Über einen Satz von A. Khintchine.
Zweite Mitteilung[1]).

Von

Vojtěch Jarník (Praha).

§ 1. Einleitung.

Es sei s ganz, $s \geqq 1$; es seien $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ reelle Zahlen[2]). Dann gelten folgende wohlbekannte Sätze, die sehr einfach mit Hilfe des Dirichletschen Fächerprinzips zu beweisen sind:

I. Es gibt unendlichviele verschiedene Systeme ganzer Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_s, x_{s+1}$ mit

$$x = \operatorname{Max}(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_s|) > 0, \left|\sum_{i=1}^{s} x_i \theta_i + x_{s+1}\right| < \frac{1}{x^s}.$$

II. Es gibt unendlichviele verschiedene Systeme ganzer Zahlen $p_1, p_2, \ldots, p_s, q$ mit

$$q > 0, \left|\theta_i - \frac{p_i}{q}\right| < \frac{1}{q^{1+\frac{1}{s}}} \quad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

Wir führen nun folgende Definition ein: *Gegeben sei ein System θ_1, $\theta_2, \ldots, \theta_s$ von reellen Zahlen* $(s \geqq 1)$. *Dann sei*

---

1) Die erste Mitteilung ist in Prace Matematyczno-Fizyczne **43** (1936), S. 151—166 erschienen; die vorliegende Abhandlung ist ganz unabhängig von der 1. Mitteilung lesbar.

2) Alle Zahlen dieser Abhandlung sind reell; nur die Zahlen $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ im Beweis des Hauptsatzes für $\beta = 0$ brauchen nicht reell zu sein.

$$\beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$$

die obere Grenze derjenigen Zahlen α, *für welche die Ungleichungen*

$$x = \operatorname{Max}(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_s|) > 0, \left| \sum_{i=1}^{s} x_i \theta_i + x_{s+1} \right| < \frac{1}{x^{s+\alpha}}$$

unendlichviele Lösungen in ganzen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_s, x_{s+1}$ *besitzen. Analog sei*

$$\beta_2(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$$

die obere Grenze derjenigen Zahlen α, *für welche die Ungleichungen*

$$q > 0, \left| \theta_i - \frac{p_i}{q} \right| < \frac{1}{q^{1+\frac{1+\alpha}{s}}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, s)$$

unendlichviele Lösungen in ganzen Zahlen $p_1, p_2, \ldots, p_s, q$ *besitzen.*

Nach den angeführten Sätzen ist stets

$$0 \leqq \beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) \leqq \infty, \quad 0 \leqq \beta_2(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) \leqq \infty.$$

Für $s = 1$ ist trivialerweise $\beta_1(\theta_1) = \beta_2(\theta_1)$; für $s > 1$ hat Herr A. Khintchine bewiesen[3]): stets ist

$$(1) \qquad \beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) \geqq \beta_2(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s),$$

$$(2) \qquad \beta_2(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) \geqq \frac{\beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)}{(s-1)\beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) + s^2}. \text{ [4])}$$

In der ersten Mitteilung habe ich bewiesen, dass die Ungleichung (2) für jeden vorgeschriebenen Wert von $\beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ scharf ist; hier soll dasselbe für die Ungleichung (1) bewiesen werden. Unser Ziel ist also gegeben durch den folgenden

Hauptsatz. *Es sei* s *ganz,* $s > 1$, $0 \leqq \beta \leqq \infty$. *Dann gibt es ein System reeller Zahlen* $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ *mit*

$$\beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = \beta_2(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = \beta.$$

Um dem Leser das Nachschlagen zu ersparen, reproduziere ich zu-

[3]) A. Khintchine, Über eine Klasse linearer diophantischer Approximationen, Palermo-Rendiconti **50** (1926), 170—195; vgl. insb. S. 189—195.

