_1 и $\lambda_1\bar{\lambda}_2=(A_2+B_2\sqrt{\eta})^2$ снова образуют систему относительно-основных единиц, ибо соответствующий определитель равен $\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}=1$.

Итак, все требуемые единицы кольца $O(\sqrt{\eta})$ можно получить из решений показательного уравнения

$$\eta''(A+B\sqrt{\eta})^2=\lambda_1^{2l_1+1}\lambda_2^{l_2},$$

или, что одно и то же,

$$A\sqrt{\eta''}+B\sqrt{\eta\eta''}=\pm(\sqrt{\eta''}+\sqrt{\eta\eta''})^{2l_1+1}(A_2+B_2\sqrt{\eta})^{l_2}=\pm\lambda_{10}^{\tau_1}\lambda_{20}^{\tau_2}, \tag{15}$$

где $\lambda_{10}=\sqrt{\lambda_1}=\pm(\sqrt{\eta''}+\sqrt{\eta\eta''})$, $\tau_1=2l_1+1$ и $\tau_2=l_2$ — неизвестные показатели степеней.

Аналогично (15) можно выписать и сопряженные выражения:

$$A\sqrt{\eta''}-B\sqrt{\eta\eta''}=\pm\lambda_{10}^{\prime\tau_1}\lambda_{20}^{\prime\tau_2},\qquad A'\sqrt{\eta}+B'\sqrt{\eta'\eta}=\pm\lambda_{10}^{\prime\prime\tau_1}\lambda_{20}^{\prime\prime\tau_2},$$
$$A'\sqrt{\eta}-B'\sqrt{\eta'\eta}=\pm\lambda_{10}^{\prime\prime\prime\tau_1}\lambda_{20}^{\prime\prime\prime\tau_2},\qquad A''\sqrt{\eta'}+B''\sqrt{\eta''\eta'}=\pm\lambda_{10}^{\mathrm{IV}\tau_1}\lambda_{20}^{\mathrm{IV}\tau_2},$$
$$A''\sqrt{\eta'}-B''\sqrt{\eta''\eta'}=\pm\lambda_{10}^{\mathrm{V}\tau_1}\lambda_{20}^{\mathrm{V}\tau_2}.$$

Произведение сумм и разностей последних выражений определит систему двух показательных уравнений:

$$\begin{aligned}(\lambda_{10}^{\tau_1}\lambda_{20}^{\tau_2}+\lambda_{10}^{\prime\tau_1}\lambda_{20}^{\prime\tau_2})(\lambda_{10}^{\prime\prime\tau_1}\lambda_{20}^{\prime\prime\tau_2}+\lambda_{10}^{\prime\prime\prime\tau_1}\lambda_{20}^{\prime\prime\prime\tau_2})(\lambda_{10}^{\mathrm{IV}\tau_1}\lambda_{2}^{\mathrm{IV}\tau_2}+\lambda_{10}^{\mathrm{V}\tau_1}\lambda_{20}^{\mathrm{V}\tau_2})&=\pm 8i,\\(\lambda_{10}^{\tau_1}\lambda_{20}^{\tau_2}-\lambda_{10}^{\prime\tau_1}\lambda_{20}^{\prime\tau_2})(\lambda_{10}^{\prime\prime\tau_1}\lambda_{20}^{\prime\prime\tau_2}-\lambda_{10}^{\prime\prime\prime\tau_1}\lambda_{20}^{\prime\prime\prime\tau_2})(\lambda_{10}^{\mathrm{IV}\tau_1}\lambda_{20}^{\mathrm{IV}\tau_2}-\lambda_{10}^{\mathrm{V}\tau_1}\lambda_{20}^{\mathrm{V}\tau_2})&=\pm 8,\end{aligned}\tag{16}$$

где приняты следующие обозначения:

$$\lambda_{10}=\sqrt{\eta''}+\sqrt{\eta\eta''},\quad \lambda_{10}'=\sqrt{\eta''}-\sqrt{\eta\eta''},\quad \lambda_{10}''=\sqrt{\eta}+\sqrt{\eta'\eta},$$
$$\lambda_{10}'''=\sqrt{\eta}-\sqrt{\eta'\eta},\quad \lambda_{10}^{\mathrm{IV}}=\sqrt{\eta'}+\sqrt{\eta''\eta'},\quad \lambda_{10}^{\mathrm{V}}=\sqrt{\eta'}-\sqrt{\eta''\eta'},$$

соответственно выписываются все λ_{20}.

