Verallgemeinerungen einiger Sätze aus der Geometrie der Zahlen.

Professor Edmund Landau zum 60. Geburtstag am 14. Februar 1937

Von

Werner Fenchel (Kopenhagen).

§ 1. Einleitung.

H. F. Blichfeldt[1]) hat durch eine geometrische Anwendung des Schubfachprinzips den folgenden Satz bewiesen:

Satz 1. Eine abzählbare Menge $\mathfrak{M}$ des n-dimensionalen Raumes sei so verteilt, dass in jedem Gitterwürfel[2]) genau k ihrer Punkte liegen, wo k eine feste natürliche Zahl bezeichnet. Ist dann $\mathfrak{K}$ eine beschränkte Punktmenge vom äusseren Peano-Jordanschen Inhalt V, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine solche Translation von $\mathfrak{K}$, dass die ε-Umgebung von $\mathfrak{K}$ in der neuen Lage mehr als Vk (d. h. mindestens $[Vk]+1$) Punkte von $\mathfrak{M}$ enthält.

Der Hauptgegenstand der folgenden Zeilen ist die Bemerkung, *dass für das Bestehen dieses Satzes keinerlei Regelmässigkeit der Verteilung von $\mathfrak{M}$ erforderlich ist. $\mathfrak{M}$ darf eine ganz beliebige Menge sein, deren obere Grenzdichte* (in einem gleich anzugebenden Sinne) *grösser oder gleich ρ ist. In der Behauptung ist dann Vk durch $V\rho$ zu ersetzen.*

[1]) H. F. Blichfeldt: A new principle in the geometry of numbers, with some applications. [Trans. Amer. Math. Soc. 15, 227—235 (1914)]. Vgl. auch W. Scherrer: Ein Satz über Gitter und Volumen. [Math. Ann. 86, 99—107 (1922)].

[2]) Dass hier der Kürze halber von gewöhnlichen Gitterwürfeln die Rede ist, bedeutet keine Beschränkung; die etwas allgemeinere Formulierung von Blichfeldt ergibt sich durch Anwendung einer affinen Transformation.

Wir sagen, die *obere Grenzdichte* (im folgenden kurz die *Dichte*) einer Menge $\mathfrak{M}$ sei $\geqq \rho$, wenn es zu jedem $\eta > 0$ achsenparallele Würfel $\mathfrak{W}_l$ beliebig grosser Kantenlänge l derart gibt, dass die Anzahl $N(\mathfrak{W}_l)$ der im Innern eines solchen Würfels gelegenen Punkte von $\mathfrak{M}$ grösser als $(\rho - \eta)\, l^n$ ist. Es wird also gefordert

$$\varlimsup_{l \to \infty} \frac{N(\mathfrak{W}_l)}{l^n} \geqq \rho,$$

wobei links der Wert ∞ zugelassen wird. Nicht triviale Aussagen ergeben sich im folgenden nur für $\rho > 0$.

Es zeigt sich, dass das Blichfeldtsche Verfahren mit einigen geringfügigen Abänderungen zum Beweis des allgemeineren Satzes verwendet werden kann (§ 3).

Unter zusätzlichen Voraussetzungen lässt sich, wie Blichfeldt bemerkt hat, der Satz 1 verschärfen zu.

Satz 2. $\mathfrak{M}$ besitze ausser den in Satz 1 genannten Eigenschaften noch die, dass die k Punkte von $\mathfrak{M}$ in allen Gitterwürfeln kongruente Lage haben, m. a. W. $\mathfrak{M}$ werde durch alle Gittertranslationen in sich übergeführt. Ferner sei $\mathfrak{K}$ überdies abgeschlossen. Dann lässt sich die Menge $\mathfrak{K}$ durch Translation in eine solche Lage bringen, dass sie selbst mehr als Vk Punkte von $\mathfrak{M}$ enthält.

Auch dieser Satz lässt sich in dem genannten Sinne verallgemeinern (§ 4). Er gilt z B., wenn $\mathfrak{M}$ eine beliebige nur aus Gitterpunkten bestehende Menge ist. Für Satz 2 hat G. D. Birkhoff einen sehr einfachen direkten Beweis angegeben, der auf der Betrachtung des Raumes modulo der Gittertranslationen beruht[3]). Dieser Beweis dürfte sich jedoch nicht auf den hier zu betrachtenden Fall übertragen lassen. Die Verallgemeinerung von Satz 2 wird daher in § 4 durch einen Grenzübergang aus dem verallgemeinerten Satz 1 hergeleitet.