[4]) Dabei soll

$$\frac{\infty}{(s-1)\infty + s^2} = \frac{1}{s-1}$$

gesetzt werden.

nächst den einfachen Beweis von (1)[5]). Es sei also $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ ein System von s $(s > 1)$ reellen Zahlen. Gilt eine Beziehung

$$\sum_{i=1}^{s} x_i \theta_i + x_{s+1} = 0$$

mit ganzen, nicht sämtlich verschwindenden Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_s, x_{s+1}$, so ist offenbar $\beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = \infty$, also (1) wahr. Sonst sei $-s < \beta < \beta_2(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$. Ist $c > 0$, so gibt es ganze Zahlen $p_1, p_2, \ldots, p_s, q$ mit

$$q > c, \left| \theta_i - \frac{p_i}{q} \right| < \frac{1}{q^{1+\frac{1+\beta}{s}}}.$$

Nach dem Dirichletschen Fächerprinzip kann man leicht schliessen, dass die Kongruenz

$$\sum_{i=1}^{s} p_i x_i \equiv 0 \pmod{q}$$

mindestens eine Lösung in ganzen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_s$ mit

$$0 < x = \operatorname{Max}(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_s|) \leqq q^{\frac{1}{s}}$$

besitzt; bei geeignetem ganzen x_{s+1} ist also

$$\sum_{i=1}^{s} \frac{p_i}{q} x_i + x_{s+1} = 0,$$

$$(3) \qquad \left| \sum_{i=1}^{s} x_i \theta_i + x_{s+1} \right| < \frac{s\,x}{q^{1+\frac{1+\beta}{s}}} \leqq \frac{s}{x^{s+\beta}}.$$

Für $c \to \infty$ strebt die nichtverschwindende linke Seite von (3) gegen Null, also durchläuft das System $x_1, x_2, \ldots, x_s$ unendlichviele verschiedene Systeme, also ist $\beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_s) \geqq \beta$ für jedes $\beta < \beta_2(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$, also gilt (1).

Wir wollen noch gleich zwei einfache Fälle des Hauptsatzes erledigen. Für $\theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_s = 1$ ist $\beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = \beta_2(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = \infty$, also ist der Hauptsatz wahr für $\beta = \infty$. [6])

[5]) Schwieriger ist der Beweis von (2). Umgekehrt, der Beweis, dass diese Ungleichungen scharf sind, scheint mir für (1) schwieriger zu sein als für (2).

[6]) Man kann sogar auch *linear unabhängige* Zahlen $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ mit $\beta_2(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = \infty$ (also $\beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = \infty$) konstruieren; vgl. O. Perron, Über diophantische Approximationen, Math. Annalen **83** (1921), 77—84.

Aber auch für $\beta=0$ ist der Hauptsatz bereits bekannt und leicht zu beweisen; wir geben hier einen einfachen Beweis, dessen Grundgedanke einer wichtigen Abhandlung des Herrn O. Perron [7]) entnommen ist. Es sei θ_0 eine reelle ganze algebraische Zahl $(s+1)$-ten Grades; $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ seien die zu θ_0 konjugierten Zahlen; es sei

$$M=\operatorname{Max}(1, |\theta_0|, |\theta_1|, \ldots, |\theta_s|), \quad a=(3\,s\,M^s)^{-s}.$$

Sind dann $x_1, x_2, \ldots, x_s, x_{s+1}$ ganze Zahlen mit $0<x=\operatorname{Max}(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_s|)$, so ist

$$\left|\sum_{i=1}^{s} x_i\,\theta_0^{\,i}+x_{s+1}\right| \geqq \frac{a}{x^s}. \tag{4}$$

Denn sonst wäre

$$\left|\sum_{i=1}^{s} x_i\,\theta_0^{\,i}+x_{s+1}\right| < \frac{a}{x^s},$$

also

$$|x_{s+1}| < s\,x\,M^s+1 < 2\,s\,x\,M^s,$$

also

$$\left|\sum_{i=1}^{s} x_i\,\theta_j^{\,i}+x_{s+1}\right| < 3\,s\,x\,M^s \quad \text{für } j=1, 2, \ldots, s,$$

also

$$\left|\prod_{j=0}^{s}\left(\sum_{i=1}^{s} x_i\,\theta_j^{\,i}+x_{s+1}\right)\right| < a\,(3\,s\,M^s)^s=1;$$

das geht aber nicht, da die linke Seite eine ganze rationale Zahl ist und nicht Null sein kann. Damit ist (4) bewiesen, also ist $\beta_1(\theta_0, \theta_0^2, \ldots, \theta_0^s)=0$, also nach (1) auch $\beta_2(\theta_0, \theta_0^2, \ldots, \theta_0^s)=0$.