Система уравнений (16) содержит два неизвестных показателя τ_1 и τ_2, причем существенно, что $\tau_1\equiv 1 \pmod 2$. Учитывая, что решение (τ_1,τ_2) системы (16) влечет решение $(-\tau_1,-\tau_2)$, представим эти показатели в виде:

$$\tau_1=4\gamma_1+1,\qquad \tau_2=4\gamma_2+\tau_{20},\qquad \text{где}\qquad \tau_{20}=0,1,2\ \text{или}\ 3.$$

Тем самым мы будем различать следующие четыре случая при решении системы уравнений (16):

I. $\tau_1=4\gamma_1+1$, $\tau_2=4\gamma_2$;
II. $\tau_1=4\gamma_1+1$, $\tau_2=4\gamma_2+1$;
III. $\tau_1=4\gamma_1+1$, $\tau_2=4\gamma_2+2$;
IV. $\tau_1=4\gamma_1+1$, $\tau_2=4\gamma_2+3$.

Далее имеем:

$$\lambda_{10}^4=1+4P,\qquad \lambda_{20}^4=1+4Q,$$

где

$$\begin{aligned}P&=P_1+P_2\sqrt{\eta},\\P_1&=2(m+1)\eta^2+2(m^2+2m+2)\eta-2m,\\P_2&=(2m+1)\eta^2+(2m^2+3m+3)\eta-2(m-1),\\Q&=Q_1+Q_2\sqrt{\eta},\\Q_1&\equiv(m+1)\eta^2+m\eta+m \pmod 2,\\Q_2&\equiv(a_1+m\beta_2+1)\eta^2+(a_1+m+1)\eta+(m+1)(a_1+\beta_1) \pmod 2.\end{aligned}\tag{17}$$

Переходим к исследованию каждого из указанных четырех случаев.

I случай: $\tau_1=4\gamma_1+1$, $\tau_2=4\gamma_2$.

Простые вычисления приводят к следующим равенствам:

$$\lambda_{10}+\lambda_{10}'=2\sqrt{\eta''},\qquad \lambda_{10}-\lambda_{10}'=2\sqrt{\eta\eta''},$$
$$P\lambda_{10}+P'\lambda_{10}'=2p_1\sqrt{\eta''},\qquad P\lambda_{10}-P'\lambda_{10}'=2p_2\sqrt{\eta\eta''},$$
$$Q\lambda_{10}+Q'\lambda_{10}'=2q_1\sqrt{\eta''},\qquad Q\lambda_{10}-Q'\lambda_{10}'=2q_2\sqrt{\eta\eta''},$$

где

$$\begin{aligned}p_1&=4m+9+4\eta-(4m+5)\eta'',\\p_2&=4(m+2)+4\eta-(4m+3)\eta'',\\q_1&\equiv[(m+1)a_1+m(\beta_2+1)]\eta^2+[1+(m+1)\beta_1]\eta+a_1+m\beta_2+\\&\qquad+m+1 \pmod 2,\\q_2&\equiv(a_1+m\beta_2+m)\eta^2+(m+1)\eta+(m+1)(a_1+\beta_1)+m \pmod 2.\end{aligned}\tag{18}$$

Множители левых частей системы уравнений (16) имеют вид:

$$\begin{aligned}\lambda_{10}^{\tau_1}\lambda_{20}^{\tau_2}+\lambda_{10}^{\prime\tau_1}\lambda_{20}^{\prime\tau_2}&=\lambda_{10}(1+4P)^{\gamma_1}(1+4Q)^{\gamma_2}+\lambda_{10}'(1+4P')^{\gamma_1}(1+4Q')^{\gamma_2}=\\&=\lambda_{10}+\lambda_{10}'+4\gamma_1(P\lambda_{10}+P'\lambda_{10}')+4\gamma_2(Q\lambda_{10}+Q'\lambda_{10}')+\\&\qquad+16C_{\gamma_1}^2(P^2\lambda_{10}+P'^2\lambda_{10}')+16C_{\gamma_2}^2(Q^2\lambda_{10}+Q'^2\lambda_{10}')+\\&\qquad+64C_{\gamma_1}^3(P^3\lambda_{10}+P'^3\lambda_{10}')+\ldots=\\&=2\sqrt{\eta''}(1+4\gamma_1p_1+4\gamma_2q_1+16L_1),\\\lambda_{10}^{\tau_1}\lambda_{20}^{\tau_2}-\lambda_{10}^{\prime\tau_1}\lambda_{20}^{\prime\tau_2}&=\lambda_{10}(1+4P)^{\gamma_1}(1+4Q)^{\gamma_2}-\lambda_{10}'(1+4P')^{\gamma_1}(1+4Q')^{\gamma_2}=\\&=\lambda_{10}-\lambda_{10}'+4\gamma_1(P\lambda_{10}-P'\lambda_{10}')+4\gamma_2(Q\lambda_{10}-Q'\lambda_{10}')+\\&\qquad+16C_{\gamma_1}^2(P^2\lambda_{10}-P'^2\lambda_{10}')+\ldots=\\&=2\sqrt{\eta\eta''}(1+4\gamma_1p_2+4\gamma_2q_2+16L_2),\end{aligned}$$