Ferner wird in § 5 auf den engen Zusammenhang dieser Sätze mit Verallgemeinerungen des Minkowskischen Satzes über konvexe Körper mit Mittelpunkt hingewiesen, die kürzlich L. J. Mordell[4]) und J. G. van

[3]) Mitgeteilt von Blichfeldt l. c. S. 230. Dieser Beweis stimmt mit dem überein, den T. Bonnesen und Verf.: Theorie der konvexen Körper (Ergebn. Math. 3,1, Berlin 1934, S. 126) und G. Hajós: Ein neuer Beweis eines Satzes von Minkowski [Acta Litt. Sci. Szeged 6, 224—225 (1934)] für den spezielleren Satz von Minkowski über konvexe Körper mit Mittelpunkt angegeben haben. Dass diese Schlussweise von Birkhoff herrührt, ist dem Verf. leider erst nach der Abfassung des genannten Berichtes bekannt geworden.

[4]) L. J. Mordell: On some arithmetical results in the geometry of numbers [Compositio math. 1, 248—253 (1934)].

der Corput[5]) mit arithmetischen Methoden bewiesen haben. Insbesondere wird gezeigt, dass sich diese Sätze in allgemeinerer Form durch eine äusserst einfache geometrische Überlegung aus den genannten Resultaten gewinnen lassen.

In § 2 werden einige sehr einfache Begriffsbildungen und Hilfssätze zusammengestellt, die namentlich in der Theorie der konvexen Körper von Bedeutung sind, sich aber auch hier als nützlich erweisen.

Um zu zeigen, dass die hier gefundenen Sätze zahlentheoretische Anwendungen zulassen, die nicht ganz auf der Hand zu liegen scheinen, wird in § 6 der Minkowskische Linearformensatz in folgendem Sinne verallgemeinert.

Es sei eine Folge F natürlicher Zahlen mit einer Dichte $\geq \rho > 0$ *gegeben, d. h. es gebe zu jedem* $\eta > 0$ *Intervalle beliebig grosser Länge* l, *in denen mehr als* $(\rho - \eta)\, l$ *Zahlen aus* F *liegen.*

$L_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, *seien reelle Linearformen mit der Determinante* $\Delta \neq 0$. *Dann gibt es wenigstens ein System von* $2n$ *Zahlen* $x_1', x_2', \ldots, x_n', x_1'', x_2'', \ldots, x_n''$ *aus* F *mit*

$$(x_1'' - x_1')^2 + (x_2'' - x_2')^2 + \ldots + (x_n'' - x_n')^2 > 0,$$

derart dass die Ungleichungen

$$|L_\nu(x_1'' - x_1', x_2'' - x_2', \ldots, x_n'' - x_n')| \leq \frac{\sqrt[n]{|\Delta|}}{\rho}$$

für $\nu = 1, 2, \ldots, n$ *erfüllt sind.*

Allgemein: In allen Sätzen über diophantische Approximationen, die sich aus dem Minkowskischen Satz über Körper mit Mittelpunkt oder seinen oben angeführten Verallgemeinerungen von Blichfeldt und Mordell-van der Corput folgern lassen[6]), können an die Stelle der beliebigen ganzen Zahlen die Differenzen der Zahlen einer vorgegebenen Folge natürlicher Zahlen von positiver Dichte treten. In die Schranken geht dann natürlich die Dichte der Folge ein.

§ 2. Definitionen und Hilfssätze.

1. Im n-dimensionalen Raume sei ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit dem Ursprung O gewählt. Der Punkt mit den Koordinaten

[5]) J. G. van der Corput: Verallgemeinerung einer Mordellschen Beweismethode in der Geometrie der Zahlen [Acta arithmet. 1, 62—66 (1935) und 2, 145—146 (1936)]

[6]) Vgl. den Bericht von J. F. Koksma: Diophantische Approximationen (Ergebn. Math. 4,4, Berlin 1935) insbes. Kap. II.

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ werde kurz mit x bezeichnet. Sind x und y zwei Punkte, λ eine reelle Zahl, so bedeuten $x + y$ den Punkt mit den Koordinaten $x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n$ und λx den Punkt mit den Koordinaten $\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n$.

