Anwendung einer Blichfeldtschen Beweismethode in der Geometrie der Zahlen.

Von

J. G. van der Corput und G. Schaake (Groningen).

Ist $\sigma > 0$ und bedeutet $f(u_1, \ldots, u_n)$, abgekürzt $f(u)$, eine Funktion der reellen Veränderlichen $u_1, \ldots, u_n$ mit den folgenden Eigenschaften:

(1) $f(u_1, \ldots, u_n) > 0$, wenn $(u_1, \ldots, u_n) \neq (0, \ldots, 0)$ ist,

(2) $f(t u_1, \ldots, t u_n) = t^\sigma f(u_1, \ldots, u_n)$ für alle $t \geqq 0$,

(3) $f^{\frac{1}{\sigma}}(u_1 + u_1', \ldots, u_n + u_n') \leqq f^{\frac{1}{\sigma}}(u_1, \ldots, u_n) + f^{\frac{1}{\sigma}}(u_1', \ldots, u_n')$,

(4) $f(-u_1, \ldots, -u_n) = f(u_1, \ldots, u_n)$,

so gibt es nach Minkowski [1]) bekanntlich mindestens einen Gitterpunkt $x = (x_1, \ldots, x_n) \neq (0, \ldots, 0)$ mit

$$f(x) \leqq \frac{2^\sigma}{V^{\frac{\sigma}{n}}},$$

wobei V das Volumen des n-dimensionalen Körpers $f(u) \leqq 1$ bezeichnet.

In dieser Arbeit soll gezeigt werden, dass unter gewissen Voraussetzungen der Faktor 2^σ verkleinert werden kann. Dabei wenden

[1]) H. Minkowski, Geometrie der Zahlen (256 S.), Leipzig und Berlin: Teubner 1910; unveränderter Nachdruck 1925.

wir eine Blichfeldtsche Methode [2]) an, und zwar in der von Herrn R. Remak angegebenen vereinfachten Form [3]). Wie aus dem folgenden Satz hervorgeht, ersetzen wir die Dreiecksungleichung (3) und die Symmetriebedingung (4) durch andere Voraussetzungen.

Satz 1. *Sind σ und c positiv, bezeichnet $f(u_1, \ldots, u_n) = f(u)$ eine Funktion mit (1) und (2), hat $f(u_1, \ldots, u_n)$ auf der n-dimensionalen Kugel $u_1^2 + \ldots + u_n^2 = 1$ eine positive untere Schranke, und ist schliesslich für jedes ganze $k > 1$ und für jede Wahl der k Systeme $u^{(\varkappa)} = (u_1^{(\varkappa)}, \ldots, u_n^{(\varkappa)})$ $(\varkappa = 1, \ldots, k)$ wenigstens eine der $k(k-1)$ Zahlen $f(u^{(\varkappa)} - u^{(\lambda)})$ $(1 \leqq \varkappa \leqq k;$ $1 \leqq \lambda \leqq k;$ $\varkappa \neq \lambda)$ kleiner oder gleich $\frac{c}{k-1} \sum_{\varkappa=1}^{k} f(u^{(\varkappa)})$, so gibt es wenigstens einen Gitterpunkt $x = (x_1, \ldots, x_n) \neq (0, \ldots, 0)$ mit*

$$f(x) \leqq c \left(\frac{n + \sigma}{\sigma V} \right)^{\frac{\sigma}{n}}. \tag{5}$$

Der Faktor 2^σ wird also hier durch $c \left(\frac{n+\sigma}{\sigma} \right)^{\frac{\sigma}{n}}$ ersetzt, was in vielen Fällen eine Verbesserung bedeutet.

Wie wir zeigen werden, erfüllt jede positiv definite quadratische Form $f(u_1, \ldots, u_n)$ die Voraussetzungen dieses Satzes mit $\sigma = 2$ und $c = 2$. So finden wir den Blichfeldtschen

Satz 2: *Ist $f(u_1, \ldots, u_n)$ eine positiv definite n-äre quadratische Form der Determinante D, und ist*

$$A = \frac{4}{\pi} \left(\Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right) \right)^{\frac{2}{n}} D^{\frac{1}{n}},$$

so gibt es einen Gitterpunkt $x \neq (0, \ldots, 0)$ nicht nur mit

$$f(x_1, \ldots, x_n) \leqq A$$

(Resultat von Minkowski), *sondern sogar mit*

$$f(x_1, \ldots, x_n) \leqq \frac{1}{2} \left(\frac{n+2}{2} \right)^{\frac{2}{n}} A.$$

[2]) H. F. Blichfeldt, A new principle in the geometry of numbers, with some applications. Transactions of the American Mathematical Society 15 (1914), S. 227—235.