$$\lambda_{10}^{''\tau_1}\lambda_{20}^{''\tau_2}+\lambda_{10}^{'''\tau_1}\lambda_{20}^{'''\tau_2} = 2\sqrt{\eta}\,(1+4\gamma_1 p_1'+4\gamma_2 q_1'+16L_1'),$$
$$\lambda_{10}^{''\tau_1}\lambda_{20}^{''\tau_2}-\lambda_{10}^{'''\tau_1}\lambda_{20}^{'''\tau_2} = 2\sqrt{\eta'\eta}\,(1+4\gamma_1 p_2'+4\gamma_2 q_2'+16L_2'),$$
$$\lambda_{10}^{\mathrm{IV}\tau_1}\lambda_{20}^{\mathrm{IV}\tau_2}+\lambda_{10}^{\mathrm{V}\tau_1}\lambda_{20}^{\mathrm{V}\tau_2} = 2\sqrt{\eta'}\,(1+4\gamma_1 p_1''+4\gamma_2 q_1''+16L_1''),$$
$$\lambda_{10}^{\mathrm{IV}\tau_1}\lambda_{20}^{\mathrm{IV}\tau_2}-\lambda_{10}^{\mathrm{V}\tau_1}\lambda_{20}^{\mathrm{V}\tau_2} = 2\sqrt{\eta''\eta'}\,(1+4\gamma_1 p_2''+4\gamma_2 q_2''+16L_2'').$$

Подставив эти выражения в систему (16), получим:

$$2\sqrt{\eta''}(1+4\gamma_1 p_1+4\gamma_2 q_1+16L_1)2\sqrt{\eta}(1+4\gamma_1 p_1'+4\gamma_2 q_1'+16L_1')\times$$
$$\times 2\sqrt{\eta'}(1+4\gamma_1 p_1''+4\gamma_2 q_1''+16L_1'') = \pm 8i,$$
$$2\sqrt{\eta\eta''}(1+4\gamma_1 p_2+4\gamma_2 q_2+16L_2)2\sqrt{\eta'\eta}(1+4\gamma_1 p_2'+4\gamma_2 q_2'+16L_2')\times$$
$$\times 2\sqrt{\eta''\eta'}(1+4\gamma_1 p_2''+4\gamma_2 q_2''+16L_2'') = \pm 8,$$

или

$$(1+4\gamma_1 p_1+4\gamma_2 q_1+16L_1)(1+4\gamma_1 p_1'+4\gamma_2 q_1'+16L_1')\times$$
$$\times(1+4\gamma_1 p_1''+4\gamma_2 q_1''+16L_1'') = 1,$$
$$(1+4\gamma_1 p_2+4\gamma_2 q_2+16L_2)(1+4\gamma_1 p_2'+4\gamma_2 q_2'+16L_2')\times$$
$$\times(1+4\gamma_1 p_2''+4\gamma_2 q_2''+16L_2'') = 1.$$

Раскрыв скобки и сгруппировав, имеем:

$$(19)\qquad \begin{aligned} &\gamma_1\mathrm{Sp}(p_1)+\gamma_2\mathrm{Sp}(q_1)+4\bar{L}_1 = 0,\\ &\gamma_1\mathrm{Sp}(p_2)+\gamma_2\mathrm{Sp}(q_2)+4\bar{L}_2 = 0,\end{aligned}$$

где символ Sp означает след элемента в кольце $O(\eta)$, т.е.