Sind $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ beliebige Punktmengen, so wird unter $\mathfrak{M} + \mathfrak{N}$ die Menge der Punkte $x + y$ und unter $\lambda \mathfrak{M}$ die Menge der Punkte λx verstanden, wo x und y unabhängig von einander die Mengen $\mathfrak{M}$ bzw. $\mathfrak{N}$ durchlaufen. Für diese Addition von Mengen gelten offensichtlich das kommutative und das assoziative Gesetz. Ferner gilt das „erste distributive Gesetz"

$$\lambda(\mathfrak{M} + \mathfrak{N}) = \lambda \mathfrak{M} + \lambda \mathfrak{N}.$$

Sind λ und μ positiv, und ist $\mathfrak{M}$ konvex, so gilt auch das „zweite distributive Gesetz"

$$(\lambda + \mu)\mathfrak{M} = \lambda \mathfrak{M} + \mu \mathfrak{M}.$$

Dies erkennt man folgendermassen. $(\lambda + \mu)\mathfrak{M}$ besteht aus allen Punkten $(\lambda + \mu)x$ und $\lambda \mathfrak{M} + \mu \mathfrak{M}$ aus allen Punkten $\lambda x' + \mu x''$, wo x, x', x'' die Menge $\mathfrak{M}$ durchlaufen. Es ist also jedenfalls $(\lambda + \mu)\mathfrak{M}$ in $\lambda \mathfrak{M} + \mu \mathfrak{M}$ enthalten. Da $\lambda > 0$, $\mu > 0$ und $\mathfrak{M}$ konvex ist, gehört mit zwei beliebigen Punkten x' und x'' von $\mathfrak{M}$ auch der Punkt $x = \dfrac{\lambda x' + \mu x''}{\lambda + \mu}$ zu $\mathfrak{M}$. Daraus folgt, dass jeder Punkt von $\lambda \mathfrak{M} + \mu \mathfrak{M}$ in der Form $(\lambda + \mu)x$ darstellbar ist, wo x zu $\mathfrak{M}$ gehört. Dies bedeutet aber, dass auch $\lambda \mathfrak{M} + \mu \mathfrak{M}$ in $(\lambda + \mu)\mathfrak{M}$ enthalten ist.

2. Ist $\mathfrak{M}$ eine beliebige Punktmenge, so ist $-\mathfrak{M}$ ihr Spiegelbild bezüglich des Nullpunktes. Die Menge

$$\mathfrak{M}^* = \mathfrak{M} + (-\mathfrak{M})$$

wird die *Vektormenge* von $\mathfrak{M}$ genannt. Sie besteht aus allen Punkten $x'' - x'$, wo x' und x'' unabhängig von einander die Menge $\mathfrak{M}$ durchlaufen. Sie kann ferner definiert werden als die Vereinigungsmenge aller Mengen, die aus $\mathfrak{M}$ durch solche Translationen hervorgehen, die einen Punkt von $\mathfrak{M}$ in den Ursprung überführen. Sie enthält stets den Ursprung O und hat diesen zum Mittelpunkt.

Eine Punktmenge $\mathfrak{M}$ ist ein *Modul* dann und nur dann, wenn

$$\mathfrak{M}^* = \mathfrak{M}$$

ist. Ist sie überdies *diskret*, d. h. besitzt sie keine Häufungspunkte im Endlichen, so ist sie ein *Gitter*. Ist $\mathfrak{M}$ Teilmenge eines Moduls, so gehört auch $\mathfrak{M}^*$ diesem Modul an.

Ist $\mathfrak{M}$ ein konvexer Körper mit dem Mittelpunkt O, so ist

$$\mathfrak{M}^* = 2\,\mathfrak{M}.$$

Denn wenn O Mittelpunkt von $\mathfrak{M}$ ist, gilt $-\mathfrak{M} = \mathfrak{M}$ und daher nach dem zweiten distributiven Gesetz

$$\mathfrak{M}^* = \mathfrak{M} + (-\mathfrak{M}) = \mathfrak{M} + \mathfrak{M} = 2\,\mathfrak{M}.$$

3. Mit T_a wird im folgenden diejenige Translation bezeichnet, die den Ursprung in den Punkt a überführt. $T_a x$ und $T_a \mathfrak{M}$ bedeuten den Punkt bzw. die Menge, die aus x bzw. $\mathfrak{M}$ bei dieser Translation hervorgehen.

Für jede Menge $\mathfrak{M}$ und jede Translation T_a gilt wegen $(x'' + a) - (x' + a) = x'' - x'$

$$(T_a \mathfrak{M})^* = \mathfrak{M}^*,$$

d. h. die Vektormenge einer Menge bleibt bei Translationen der Menge ungeändert.

Es bezeichnen A eine homogene lineare Transformation, $A\,x$ und $A\,\mathfrak{M}$ den bei A aus x hervorgehenden Punkt bzw. die aus $\mathfrak{M}$ hervorgehende Menge. Wegen $A\,x'' - A\,x' = A\,(x'' - x')$ hat man stets

$$(A\,\mathfrak{M})^* = A\,\mathfrak{M}^*.$$

4. Unter der *Distanz* zweier Punkte x und y verstehen wir

$$\|y - x\| = \operatorname{Max} |y_\nu - x_\nu|, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Wir verwenden also eine Minkowskische Metrik, deren *Eichkörper* der achsenparallele Würfel mit der Kantenlänge 2 und mit dem Mittelpunkt O ist. Es gilt die Dreiecksungleichung

$$\|z - x\| \leqq \|z - y\| + \|y - x\|.$$

Der *Durchmesser* einer beschränkten Menge ist die obere Grenze von $\|x'' - x'\|$ für alle Punktepaare x', x'' der Menge.