Es genügt uns also, den Hauptsatz für $0<\beta<\infty$ zu beweisen. Der Beweis wird etwa folgendermassen geführt: Die Systeme $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ werden als Punkte eines s-dimensionalen cartesischen Raumes aufgefasst. Dann wird erstens eine im Würfel $0<\theta_i<1$ $(i=1, 2, \ldots, s)$ enthaltene abgeschlossene Menge E konstruiert, so dass für jeden Punkt von E die Ungleichung

$$\beta_2(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) \geqq \beta$$

gilt; zweitens wird eine Menge E_1 konstruiert (im folgenden wird sie mit $P_2+P_3+P_4+\ldots$ bezeichnet), welche alle diejenigen Punkte des Würfels $0<\theta_i<1$ $(i=1, 2, \ldots, s)$ enthält, für welche

[7]) L. c. [6]).

$$\beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) > \beta$$

ist und schliesslich wird bewiesen, dass $E-E_1 \neq 0$ ist d. h., dass es einen Punkt von E gibt, der E_1 nicht angehört. Damit wird der Beweis fertig sein, denn für jeden Punkt aus $E-E_1$ ist $\beta_2(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) \geqq \beta \geqq \beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$, also nach (1) $\beta_2(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)=\beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)=\beta$.

Die bei dem Beweis benutzten Hilfsmittel sind äusserst elementar; der Beweis selbst ist aber nicht ganz einfach.

§ 2. Konstruktion der Menge E.

Bis zum Schluss dieser Abhandlung sind fest gegeben: eine ganze Zahl $s>1$ und eine Zahl $\beta>0$. Mit k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 bezeichnen wir positive absolute Konstanten, mit c_1, c_2 positive Zahlen, die nur von s abhängen.

Der wichtigste Punkt dieses Paragraphen ist der Hilfssatz 3, dessen Grundgedanke von Herrn A. Khintchine [8]) stammt; ich habe übrigens schon einmal einen verwandten Hilfssatz benutzt [9]). Die Hilfssätze 1, 2 sind trivial.

Hilfssatz 1. *Man kann die natürlichen Zahlen k_1 und k_2 derart bestimmen, dass es zu jedem $Q>k_1$ eine Primzahl $\mathfrak{q}$ mit $2Q<\mathfrak{q}<k_2 Q$ gibt.*

Beweis. Ist π_r die r-te Primzahl, so ist bekanntlich

$$k_3\, r \log r < \pi_r < k_4\, r \log r \tag{5}$$

für $r=2, 3, \ldots$ [10]). Wird

$$k_1 > k_3 \log 2, \quad k_2 > 3\,\frac{k_4 \log 3}{k_3 \log 2}$$

gewählt und ist $Q>k_1$, so gibt es ein ganzes $r \geqq 3$ mit

$$k_3 (r-1) \log (r-1) \leqq 2Q < k_3\, r \log r;$$

dann gilt (5), also

$$2Q < \pi_r < k_4\, r \log r \leqq 2Q\,\frac{k_4\, r \log r}{k_3 (r-1) \log (r-1)} \leqq k_2\, Q.$$

[8]) A. Khintchine, Zur metrischen Theorie der diophantischen Approximationen, Math. Zeitschr **24** (1926), 706—714, vgl. insb. den Hilfssatz 3.

[9]) V. Jarník, Über die simultanen diophantischen Approximationen, Math. Zeitschr. **33** (1931), 505—543, Hilfssatz 3.