$$\mathrm{Sp}(a\eta+b\eta''+c) = 3c-m(a+b),$$

или

$$(20)\qquad \mathrm{Sp}(a+b\eta+c\eta^2) = (m^2+2m+6)c-mb+3a.$$

Используя (18), находим:

$$\mathrm{Sp}(p_1)\equiv m+1(\mathrm{mod}\,2),\quad \mathrm{Sp}(q_1)\equiv a_1+m+1(\mathrm{mod}\,2),$$
$$\mathrm{Sp}(p_2)\equiv m(\mathrm{mod}\,2),\quad \mathrm{Sp}(q_2)\equiv (m+1)(a_1+\beta_1)+m(\beta_2+1)(\mathrm{mod}\,2);$$

следовательно,

$$\Delta = \begin{vmatrix}\mathrm{Sp}(p_1) & \mathrm{Sp}(q_1)\\ \mathrm{Sp}(p_2) & \mathrm{Sp}(q_2)\end{vmatrix} \equiv a_1+(m+1)\beta_1(\mathrm{mod}\,2).$$

Учитывая, что числа a_1 и $(m+1)\beta_1$ разной четности, получаем: $\Delta\equiv 1(\mathrm{mod}\,2)$, и на основании леммы 7 система уравнений (19) имеет единственное решение $\gamma_1=\gamma_2=0$, откуда $\tau_1=1$, $\tau_2=0$. Тогда выражение (15) обратится в

$$A\sqrt{\eta''}+B\sqrt{\eta\eta''} = \pm(\sqrt{\eta''}+\sqrt{\eta\eta''}),\quad \text{или}\quad A=\pm 1,\ B=\pm 1.$$

В силу (12) имеем:

$$\eta^{u-v/2}\eta'^{(u+v)/2} = \pm 1,\quad \eta^{u/2-v}\eta'^{u-v/2} = \pm 1,$$

или

$$\eta^{u-v/2}\eta'^{(u+v)/2} = \eta^{u/2-v}\eta'^{u-v/2},$$

откуда

$$(21)\qquad u-\frac{v}{2}=\frac{u}{2}-v,\qquad \frac{u+v}{2}=u-\frac{v}{2}.$$

Система (21) имеет единственное решение $u=v=0$, но каждое решение показательного уравнения (9), как установлено по лемме 4, порождает еще два решения. Таким образом, получим три решения (u,v) уравнения (9):

$$(0;0),\quad (1;0)\quad \text{и}\quad (1;1).$$

Далее, находим, учитывая, что $N(1)=1$, $N(\eta)=-1$ и $N(1-\eta)=-1$: 1) $x+y\eta=1$, 2) $x+y\eta=-\eta$, 3) $x+y\eta=-1+\eta$.

Итак, в первом случае определена одна требуемая единица, порождающая следующую, тривиальную тройку решений уравнения (2):

$$(1;0),\quad (0;-1),\quad (-1;1).$$

Используя лемму 7, устанавливаем, что все вычисления, проводимые во втором, третьем и четвертом случаях, аналогичны с первым случаем. Таким образом, в каждом из этих случаев может существовать не более одной требуемой единицы, и теорема 1 доказана.

Следствие 1. *При выполнении условий теоремы* 1 *диофантово уравнение* (2), *кроме тривиальных решений*: $(x,y)=(1;0),(0;-1),(-1;1)$, *может иметь еще не более трех троек целых решений.*

В том случае, когда вторая относительно-основная единица λ_2 имеет вид:

$$\lambda_2 = A_1+B_1\sqrt{\eta}\neq(A_2+B_2\sqrt{\eta})^2,$$

где все A_i, B_i — целые числа кольца $O(\eta)$, справедлива теорема, доказываемая аналогично теореме 1.

Теорема 2. *Пусть положительные корни* η *и* η' *уравнения* (4) *составляют систему основных единиц кольца* $O(\eta)$, *а* $\lambda_1=\eta''(1+\sqrt{\eta})^2$ *и* $\lambda_2=a_1\eta^2+a_2\eta+a_3+(\beta_1\eta^2+\beta_2\eta+\beta_3)\sqrt{\eta}\neq(A_2+B_2\sqrt{\eta})^2$ — *относительно-основные единицы кольца* $O(\sqrt{\eta})$.