Es sei $\varepsilon > 0$. Unter der *ε-Umgebung* $\mathfrak{M}_\varepsilon$ einer Menge verstehen wir die Menge der Punkte, die von wenigstens einem Punkt von $\mathfrak{M}$ eine Distanz $< \varepsilon$ besitzen. $\mathfrak{M}_\varepsilon$ ist also die Vereinigungsmenge aller offenen achsenparallelen Würfel der Kantenlänge $2\,\varepsilon$, deren Mittelpunkte zu $\mathfrak{M}$ gehören. Bezeichnet $\mathfrak{E}$ den Eichkörper ohne Rand, so ist

$$\mathfrak{M}_\varepsilon = \mathfrak{M} + \varepsilon\,\mathfrak{E}.$$

Ist T eine beliebige Translation, so gilt

$$T\,\mathfrak{M}_\varepsilon = (T\,\mathfrak{M})_\varepsilon.$$

Ferner ist

$$(\mathfrak{M}_\varepsilon)^* = (\mathfrak{M}^*)_{2\varepsilon};$$

denn nach den in **1** angeführten Rechenregeln findet man

$$\begin{aligned}(\mathfrak{M} + \varepsilon\,\mathfrak{E})^* &= \mathfrak{M} + \varepsilon\,\mathfrak{E} + [-(\mathfrak{M} + \varepsilon\,\mathfrak{E})] \\ &= \mathfrak{M} + \varepsilon\,\mathfrak{E} + (-\mathfrak{M}) + (-\varepsilon\,\mathfrak{E}) \\ &= \mathfrak{M} + \varepsilon\,\mathfrak{E} + (-\mathfrak{M}) + \varepsilon\,\mathfrak{E} = \mathfrak{M}^* + 2\,\varepsilon\,\mathfrak{E}.\end{aligned}$$

§ 3. Beweis des verallgemeinerten Blichfeldtschen Satzes.

Satz 3. *Es sei $\mathfrak{M}$ eine Menge der Dichte* [7] $\geqq \rho > 0$. *Ferner sei eine Menge $\mathfrak{K}$ vom äusseren Inhalt V gegeben. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Translation T derart, dass die Menge $T\,\mathfrak{K}_\varepsilon$ mehr als $V\rho$ Punkte von $\mathfrak{M}$ enthält.*

Beim Beweis können wir ohne Beschränkung annehmen, dass $\mathfrak{M}$ diskret ist, da sonst der Satz trivial ist, ferner dass $\mathfrak{K}$ abgeschlossen ist; denn beim Übergang zur abgeschlossenen Hülle ändert sich weder der äussere Inhalt noch die ε-Umgebung. Vorläufig setzen wir ferner $\mathfrak{K}$ als beschränkt voraus.

Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir wählen eine positive Zahl $\delta < \varepsilon$ und überdecken den ganzen Raum mit einem Netz achsenparalleler Würfel der Kantenlänge δ. Die Vereinigungsmenge aller der abgeschlossenen Netzwürfel, die wenigstens einen Punkt mit $\mathfrak{K}$ gemein haben, sei $\overline{\mathfrak{K}}$, ihr Inhalt $\overline{V}$. Die Würfelmenge $\overline{\mathfrak{K}}$ gehört wegen $\delta < \varepsilon$ zu $\mathfrak{K}_\varepsilon$. Ferner ist $\overline{V} > V$; denn wenn ein Würfel von $\overline{\mathfrak{K}}$ ganz in $\mathfrak{K}$ enthalten ist, so gehören auch alle an ihn angrenzenden Netzwürfel zu $\overline{\mathfrak{K}}$; es können also nicht alle Würfel von $\overline{\mathfrak{K}}$ ganz zu $\mathfrak{K}$ gehören. Die Anzahl der Würfel, aus denen $\overline{\mathfrak{K}}$ besteht, ist gleich $\dfrac{\overline{V}}{\delta^n}$. Der Durchmesser von $\overline{\mathfrak{K}}$ (im Sinne von § 2, **4**) sei $\overline{d}$.