[3]) R. Remak, Vereinfachung eines Blichfeldtschen Beweises aus der Geometrie der Zahlen, Mathematische Zeitschrift 26 (1927), S. 694—699.

Der Faktor $\frac{1}{2}\left(\frac{n+2}{2}\right)^{\frac{2}{n}}$, der bei unbeschränkt wachsendem n gegen $\frac{1}{2}$ strebt, hat für $n=2$, 3 und 4 die Werte 1, $\sqrt[3]{\frac{25}{32}}$ und $\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Ausserdem werden wir beweisen:

Satz 3: *Für $n \geqq 2$ seien $\xi_1, \ldots, \xi_n$ homogene Linearformen in $x_1, \ldots, x_n$ mit Determinante $\Delta \neq 0$; es gebe unter ihnen $2s$ Formen, die paarweise konjugiert komplexe Koeffizienten haben $(0 \leqq 2s \leqq n)$ und $r=n-2s$ Formen mit reellen Koeffizienten; σ bezeichne eine Zahl $\geqq 2$, und es sei*

$$B=\left(\frac{\left(\frac{2}{\pi}\right)^s \Gamma\left(1+\frac{n}{\sigma}\right)|\Delta|}{2^{-\frac{2s}{\sigma}}\Gamma^r\left(1+\frac{1}{\sigma}\right)\Gamma^s\left(1+\frac{2}{\sigma}\right)}\right)^{\frac{\sigma}{n}}.$$

Dann gibt es einen Gitterpunkt $x \neq (0, \ldots, 0)$ mit

$$|\xi_1|^\sigma+\ldots+|\xi_n|^\sigma \leqq \frac{1}{2}\left(\frac{n+\sigma}{\sigma}\right)^{\frac{\sigma}{n}} B.$$

In vielen Fällen ist dies schärfer als die Minkowskische Ungleichung

$$|\xi_1|^\sigma+\ldots+|\xi_n|^\sigma \leqq B.$$

Hilfssatz 1 mit Beweis und den Hauptgedanken des Beweises von Satz 1 entlehnen wir der in Fussnote [2]) genannten Arbeit von Herrn Remak. Der Beweis von Satz 3 stützt sich auf die folgende Ungleichung:

Satz 4: *Ist k ganz und $\geqq 1$, bezeichnen $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ komplexe Zahlen und ist $\sigma \geqq 2$, so ist*

$$\sum_{\varkappa=1}^{k}\sum_{\lambda=1}^{k}|\alpha_\varkappa-\alpha_\lambda|^\sigma \leqq 2^{\sigma-1} k \sum_{\varkappa=1}^{k}|\alpha_\varkappa|^\sigma.$$

Hilfssatz 1: *Sind $u_1, \ldots, u_n$ Veränderliche* (Koordinaten im n-dimensionalen Raume), *und ist $b(u_1, \ldots, u_n)$, abgekürzt $b(u)$, eine beschränkte, im Riemannschen Sinn integrierbare Funktion dieser Veränderlichen, die ausserhalb eines gegebenen beschränkten Bereiches verschwindet, so lässt sich ein Punkt $v=(v_1, \ldots, v_n)$ bestimmen mit*

$$\sum_{-\infty}^{\infty} b(v+x) \geqq \int_{-\infty}^{\infty} b(u)\,du, \tag{6}$$

wo die Summe über alle Gitterpunkte x des n-dimensionalen Raumes, und das Integral über den ganzen n-dimensionalen Raum erstreckt wird.

Beweis: Wäre beständig

$$\sum_{-\infty}^{\infty} b(v+x) < \int_{-\infty}^{\infty} b(u)\,du,$$

so wäre

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 dv_1 \ldots dv_n \sum_{-\infty}^{\infty} b(v_1+x_1, \ldots, v_n+x_n) < \int_{-\infty}^{\infty} b(u)\,du,$$

was unmöglich ist, da die zwei Seiten denselben Wert besitzen.

Hilfssatz 2: *Ist $t>0$ beliebig, so ist unter den Voraussetzungen von Satz* 1

$$b(u)=\operatorname{Max}(0, t-f(u))$$

eine beschränkte, im Riemannschen Sinn integrierbare Funktion, die ausserhalb eines gewisses beschränkten Bereiches verschwindet, mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} b(u)\,du=\frac{\sigma V}{n+\sigma} t^{1+\frac{n}{\sigma}}. \tag{7}$$

Beweis: Man hat $b(u) \leqq t$. Ist q die nach Voraussetzung positive untere Schranke von $f(u)$ auf der Kugel $u_1^2+\ldots+u_n^2=1$, so gilt für jeden Punkt u mit $u_1^2+\ldots+u_n^2 \geqq \left(\frac{t}{q}\right)^{\frac{2}{\sigma}}$ die Ungleichung

$$f(u) \geqq \frac{t}{q}\cdot q=t,$$

also $b(u)=0$.