[10]) (5) lässt sich elementar beweisen; vgl. z. B. E. Landau, Vorlesungen über Zahlentheorie I (Leipzig 1927), S. 68, Satz 113; den wesentlich tiefer liegenden Primzahlsatz brauchen wir nicht.

Für ganzes $h>0$ sei $\varphi(h)$ die Anzahl der zu h teilerfremden Restklassen modulo h. Ist $\varphi(h)>\frac{h}{8}$, so heisse die Zahl h „normal".

Hilfssatz 2. *Es gibt eine ganze Zahl $k_5>0$, so dass für jedes ganze $n\geqq k_5$ sich unter den Zahlen $n, n+1, n+2, \dots, 2n-1$ mindestens $\frac{n}{5}$ normale Zahlen befinden.*

Beweis. Bekanntlich ist[11])

$$\sum_{h=1}^{n-1}\varphi(h)=\frac{3}{\pi^2}n^2+O(n\log n);$$

wegen $\frac{1}{4}<\frac{3}{\pi^2}<\frac{1}{3}$ gibt es ein ganzes $k_5>0$, so dass für jedes ganze $n\geqq k_5$ gilt

$$\sum_{h=n}^{2n-1}\varphi(h)>\frac{1}{4}(2n)^2-\frac{1}{3}n^2=\frac{2}{3}n^2. \tag{6}$$

Wäre nun die Behauptung für ein ganzes $n\geqq k_5$ falsch, so wäre (wegen $\varphi(h)\leqq h$)

$$\sum_{h=n}^{2n-1}\varphi(h)<\frac{n}{5}\cdot 2n+\frac{1}{8}\cdot 2n\cdot n=\frac{13}{20}n^2<\frac{2}{3}n^2,$$

im Widerspruch zu (6).

Hilfssatz 3. *Es gibt zwei Zahlen $c_1>0$, $c_2>0$ und eine nur von s und Q abhängige Zahl $d(Q)>0$ mit folgender Eigenschaft:*

Ist $Q>c_1$, $z>d(Q)$ und sind $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ reelle Zahlen, so gibt es im s-dimensionalen cartesischen Raume der Punkte $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s)$ eine endliche Punktmenge

$$\mathfrak{M}=\mathfrak{M}(s, Q, z, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$$

mit folgenden Eigenschaften: ist N die Anzahl der Punkte von $\mathfrak{M}$ und sind $P_1, P_2, \dots, P_N$ die Punkte von $\mathfrak{M}$, so gilt:

1. *Jeder Punkt P_n $(1\leqq n\leqq N)$ hat die Gestalt $P_n=\left(\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}, \dots, \frac{p_s}{q}\right)$, wo jede Zahl p_i $(i=1, 2, \dots, s)$ ganz und zu der ganzen Zahl q teilerfremd ist; dabei ist*

$$z\leqq q\leqq k_2 z Q^{\frac{1}{s+1}}. \tag{7}$$

2. *Konstruiert man um jeden Punkt P_n $(n=1, 2, \dots, N)$ einen abgeschlossenen Würfel*[12]) *von der Kantenlänge $z^{-\frac{s+1}{s}}$, so sind diesen Würfel paarweise fremd und liegen alle im Würfel*

$$\frac{\alpha_i}{Q}\leqq\theta_i\leqq\frac{\alpha_i+1}{Q}\ (i=1, 2, \dots, s). \tag{8}$$

3.
$$N>c_2\frac{z^{s+1}}{Q^s}. \tag{9}$$

Beweis. Wir wählen erstens c_1 so, dass

$$c_1>(3\cdot 32\cdot 2\cdot 3)^{s+1}>16,\ c_1>k_1\,^{13}). \tag{10}$$

Zu jedem $Q>c_1$ wählen wir ein $d(Q)$, so dass für $z>d(Q)$ folgendes gilt:

$$\left\{\begin{array}{l} z>k_2k_5Q;\ z^{\frac{1}{s}}>\dfrac{(k_2Q)^{\frac{1}{s+1}}}{32\cdot 2\cdot 3}; \\ \dfrac{1}{3\cdot 32\cdot 2\cdot 3}\cdot\dfrac{z}{(k_2Q)^{\frac{s}{s+1}}}>\operatorname{Max}(k_5, k_2Q); \end{array}\right. \tag{11}$$

endlich setzen wir

$$c_2=\left(\frac{1}{3\cdot 32\cdot 2\cdot 3}\right)^{s+1}\cdot\frac{1}{10\,k_2^{\,s}}\cdot\frac{1}{16^s}. \tag{12}$$