Nach Voraussetzung gibt es zu jedem $\eta > 0$ Translationen T und beliebig grosse λ derart, dass die Anzahl $N = N(T\lambda\,\mathfrak{E})$ der Punkte von $\mathfrak{M}$, die dem (offenen) Würfel $T\lambda\,\mathfrak{E}$ der Kantenlänge $2\,\lambda$ angehören,

[7] Im Sinne von § 1.

grösser als $(\rho-\eta)(2\lambda)^n$ ist. Wir können also zunächst η so klein wählen, dass

$$\frac{\rho-\eta}{\rho}>\frac{V}{\overline{V}}$$

wird, und dann ausserdem über λ (und T) so verfügen, dass auch noch

$$\frac{\rho-\eta}{\rho}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\overline{d}}\right)^n>\frac{V}{\overline{V}},$$

also

$$(*)\qquad \frac{N\overline{V}}{(2\lambda+2\overline{d})^n}>V\rho$$

erfüllt ist.

Da $\mathfrak{M}$ als diskret angenommen ist, liegen im Würfel $T\lambda\mathfrak{E}$ nur endlich viele Punkte von $\mathfrak{M}$. Um Weitläufigkeiten bei der folgenden Abzählung zu vermeiden, können wir daher das ganze Netz der δ-Würfel einschliesslich der Mengen $\mathfrak{K}$ und $\overline{\mathfrak{K}}$ einer solchen Translation unterwerfen, dass jeder dieser endlich vielen Punkte in das Innere eines Netzwürfels fällt.

Es werde nun ein beliebiger, $\mathfrak{w}$, der zu $\overline{\mathfrak{K}}$ gehörigen Netzwürfel ausgewählt und $\overline{\mathfrak{K}}$ allen den Translationen unterworfen, die das Netz mit sich zur Deckung bringen und den Würfel $\mathfrak{w}$ in einen ganz im Würfel $T(\lambda+\overline{d})\mathfrak{E}$ enthaltenen Netzwürfel überführen. Die Anzahl dieser Translationen ist gleich der Anzahl der Netzwürfel, die in $T(\lambda+\overline{d})\mathfrak{E}$ liegen, also höchstens $\frac{(2\lambda+2\overline{d})^n}{\delta^n}$. Jeder Netzwürfel, der innere Punkte mit dem Würfel $T\lambda\mathfrak{E}$ gemein hat, wird hierbei nach und nach von jedem Netzwürfel von $\overline{\mathfrak{K}}$ genau einmal überdeckt; denn wenn ein Würfel $\mathfrak{w}$ von $\overline{\mathfrak{K}}$ in einer der Lagen von $\overline{\mathfrak{K}}$ Punkte mit $T\lambda\mathfrak{E}$ gemein hat so liegt $\mathfrak{w}$ in $T(\lambda+\overline{d})\mathfrak{E}$, da $\overline{\mathfrak{K}}$ den Durchmesser $\overline{d}$ hat. Das bedeutet, dass $\overline{\mathfrak{K}}$ in den in Betracht gezogenen Lagen den Würfel $T\lambda\mathfrak{E}$ insgesamt so oft vollständig überdeckt, wie Netzwürfel zu $\overline{\mathfrak{K}}$ gehören, also $\frac{\overline{V}}{\delta^n}$ mal. In den höchstens $\frac{(2\lambda+2\overline{d})^n}{\delta^n}$ Lagen von $\overline{\mathfrak{K}}$ werden also die N Punkte von $\mathfrak{M}$, die in $T\lambda\mathfrak{E}$ liegen, $\frac{\overline{V}}{\delta^n}$ mal von $\overline{\mathfrak{K}}$ überdeckt. In wenigstens einer Lage muss $\overline{\mathfrak{K}}$ demnach wenigstens $N\cdot\frac{\overline{V}}{\delta^n}\cdot\frac{\delta^n}{(2\lambda+2\overline{d})^n}$ Punkte von $\mathfrak{M}$ enthalten.

Nach $(*)$ ist aber

$$\frac{N\overline{V}}{(2\lambda+2\overline{d})^n}>V\rho.$$

Damit ist Satz 3 für beschränktes $\mathfrak{K}$ bewiesen.

Um sich von der Voraussetzung der Beschränktheit von $\mathfrak{K}$ zu befreien, kann man einfach folgendermassen vorgehen. $\varepsilon>0$ sei gewählt. Für ein beliebiges positives $\varepsilon'<\varepsilon$ betrachte man die ε'-Umgebung von $\mathfrak{K}$. Diese hat, wenn $\mathfrak{K}$ unbeschränkt ist, keinen endlichen Inhalt. Sie enthält also eine beschränkte Teilmenge, deren äusserer Inhalt grösser als V ist. Auf diese Menge, deren $(\varepsilon-\varepsilon')$-Umgebung in $\mathfrak{K}_\varepsilon$ enthalten ist, statt $\mathfrak{K}$ und $\varepsilon-\varepsilon'$ statt ε wende man den bereits bewiesenen Satz an. Dann erhält man die Behauptung für $\mathfrak{K}$.