Es braucht noch die Integrierbarkeit mit (7) beweisen zu werden. Wird das Intervall $(0, t)$ durch die Punkte $t_1, \ldots, t_{l-1}$ in Teilintervalle

$$t_0=0<t_1<\ldots<t_{l-1}<t_l=t$$

zerlegt, so ist für $\lambda = 1, \dots, l$

$$\int\limits_{t_{\lambda-1}<f(u)\leqq t_\lambda} du = \int\limits_{f(u)\leqq t_\lambda} - \int\limits_{f(u)\leqq t_{\lambda-1}} = V\left(t_\lambda^{\frac{n}{\sigma}} - t_{\lambda-1}^{\frac{n}{\sigma}}\right),$$

also

$$V t_{\lambda-1}\left(t_\lambda^{\frac{n}{\sigma}} - t_{\lambda-1}^{\frac{n}{\sigma}}\right) \leqq \underline{\int\limits_{t_{\lambda-1}<f(u)\leqq t_\lambda}} f(u)\, du \leqq \overline{\int\limits_{t_{\lambda-1}<f(u)\leqq t_\lambda}} f(u)\, du \leqq V t_\lambda \left(t_\lambda^{\frac{n}{\sigma}} - t_{\lambda-1}^{\frac{n}{\sigma}}\right),$$

woraus folgt

$$V\sum_{\lambda=1}^{l} t_{\lambda-1}\left(t_\lambda^{\frac{n}{\sigma}} - t_{\lambda-1}^{\frac{n}{\sigma}}\right) \leqq \underline{\int\limits_{f(u)\leqq t}} f(u)\, du \leqq \overline{\int\limits_{f(u)\leqq t}} f(u)\, du \leqq V\sum_{\lambda=1}^{l} t_\lambda\left(t_\lambda^{\frac{n}{\sigma}} - t_{\lambda-1}^{\frac{n}{\sigma}}\right).$$

Wächst l unbeschränkt und zwar so, dass die grösste der Zahlen $t_\lambda - t_{\lambda-1}$ $(1 \leqq \lambda \leqq l)$ gegen Null strebt, so streben die äusseren Seiten dieser Ungleichung gegen

$$V\int_0^t t' \cdot \frac{n}{\sigma} t'^{\frac{n}{\sigma}-1}\, dt' = \frac{nV}{n+\sigma} t^{1+\frac{n}{\sigma}}.$$

Folglich ist

$$\int\limits_{f(u)\leqq t} f(u)\, du = \frac{nV}{n+\sigma} t^{1+\frac{n}{\sigma}},$$

also

$$\int_{-\infty}^{\infty} b(u)\, du = \int\limits_{f(u)\leqq t} (t - f(u))\, du$$

$$= V t^{1+\frac{n}{\sigma}} - \frac{nV}{n+\sigma} t^{1+\frac{n}{\sigma}} = \frac{\sigma V}{n+\sigma} t^{1+\frac{n}{\sigma}}.$$

Hiermit ist die Integrierbarkeit und zugleich (7) bewiesen.

Beweis von Satz 1.

Wir wählen eine Zahl

(8) $$t > \left(\frac{n+\sigma}{\sigma V}\right)^{\frac{\sigma}{n}}.$$

In der Bezeichnung der Hilfssätze 1 und 2 gilt Ungleichung (6) bei geeignet gewähltem v. Wegen Hilfssatz 2 geht diese über in

$$kt - \sum_{\varkappa=1}^{k} f(y^{(\varkappa)} + v) \geqq \frac{\sigma V}{n+\sigma} t^{1+\frac{n}{\sigma}},$$

wo $y', \dots, y^{(k)}$ die verschiedenen Gitterpunkte mit $f(y^{(\varkappa)} + v) \leqq t$ bezeichnen. Hieraus folgt wegen (8)

$$\sum_{\varkappa=1}^{k} f(y^{(\varkappa)} + v) < (k-1)\, t,$$

also $k \geqq 2$. Nach den Voraussetzungen des zu beweisenden Satzes ist daher wenigstens eine der $k(k-1)$ Zahlen $f(y^{(\varkappa)} - y^{(\lambda)})$ $(1 \leqq \varkappa \leqq k,$ $1 \leqq \lambda \leqq k,$ $\varkappa \neq \lambda)$ kleiner als ct, sodass die Existenz eines Gitterpunktes $x \neq (0, \dots, 0)$ mit $f(x) < ct$ nachgewiesen ist. Bezeichnet q die positive untere Schranke von $f(u)$ auf der Kugel $u_1^2 + \dots + u_n^2 = 1$, so ist stets

