It should be noted, however, that the existence of a zeta function for a sub-set of finite basis is independent of the existence of such a function for the whole set. In order to define an analog of $\zeta(s; P)$ we only need to have $|\alpha| > 1$ for $\alpha \neq 0$ in the sub-set. It follows that it is possible to obtain estimates for $f(\alpha)$ in terms of $|\alpha|$ in other cases than those mentioned above.

Finally it is possible to extend some of these considerations to the case of non-commutative rings.

(Received June 4, 1936.)

Verallgemeinerung einer Mordellschen Beweismethode in der Geometrie der Zahlen.

Zweite Mitteilung.

Von

J. G. van der Corput (Groningen).

Satz 7. *Ist M eine im n-dimensionalen Raum liegende Menge vom Volumen $V > k_0 k_1 \dots k_n$, wo $k_0, k_1, \dots, k_n$ positive Zahlen bedeuten, und hat jedes zu M gehörige Punktepaar $(u_1, \dots, u_n)$ und $(u_1', \dots, u_n')$ die Eigenschaft, dass der Punkt $\left(\frac{u_1 - u_1'}{k_1}, \dots, \frac{u_n - u_n'}{k_n}\right)$ einer gewissen Menge N angehört, so enthält N ausser dem Koordinatenursprung mehr als $k_0 - 1$ verschiedene Gitterpunkte $(v_1, \dots, v_n)$, die der Bedingung genügen, dass die erste nicht verschwindende der Zahlen $v_1, \dots, v_n$ positiv ist.*

Der Beweis ist genau dem in der ersten Mitteilung[1]) gegebenen Beweis von Satz 1 analog und verläuft wie folgt: Ist A_l für ganzes $l > 0$ die Anzahl der Punkte $\left(\frac{k_1 u_1}{l}, \dots, \frac{k_n u_n}{l}\right)$ von M mit ganzen $u_1, \dots, u_n$, so strebt $\frac{A_l}{l^n}$ bei unbeschränkt wachsendem l nach $\frac{V}{k_1 k_2 \dots k_n}$. Wegen $V > k_0 k_1 \dots k_n$ ist somit $A_l > k_0 l^n$ bei hinreichend grossem l. Die betrachteten Punkte $(u_1, \dots, u_n)$ gehören zu höchstens l^n verschiedenen Restklassen mod l, so dass wenigstens eine dieser Restklassen mindestens m verschiedene dieser A_l Punkte enthält; hierbei ist m die kleinste

1) Acta Arithmetica, **1** (1935), S. 62—66.

ganze Zahl $>k_0$. Diese m Punkte nenne ich $(u_1^{(\mu)}, \ldots, u_n^{(\mu)})$ $(\mu = 1, 2, \ldots, m)$; ich wähle dabei $(u_1', \ldots, u_n')$ so, dass für jedes ganze $\mu \geqq 2$ und $\leqq m$ die erste nicht verschwindende der Zahlen

$$v_1^{(\mu)} = \frac{u_1^{(\mu)} - u_1'}{l}, \ldots, v_n^{(\mu)} = \frac{u_n^{(\mu)} - u_n'}{l}$$

positiv ist. Für $\mu = 2, \ldots, m$ ist dann $(v_1^{(\mu)}, \ldots, v_n^{(\mu)})$ ein nicht mit dem Koordinatenursprung zusammenfallender Gitterpunkt, der, da $\left(\frac{k_1 u_1^{(\mu)}}{l}, \ldots, \frac{k_n u_n^{(\mu)}}{l}\right)$ und $\left(\frac{k_1 u_1'}{l}, \ldots, \frac{k_n u_n'}{l}\right)$ zu M gehören, der Menge N angehört. Hiermit ist Satz 7 bewiesen.

Dieser Satz liefert u. a. Satz 1 der ersten Mitteilung (man setze $k_0 = 1$) und die Blichfeldtsche Behauptung [2]): ein im n-dimensionalen Raum liegender konvexer Körper M mit Volumen $V > 2^n k$ und mit einem Mittelpunkt im Koordinatenursprung enthält ausser diesem Mittelpunkt mehr als $k-1$ Paare Gitterpunkte (man wähle $k_1 = \ldots = k_n = 2$; $k_0 = k$ und $N = M$).

Ist die Menge N beschränkt und abgeschlossen, so darf in Satz 7 die Voraussetzung $V > k_0 k_1 \ldots k_n$ durch $V \geqq k_0 k_1 \ldots k_n$ ersetzt werden.

(Eingegangen am 16. November 1935.)

---

[2]) H. F. Blichfeldt, Notes on geometry of numbers, Bull. Amer. Math. Soc 27 (1921), S. 150, 152 — 153.

On sequences of positive integers.

By

H. Davenport (Cambridge) and P. Erdös (Manchester).

1. Let $a_1, a_2, \ldots$ be any sequence of (different) positive integers, and let $b_1, b_2, \ldots$ be the sequence consisting of all positive integers which are divisible by at least one a. We define

$$A_1 = \frac{1}{a_1},$$

$$A_2 = \frac{1}{a_2} - \frac{1}{[a_1, a_2]},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_\nu = \frac{1}{a_\nu} - \sum_{\mu<\nu} \frac{1}{[a_\mu, a_\nu]} + \sum_{\lambda<\mu<\nu} \frac{1}{[a_\lambda, a_\mu, a_\nu]} - \ldots,$$

where $[a, b, c, \ldots]$ denotes the least common multiple of $a, b, c, \ldots$ Then A_ν is easily seen to be the density of those integers which are divisible by a_ν but not by any one of $a_1, \ldots, a_{\nu-1}$. Hence $A_\nu \geqq 0$, and $\sum_1^m A_\nu$, being the density of those integers which are divisible by at least one of $a_1, \ldots, a_m$, is less than 1. If we define

$$A = \sum_1^\infty A_\nu$$

then $0 < A \leqq 1$, and it is reasonable to expect that A is the density