Если $\alpha_1 \not\equiv (m+1)\beta_1 (\operatorname{mod} 2)$, *то в кольце* $O(\sqrt{\eta})$ *существует не более четырех требуемых единиц.*

Следствие 2. *При выполнении условий теоремы 2 диофантово уравнение* (2), *кроме тривиальной тройки решения:* $(x, y) = (1; 0)$, $(0; -1)$ $(-1; 1)$, *может иметь еще не более трех троек целых решений.*

Замечание 1. На практике уменьшение количества троек целых решений диофантова уравнения (2), или более того, уменьшение количества требуемых единиц кольца $O(\sqrt{\eta})$, может быть осуществлено с помощью леммы 6.

Замечание 2. С помощью теорем 1 и 2, при некоторых дополнительных предположениях, выводятся признаки, обеспечивающие существование меньшего количества представлений вида (2). Пусть

$$(22)\qquad \begin{gathered} m \equiv 0 (\operatorname{mod} 3), \quad \lambda_2 = (A_2+B_2\sqrt{\eta})^2, \\ \lambda_{20} = \sqrt{\lambda_2} = A_2+B_2\sqrt{\eta}, \quad \lambda_{20}\lambda_{20}' = -1. \end{gathered}$$

Тогда при любых целых рациональных α, β, γ в силу (20):

$$\operatorname{Sp}(\alpha\eta^2+\beta\eta+\gamma) \equiv 0 (\operatorname{mod} 3).$$

Предположим для определенности, что при любом $r = 1, 2$ или 3 в кольце $O(\eta)$ выполняются сравнения:

$$(23)\qquad N\left(\frac{\lambda_{10}\lambda_{20}^r+\lambda_{10}'\lambda_{20}'^r}{2\sqrt{\eta''}}\right) \equiv N\left(\frac{\lambda_{10}\lambda_{20}^r-\lambda_{10}'\lambda_{20}'^r}{2\sqrt{\eta\eta''}}\right) \equiv 1 (\operatorname{mod} 4).$$

Используя (22) и (23), устанавливаем следующий признак:

Признак 1. *Если при выполнении условий* (22) *и* (23) *хотя бы при одном значении* $r = 1, 2$ *или* 3 *в кольце* $O(\eta)$, *по крайней мере, одна из норм*

$$N\left(\frac{\lambda_{10}\lambda_{20}^r+\lambda_{10}'\lambda_{20}'^r}{2\sqrt{\eta''}}\right) \quad \text{или} \quad N\left(\frac{\lambda_{10}\lambda_{20}^r-\lambda_{10}'\lambda_{20}'^r}{2\sqrt{\eta\eta''}}\right) \not\equiv 1 (\operatorname{mod} 3),$$

то диофантово уравнение (2), *кроме тривиальной тройки решений:* $(x, y) = (1; 0), (0; -1)$ *и* $(-1; 1)$, *может иметь еще не более двух троек целых решений.*

Аналогично находятся признаки, при выполнении которых:

(признак 2) *диофантово уравнение* (2) *будет иметь не более шести целых решений, и*

(признак 3) *количество представлений единицы бинарной кубической формой вида* (2) *равно трем.*

Соответствующим образом формулируются признаки, получающиеся при условиях: $m \equiv 0 (\operatorname{mod} 3)$, $\lambda_2 \neq (A_2+B_2\sqrt{\eta})^2$.

§ 3. Примеры. В заключение проведенного исследования рассмотрим частные случаи уравнения (2), получающиеся при некоторых значениях параметра m.

Пример 1. При $m = 0$ положительные корни η и η' уравнения $\eta^3-3\eta+1 = 0$ составляют систему основных единиц кольца $O(\eta)$ с базисом $[1, \eta, \eta^2]$. Этот факт легко проверяется с помощью метода, изложенного в [7]. Как установлено в [12], элемент

$$\lambda_2 = \tfrac{1}{2}(\eta''+\sqrt{\eta})^2 = \eta+1+(-\eta^2-\eta+2)\sqrt{\eta}$$

является второй относительно-основной единицей в кольце $O(\sqrt{\eta})$. Так как условие $\alpha_1 \not\equiv (m+1)\beta_1 (\operatorname{mod} 2)$, или, что одно и то же, $\alpha_1+(m+1)\beta_1 = 0+(0+1)\cdot(-1) \equiv 1 (\operatorname{mod} 2)$ выполняется, то на основании теоремы 2 в кольце $O(\sqrt{\eta})$ существует не более четырех требуемых единиц.