§ 4. Beweis des Zusatzes.

Satz 4. *Es sei $\mathfrak{M}$ eine diskrete Menge der Dichte $\geqq\rho>0$, deren Vektormenge $\mathfrak{M}^*$ ebenfalls diskret ist. Ferner sei $\mathfrak{K}$ eine beschränkte abgeschlossene Menge vom äusseren Inhalt V. Dann gibt es eine solche Translation T, dass die Anzahl der in der Menge $T\mathfrak{K}$ enthaltenen Punkte von $\mathfrak{M}$ grösser als $V\rho$ ist.*

Vorbemerkung. Wenn die Menge $\mathfrak{M}$ durch n linear unabhängige Translationen in sich übergeführt wird oder eine Teilmenge einer solchen Menge ist, so ist $\mathfrak{M}^*$ stets diskret. (Dies gilt also insbesondere, wenn $\mathfrak{M}$ Teilmenge eines Gitters ist.) Alsdann enthält nämlich $\mathfrak{M}$ nur endlich viele modulo dieser Translationen verschiedene Punkte, und für $\mathfrak{M}^*$ gilt daher dasselbe, d. h. in jedem Fundamentalparallelepiped der von den Translationen erzeugten Gruppe liegen nur endlich viele Punkte von $\mathfrak{M}^*$.

Zum Beweis von Satz 4 bemerken wir folgendes. Es sei D eine feste positive Zahl. Zu jedem Punkt a von $\mathfrak{M}$ betrachten wir die Menge $\mathfrak{M}_a$ derjenigen Punkte von $\mathfrak{M}$, die im Würfel $T_a D\mathfrak{E}$ der Kantenlänge $2D$ und dem Mittelpunkt a enthalten sind. Bei der Translation T_{-a}, die a in O überführt, geht $\mathfrak{M}_a$ in eine Teilmenge von $\mathfrak{M}^*$ über, die im Würfel $D\mathfrak{E}$ enthalten ist. Da aber $\mathfrak{M}^*$ voraussetzungsgemäss diskret ist, enthält dieser Würfel $D\mathfrak{E}$ nur endlich viele Punkte von $\mathfrak{M}^*$. Daraus folgt, dass es unter den Mengen $\mathfrak{M}_a$ nur endlich viele verschiedene gibt, wenn zwei durch Translation in einander überführbare als gleich angesehen werden.

Wir wählen nun eine Folge gegen 0 strebender Zahlen $1 > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots$ Zu jedem ε_ν gibt es nach Satz 3 eine Translation $T^{(\nu)}$ derart, dass $T^{(\nu)} \mathfrak{K}_{\varepsilon_\nu}$ mehr als $V\rho$ Punkte von $\mathfrak{M}$ enthält. Wählen wir nun die oben eingeführte Zahl $D > d + 1$, wo d den Durchmesser von $\mathfrak{K}$ bezeichnet, so liegt jede Menge $T^{(\nu)} \mathfrak{K}_{\varepsilon_\nu}$ ganz in einem der Würfel $T_a D \mathfrak{E}$, d. h. $T^{(\nu)} \mathfrak{K}_{\varepsilon_\nu}$ enthält nur solche Punkte von $\mathfrak{M}$, die einer und derselben Menge $\mathfrak{M}_a$ angehören. Da nun, wie eben gezeigt, jede Menge $\mathfrak{M}_a$ durch Translation in eine von endlich vielen überführbar ist, können die Translationen $T^{(\nu)}$ beschränkt gewählt werden. Die $T^{(\nu)}$ enthalten also eine konvergente Teilfolge. Sei T deren Limes. Dann enthält die Menge $T\mathfrak{K}$ mehr als $V\rho$ Punkte von $\mathfrak{M}$. Da nämlich $\mathfrak{M}$ diskret und $\mathfrak{K}$ abgeschlossen ist, enthielte anderenfalls auch eine passende ε-Umgebung $T\mathfrak{K}_\varepsilon$ von $T\mathfrak{K}$ höchstens $V\rho$ Punkte von $\mathfrak{M}$, was unmöglich ist, da in $T\mathfrak{K}_\varepsilon$ Mengen $T^{(\nu)} \mathfrak{K}_{\varepsilon_\nu}$ und in jeder von diesen mehr als $V\rho$ Punkte von $\mathfrak{M}$ enthalten sind. Damit ist Satz 4 bewiesen.

§ 5. Übergang zum van der Corputschen Satz.