$$f(x) \geqq q(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}\sigma};$$

der Gitterpunkt $x \neq (0, \dots, 0)$ mit $f(x) < ct$ liegt also innerhalb der Kugel

$$u_1^2 + \dots + u_n^2 < \left(\frac{ct}{q}\right)^{\frac{2}{\sigma}}.$$

Dieses Resultat gilt für jedes t mit (8), und folglich gibt es wenigstens einen Gitterpunkt $x \neq (0, \dots, 0)$ mit $f(x) \leqq c\left(\frac{n+\sigma}{\sigma V}\right)^{\frac{\sigma}{n}}$.

Beweis von Satz 2.

Die positiv definite quadratische Form f kann auf die Gestalt $\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2$ gebracht werden, wo $\xi_1, \dots, \xi_n$ reelle Linearformen in $u_1, \dots, u_n$ sind. Aus

$$\sum_{\varkappa=1}^{k} \sum_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda\neq\varkappa}}^{k} (\beta_\varkappa - \beta_\lambda)^2 = \sum_{\varkappa=1}^{k} \sum_{\lambda=1}^{k} (\beta_\varkappa^2 + \beta_\lambda^2 - 2\beta_\varkappa\beta_\lambda) =$$

$$= 2k\sum_{\varkappa=1}^{k} \beta_\varkappa^2 - 2\left(\sum_{\varkappa=1}^{k} \beta_\varkappa\right)^2 \leqq 2k\sum_{\varkappa=1}^{k} \beta_\varkappa^2$$

folgt also

$$\sum_{\varkappa=1}^{k}\sum_{\lambda\neq\varkappa}^{k} f(u^{(\varkappa)}-u^{(\lambda)}) \leqq 2k\sum_{\varkappa=1}^{k} f(u^{(\varkappa)}),$$

so dass wenigstens eines der $k(k-1)$ links auftretenden Glieder $f(u^{(\varkappa)}-u^{(\lambda)})$ $(\varkappa\neq\lambda)$

$$\leqq \frac{2}{k-1}\sum_{\varkappa=1}^{k} f(u^{(\varkappa)})$$

ist. Folglich kann Satz 1 mit $\sigma=2$ und $c=2$ angewendet werden, und es folgt Satz 2.

Hilfssatz 3: *Für $x>0$, reelles α und $p\geqq 1$ gilt die Ungleichung*

$$\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4\sin^2\alpha\right\}^p \leqq 2^{2p-2}\left\{\left(x^p-\frac{1}{x^p}\right)^2+4\sin^2\alpha\right\}.$$

Bemerkung: Wegen

$$|\sin(\sigma+it)|^2=\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2+\sin^2\sigma$$

folgt aus diesem Hilfssatz für $p\geqq 1$, reelles σ und reelles t

$$|\sin(\sigma+it)|^p\leqq|\sin(\sigma+ipt)|.$$

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $x\geqq 1$ voraussetzen, da wir sonst nur x durch $\frac{1}{x}$ zu ersetzen brauchen. Es sei $c\geqq 0$ und die Funktion

$$F=\left(x^p-\frac{1}{x^p}\right)^2+4\sin^2\alpha$$

werde betrachtet für die $x\geqq 1$ und die reellen α mit

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4\sin^2\alpha=c.$$

Dann ist

$$F=\left(x^p-\frac{1}{x^p}\right)^2-\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+c.$$

Als Funktion von x ist F monoton nichtabnehmend, da seine Derivierte

$$\frac{2p}{x}\left(x^{2p}-\frac{1}{x^{2p}}\right)-\frac{2}{x}\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)$$

wegen $p\geqq 1$ und $x\geqq 1$ stets $\geqq 0$ ist. Folglich ist F für die genannten x und α dann möglichst klein, wenn x möglichst klein, also $x-\frac{1}{x}$ möglichst klein ist. Ist $c\leqq 4$, so tritt dies für $x=1$ ein und dann gilt die Behauptung. Ist $c>4$, so ist F für die betrachteten x und α möglichst klein, falls $\sin^2\alpha=1$ ist. Dann geht die zu beweisende Ungleichung über in die triviale

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2p}\leqq 2^{2p-2}\left(x^p+\frac{1}{x^p}\right)^2.$$