Получаемая при $\tau_1 = 1$ и $\tau_2 = 0$ первая требуемая единица $\lambda^{(1)} = \eta''(1+\sqrt{\eta})^2$ порождает тривиальную тройку решений уравнения (2): $(x, y) = (1; 0), (0; -1)$ и $(-1; 1)$.

Пусть $\tau_1 = 2$ и $\tau_2 = 1$, тогда вторая требуемая единица имеет вид: $\lambda^{(2)} = \eta''(\eta^{-1}\eta'^{-2}+\eta\eta'^{-1}\sqrt{\eta})^2$. Все условия леммы 5 выполняются, и эта требуемая единица приводит ко второй тройке решений: $(x, y) = (2; 1), (1; -3)$ и $(-3; 2)$. Для третьей $(\tau_1 = 0, \tau_2 = 1)$ требуемой единицы $\lambda^{(3)} = \eta''(\eta'+\eta^{-1}\sqrt{\eta})^2$ условие $k_2 \equiv k_3 (\operatorname{mod} 3)$ леммы 5 не выполняется, поэтому указанная требуемая единица не дает целых решений уравнения (2).

Наконец, в последнем случае: $\tau_1 = 1$, $\tau_2 = 2$, имеем:

$$\lambda_{10} = \pm(\sqrt{\eta''}+\sqrt{\eta\eta''}), \quad \lambda_{30} = \pm(\eta'\sqrt{\eta''}+\eta^{-1}\sqrt{\eta\eta''}),$$

и далее, непосредственно вычисляя, находим:

$$Q_0 = \frac{\lambda_{10}\lambda_{30}^2-\lambda_{10}'\lambda_{30}'^2}{2\sqrt{\eta\eta''}} = -\eta'^3\eta''(3\eta''-2) = -10\eta^2-4\eta+29.$$

Отсюда $N(Q_0) = -19 \not\equiv 1 (\operatorname{mod} 3)$, и на основании признака, аналогичного признаку 1, в этом случае тоже нет решений.

Окончательно, диофантово уравнение $x^3-3xy^2-y^3 = 1$ имеет ровно 6 целых решений: $(x, y) = (1; 0)$, $(0; -1)$, $(-1; 1)$, $(2; 1)$, $(1; -3)$, $(-3; 2)$.

Пример 2. Пусть $m = -1$. В кольце $O(\eta)$ с базисом $[1, \eta, \eta^2]$, где η — произвольный корень уравнения $\eta^3-\eta^2-2\eta+1 = 0$, систему основных единиц составят положительные корни последнего уравнения. В работе [6] найдено, что в качестве второй относительно-основной единицы кольца $O(\sqrt{\eta})$ может быть взято

$$\lambda_2 = \tfrac{1}{2}\eta''(\eta'+\sqrt{\eta})^2 = -\eta^2+2+(\eta^2-\eta-2)\sqrt{\eta}.$$

Очевидно, для λ_2 имеем: $a_1 = -1$, $\beta_1 = 1$, далее

$$-1 \not\equiv (-1+1)1 \pmod 2$$

и в силу теоремы 2 в кольце $O(\sqrt{\eta})$ существует не более четырех требуемых единиц.

Впрочем непосредственное исследование приводит в точности к четырем требуемым единицам следующего вида:

I. $\lambda^{(1)} = \eta''(1+\sqrt{\eta})^2$,

II. $\lambda^{(2)} = \eta''(\eta'^{-1}+\eta\sqrt{\eta})^2$,

III. $\lambda^{(3)} = \eta''(\eta^{-1}\eta'^{-5}+\eta^4\eta'^{-1}\sqrt{\eta})^2$,

IV. $\lambda^{(4)} = \eta''(\eta^{-1}\eta'+\eta^{-2}\eta'^{-1}\sqrt{\eta})^2$.

Так как для второй требуемой единицы $\lambda^{(2)} = \eta''(\eta'^{-1}+\eta\sqrt{\eta})^2$ третье условие $k_2 \equiv k_3 \pmod 3$ леммы 5 не выполняется, то эта требуемая единица не дает целых решений (2). Остальные требуемые единицы удовлетворяют всем условиям леммы 5; следовательно, они порождают тройки решений, соответственно, $(1;0)$, $(0;-1)$ и $(-1;1)$; $(5;4)$, $(4;-9)$ и $(-9;5)$; $(2;-1)$, $(-1;-1)$ и $(-1;2)$. Таким образом, диофантово уравнение $x^3+x^2y-2xy^2-y^3=1$ имеет ровно 9 целых решений: $(x,y) = (1;0)$, $(0;-1)$, $(-1;1)$, $(5;4)$, $(4;-9)$, $(-9;5)$, $(2;-1)$, $(-1;-1)$, $(-1;2)$.