Es seien nun wieder $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{K}$ beliebige Mengen, die letztere vom äusseren Inhalt V, und es sei eine positive Zahl ε gewählt. Die Translation T führe $\mathfrak{K}_{\frac{\varepsilon}{2}}$ in eine Menge $T\mathfrak{K}_{\frac{\varepsilon}{2}}$ über, die die von einander verschiedenen Punkte $x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(p)}$ von $\mathfrak{M}$ enthält. Alsdann gehören die Punkte $x^{(1)} - x^{(0)}, x^{(2)} - x^{(0)}, \ldots, x^{(p)} - x^{(0)}$ sowohl zu $\mathfrak{M}^*$ als auch zu $(T\mathfrak{K}_{\frac{\varepsilon}{2}})^*$. Nun ist aber (vgl. § 2, 4)

$$(T\mathfrak{K}_{\frac{\varepsilon}{2}})^* = (\mathfrak{K}^*)_\varepsilon$$

Anwendung der Sätze 3 und 4 mit $\frac{\varepsilon}{2}$ statt ε ergibt also:

Satz 5. *Es seien $\mathfrak{M}$ eine Menge der Dichte $\geqq \rho > 0$ und $\mathfrak{K}$ eine Menge vom äusseren Inhalt V. Dann enthält für jedes $\varepsilon > 0$ die ε-Umgebung $(\mathfrak{K}^*)_\varepsilon$ der Vektormenge $\mathfrak{K}^*$ von $\mathfrak{K}$ wenigstens $[V\rho]$ vom Nullpunkt verschiedene Punkte der Vektormenge $\mathfrak{M}^*$ von $\mathfrak{M}$.*

Ist überdies $\mathfrak{M}^*$ diskret und $\mathfrak{K}$ beschränkt und abgeschlossen, so enthält die Vektormenge $\mathfrak{K}^*$ von $\mathfrak{K}$ selbst wenigstens $[V\rho]$ vom Nullpunkt verschiedene Punkte von $\mathfrak{M}^*$.

Wählt man für $\mathfrak{K}$ einen konvexen Körper mit dem Mittelpunkt O und für $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^*$ die Menge der gewöhnlichen Gitterpunkte, so ist (nach § 2, 2) $\mathfrak{K}^* = 2\mathfrak{K}$, also das Volumen von $\mathfrak{K}^*$ gleich $2^n V$, und es kann $\rho = 1$ gesetzt werden. Satz 5 besagt dann: Ein konvexer Körper mit O als Mittelpunkt und dem Volumen $2^n V$ enthält wenigstens $[V]$ von O verschiedene Gitterpunkte. Für $V = 1$ hat man also den Minkowskischen Hauptsatz.

Es sei wieder $\mathfrak{K}$ eine beliebige Menge vom äusseren Inhalt $V > 0$. Ferner bezeichne A eine homogene lineare Transformation, deren Determinante den absoluten Betrag Δ besitzt. Alsdann hat die Menge $A\mathfrak{K}$ den äusseren Inhalt ΔV. Anwendung des Satzes 5 auf diese Menge ergibt mit Rücksicht auf § 2, 3 den folgenden

Satz 6. *Es seien $\mathfrak{M}$ eine Menge der Dichte $\geqq \rho > 0$ und $\mathfrak{K}$ eine Menge vom äusseren Inhalt $V > 0$. Ferner sei A eine homogene lineare Transformation, deren Determinante den Betrag Δ besitzt. Dann enthält für jedes $\varepsilon > 0$ die ε-Umgebung der Vektormenge $(A\mathfrak{K})^* = A\mathfrak{K}^*$ wenigstens $[\Delta V\rho]$ von O verschiedene Punkte der Vektormenge $\mathfrak{M}^*$ von $\mathfrak{M}$.*

Ist überdies $\mathfrak{M}^*$ diskret und $\mathfrak{K}$ abgeschlossen und beschränkt, so enthält $A\mathfrak{K}^*$ selbst wenigstens $[\Delta V\rho]$ von O verschiedene Punkte von $\mathfrak{M}^*$.

Wählt man hierin speziell für $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^*$ die Menge der gewöhnlichen Gitterpunkte, so dass $\rho = 1$ gesetzt werden kann, und für die Matrix von A eine Diagonalmatrix, so erhält man die in § 1 erwähnten Resultate von Mordell und van der Corput.

§ 6. Anwendung auf den Minkowskischen Linearformensatz.

Es sei F eine Folge natürlicher Zahlen der Dichte $\geqq \rho > 0$. Mit $\mathfrak{M}$ werde die Menge der Gitterpunkte des n-dimensionalen Raumes bezeichnet, deren Koordinaten der Folge F angehören. Dann hat $\mathfrak{M}$ eine Dichte $\geqq \rho^n$. Enthält nämlich das Intervall $a < x < b$ der Zahlengeraden N Zahlen von F, so liegen im Würfel $a < x_\nu < b$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, genau N^n Punkte von $\mathfrak{M}$.