Hilfssatz 4: *Ist $p\geqq 1$, $x=\xi e^{i\varphi}$ und $y=\eta e^{i\psi}$ mit $\xi\geqq 0$ und $\eta\geqq 0$, so ist*

$$|x-y|^{2p}\leqq 2^{2p-2}|\xi^p e^{i\varphi}-\eta^p e^{i\psi}|^2.$$

Beweis: Diese Ungleichung kann auf die Gestalt

$$\left\{(\xi-\eta)^2+4\xi\eta\sin^2\frac{1}{2}(\varphi-\psi)\right\}^p\leqq 2^{2p-2}\left\{(\xi^p-\eta^p)^2+4\xi^p\eta^p\sin^2\frac{1}{2}(\varphi-\psi)\right\}$$

gebracht werden. Für $\xi=0$ und auch für $\eta=0$ ist die Ungleichung evident. Sonst liefert der vorige Hilfssatz, mit $x=\sqrt{\frac{\xi}{\eta}}$ und $\alpha=\frac{1}{2}(\varphi-\psi)$ angewendet, unmittelbar die Behauptung.

Hilfssatz 5: *Ist $k\geqq 1$ und bezeichnen $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ komplexe Zahlen, so ist*

$$\sum_{\nu=1}^{k}\sum_{\lambda=1}^{k}|\alpha_\varkappa-\alpha_\lambda|^2\leqq 2k\sum_{\varkappa=1}^{k}|\alpha_\varkappa|^2.$$

Beweis: Ist $\alpha_\varkappa=x_\varkappa+iy_\varkappa$ $(\varkappa=1,\ldots,k)$, so gilt

$$\sum_{\varkappa=1}^{k}\sum_{\lambda=1}^{k}|\alpha_\varkappa-\alpha_\lambda|^2=\sum_{\varkappa=1}^{k}\sum_{\lambda=1}^{k}\{(x_\varkappa-x_\lambda)^2+(y_\varkappa-y_\lambda)^2\}$$

$$=2k\sum_{\varkappa=1}^{k}(x_\varkappa^2+y_\varkappa^2)-2\left(\sum_{\varkappa=1}^{k}x_\varkappa\right)^2-2\left(\sum_{\varkappa=1}^{k}y_\varkappa\right)^2$$

$$\leqq 2k\sum_{\varkappa=1}^{k}|\alpha_\varkappa|^2.$$

Beweis von Satz 4.

Wird

$$\alpha_\varkappa = \rho_\varkappa (\cos \varphi_\varkappa + i \sin \varphi_\varkappa) \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k)$$

gesetzt, so ist nach Hilfssatz 4 $\left(\text{mit } p = \frac{1}{2}\sigma \text{ angewendet}\right)$

$$\sum_{\varkappa=1}^{k} \sum_{\lambda=1}^{k} |\alpha_\varkappa - \alpha_\lambda|^\sigma \leqq 2^{\sigma-2} \sum_{\varkappa=1}^{k} \sum_{\lambda=1}^{k} \left| \rho_\varkappa^{\frac{1}{2}\sigma} e^{i\varphi_\varkappa} - \rho_\lambda^{\frac{1}{2}\sigma} e^{i\varphi_\lambda} \right|^2$$

$$\leqq 2^{\sigma-1} k \sum_{\varkappa=1}^{k} \rho_\varkappa^\sigma$$

nach Hilfssatz 5.

Beweis von Satz 3.

Wird

$$f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) = |\xi_1|^\sigma + \ldots + |\xi_n|^\sigma$$

gesetzt, so folgt aus Satz 4 für jedes ganze $k > 1$ und für jede Wahl der k Systeme $u^{(\varkappa)} = (u_1^{(\varkappa)}, \ldots u_n^{(\varkappa)})$ $(\varkappa = 1, \ldots, k)$ die Ungleichung

$$\sum_{\varkappa=1}^{k} \sum_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda \neq \varkappa}}^{k} f(u^{(\varkappa)} - u^{(\lambda)}) \leqq 2^{\sigma-1} k \sum_{\varkappa=1}^{k} f(u^{(\varkappa)}),$$

so dass wenigstens eines der $k(k-1)$ links auftretenden Glieder $f(u^{(\varkappa)} - u^{(\lambda)})$ $(\varkappa \neq \lambda)$

$$\leqq \frac{2^{\sigma-1}}{k-1} \sum_{\varkappa=1}^{k} f(u^{(\varkappa)})$$

ist. Wir können also Satz 1 mit $c = 2^{\sigma-1}$ anwenden, sodass Satz 3 folgt.

(Eingegangen am 20. Februar 1936.)