Пример 3. В случае $m=2$ положительные корни η и η' уравнения $\eta^3+2\eta^2-5\eta+1=0$ образуют систему основных единиц кольца $O(\eta)$, а единицы

$$\lambda_1 = \eta''(1+\sqrt{\eta})^2 \quad \text{и} \quad \lambda_2 = 7\eta^2+15\eta-33+(16\eta^2+36\eta-71)\sqrt{\eta}$$

составят систему относительно-основных единиц в кольце $O(\sqrt{\eta})$. Условие $a_1 \not\equiv (m+1)\beta_1 \pmod 2$ выполняется; значит, в кольце $O(\sqrt{\eta})$ существует не более четырех требуемых единиц. Легко обнаруживаются требуемые единицы:

$$\lambda^{(1)} = \eta''(1+\sqrt{\eta})^2, \quad \lambda^{(2)} = \eta''(\eta'^3+\eta^{-3}\sqrt{\eta})^2.$$

Специфические же соображения, построенные в [1], выявили отсутствие требуемых единиц в оставшихся случаях. Итак, диофантово уравнение $x^3-2x^2y-5xy^2-y^3=1$ имеет ровно шесть целых решений: $(1;0)$, $(0;-1)$, $(-1;1)$, $(-7;-2)$, $(-2;9)$, $(9;-7)$.

Цитированная литература

[1] Э. Т. Аванесов, *Решение в целых числах неопределенного уравнения $x^3-2x^2y-5xy^2-y^3=1$*, Уч. записки Ивановского гос. пединститута, 61 (1969), стр. 61–83.

[2] — *О представлении чисел бинарными кубическими формами положительного дискриминанта*, Acta Arith. 14 (1968), стр. 13–25.

[3] — *К вопросу об одной теореме Сколема*, Известия АН Арм. ССР, Математика, 3, 2 (1968), стр. 160–165.

[4] A. Baker, *The Diophantine equation $y^2 = ax^3+bx^2+cx+d$*, Journ. London Math. Soc. 43 (1968), стр. 1–9.

[5] — and H. Davenport, *The equations $3x^2-2=y^2$ and $8x^2-7=z^2$*, Quart. J. Math. (2), 20 (1969), стр. 129–137.

[6] В. И. Баулин, *О неопределенном уравнении третьей степени с наименьшим положительным дискриминантом*, Уч. записки Тульского гос. пединститута, 7 (1960), стр. 138–170.

[7] К. К. Биллевич, *Об единицах алгебраических полей третьего и четвертого порядков*, Мат. сборник, 40 (82), 1 (1956), стр. 123–136.

[8] З. И. Боревич и И. Р. Шафаревич, *Теория чисел*, Москва 1964.

[9] Б. Н. Делоне, *О числе представлений числа двойничной кубической формой отрицательного определителя*, ИАН СССР, 16 (1922), стр. 253–272.

[10] — и Д. К. Фаддеев, *Теория иррациональностей третьей степени*, Москва-Ленинград 1940.

[11] A. M. Legendre, *Essai sur la théorie des nombres*, Paris 1798.

[12] W. Ljunggren, *Einige Bemerkungen über die Darstellung ganzer Zahlen durch binäre kubische Formen mit positiver Diskriminante*, Acta Math. 75 (1942), стр. 1–21.

[13] T. Nagell, *Darstellung ganzer Zahlen durch binäre kubische Formen mit negativer Diskriminante*, Math. Z. 28 (1928), стр. 10–29.

[14] Th. Skolem, *Einige Sätze über gewisse Reihenentwicklungen und exponentiale Beziehungen mit Anwendung auf diophantische Gleichungen*, Oslo Vid. Akad. Skrifter I, 1933, N° 6.

[15] — *Ein Verfahren zur Behandlung gewisser exponentialer Gleichungen und diophantische Gleichungen*, 8de Skand. Math. Kongress, Stockholm (1934), стр. 163–188.

Получено 24. 5. 1970 (91)