Sind nun $L_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, reelle Linearformen der Determinante $\Delta \neq 0$, so definieren die Ungleichungen

$$|L_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_n)| \leqq \frac{\sqrt[n]{|\Delta|}}{2\rho}$$

ein Parallelepiped $\mathfrak{K}$ vom Volumen $\frac{1}{\rho^n}$ mit O als Mittelpunkt. Da $\mathfrak{K}$ konvex ist, gilt also nach § 2, 2

$$\mathfrak{K}^* = 2\mathfrak{K},$$

d. h. $\mathfrak{K}^*$ ist durch die Ungleichungen

$$|L_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_n)| \leqq \frac{\sqrt[n]{|\Delta|}}{\rho}, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

definiert. Nach Satz 5 enthält $\mathfrak{K}^*$ wenigstens einen von O verschiedenen Punkt von $\mathfrak{M}^*$, also einen Punkt $x'' - x'$, wo x' und x'' verschiedene Punkte von $\mathfrak{M}$ sind. Mit anderen Worten: es gibt Zahlen $x_1', x_2', \ldots, x_n', x_1'', x_2'', \ldots, x_n''$ aus F, für welche die Ungleichungen

$$(x_1'' - x_1')^2 + (x_2'' - x_2')^2 + \ldots + (x_n'' - x_n')^2 > 0$$

und

$$|L_\nu(x_1'' - x_1', x_2'' - x_2', \ldots, x_n'' - x_n')| \leqq \frac{\sqrt[n]{|\Delta|}}{\rho}, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

erfüllt sind. Damit ist der in § 1 formulierte Linearformensatz bewiesen.

Zusatz bei der Korrektur: Nach einer Mitteilung von B. Jessen gestattet Satz 3 die folgende Verallgemeinerung, die sich auf beliebige nach Lebesgue messbare Mengen $\mathfrak{K}$ bezieht und die für offene Mengen der Form $\mathfrak{K}_\varepsilon$ mit Satz 3 gleichwertig ist:

Es sei $\mathfrak{M}$ eine Menge der Dichte $\geqq \rho > 0$ und $\mathfrak{K}$ eine messbare Menge vom Mass $m(\mathfrak{K}) > V$. Dann gibt es eine Translation T derart, dass die Menge $T\mathfrak{K}$ mehr als $V\rho$ Punkte von $\mathfrak{M}$ enthält.

Der Beweis verläuft nach Jessen folgendermassen. Offenbar darf $\mathfrak{M}$ beim Beweis abzählbar angenommen werden. Für die Anzahl $F(a)$ der Punkte von $\mathfrak{M}$ in $T_a\mathfrak{K}$ gilt dann

$$F(a) = \sum_{b \varepsilon \mathfrak{M}} 1_{T_b(-\mathfrak{K})}(a),$$

wobei $1_{\mathfrak{N}}(a)$ die charakteristische Funktion der Menge $\mathfrak{N}$ bedeutet. Hieraus folgt aber

$$(*) \qquad \Phi = \overline{\lim_{l\to\infty}} \frac{1}{l^n} \int_{\mathfrak{W}_l} F(a)\, da > V\rho;$$

denn ist $\mathfrak{K}$ beschränkt, vom Durchmesser d, also enthalten in einem Würfel $\mathfrak{W}_{2d}$, so erhält man

$$\Phi = \overline{\lim_{l\to\infty}} \frac{1}{l^n} \left(\frac{l}{l+2d}\right)^n \int_{\mathfrak{W}_{l+2d}} F(a)\, da$$

$$\geqq \overline{\lim_{l\to\infty}} \frac{1}{l^n} \int_{\mathfrak{W}_{l+2d}} \sum_{b\varepsilon\mathfrak{M}\mathfrak{W}_l} 1_{T_b(-\mathfrak{K})}(a)\, da = m(\mathfrak{K}) \overline{\lim_{l\to\infty}} \frac{N(\mathfrak{W}_l)}{l^n} > V\rho,$$

und ist $\mathfrak{K}$ unbeschränkt, so gibt es eine beschränkte Teilmenge $\mathfrak{K}_0$ von $\mathfrak{K}$ vom Mass $> V$, und es wird $F(a) \geqq F_0(a)$, wenn $F_0(a)$ die zu $\mathfrak{K}_0$ gehörige Anzahlfunktion ist. Aus (*) folgt aber $F(a) > V\rho$ für mindestens ein a. [18. 10. 1937].

(Eingegangen am 22. November 1936.)