Es sei nun $Q>c_1$, $z>d(Q)$ und es seien $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ reelle Zahlen. Man wähle zunächst eine Primzahl $\mathfrak{q}$ mit

$$2Q<\mathfrak{q}<k_2Q \tag{13}$$

(vgl. (10) und Hfs. 1) und man setze

$$b=\left[\frac{1}{3\cdot 32\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{z}{\mathfrak{q}^{\frac{s}{s+1}}}\right]; \tag{14}$$

nach (11), (13), (14) ist (k_5 ist ganz!)

[11]) F. Mertens, Über einige asymptotische Gesetze der Zahlentheorie, Journ. f. d. reine u. angew. Math. 77 (1874), 289—338, insbes. S. 289—291.

[12]) Unter einem Würfel verstehe ich stets einen s-dimensionalen Würfel, dessen Kanten den Koordinatenachsen parallel sind.

[13]) Der Punkt bedeutet stets das Multiplikationszeichen.

$$(15)\qquad b \geqq k_5 \geqq 1,\ b+1 > k_2 Q > \mathfrak{q},\ 2b+1 \leqq 3b \leqq \frac{1}{32\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{z}{\mathfrak{q}^{\frac{s}{s+1}}}.$$

Wegen $\frac{\mathfrak{q}}{Q} > 2$ gibt es ganze Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_s$ mit

$$\alpha_i \frac{\mathfrak{q}}{Q} < a_i < a_i + 1 < (\alpha_i + 1)\frac{\mathfrak{q}}{Q},$$

also

$$(16)\qquad \frac{\alpha_i}{Q} < \frac{a_i}{\mathfrak{q}} < \frac{a_i+1}{\mathfrak{q}} < \frac{\alpha_i+1}{Q}\ (i = 1, 2, \ldots, s).$$

Es sei nun $\mathfrak{B}$ die Menge aller Punkte

$$(17)\qquad \left(\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}, \ldots, \frac{p_s}{q}\right),$$

welche folgende Eigenschaften besitzen:

1.) $q = \bar{q}\mathfrak{q}$, $\bar{q}$ ganz,

$$(18)\qquad b+1 \leqq \bar{q} \leqq 2b+1.$$

2.) Jede Zahl $p_i\,(i = 1, 2, \ldots, s)$ ist ganz und zu q teilerfremd.

3.)

$$(19)\qquad \frac{a_i}{\mathfrak{q}} \leqq \frac{p_i}{q} < \frac{a_i+1}{\mathfrak{q}}\ (i = 1, 2, \ldots, s).$$

Da $(p_i, q) = 1$, $q = \bar{q}\mathfrak{q} > \mathfrak{q}$, so kann man statt (19) auch

$$(20)\qquad \frac{a_i}{\mathfrak{q}} < \frac{p_i}{q} < \frac{a_i+1}{\mathfrak{q}}\ (i = 1, 2, \ldots, s)$$

schreiben [14]).

Wir bemerken zuerst: aus (18), (15), (13), (11) folgt

$$(21)\qquad \frac{1}{q} = \frac{1}{\bar{q}\mathfrak{q}} \geqq \frac{1}{(2b+1)\mathfrak{q}} \geqq \frac{32\cdot 2\cdot 3}{z\,\mathfrak{q}^{\frac{1}{s+1}}} > \frac{1}{z^{\frac{s+1}{s}}}.$$

Konstruiert man also um jeden Punkt von $\mathfrak{B}$ als Mittelpunkt einen abgeschlossenen Würfel von der Kante $z^{-\frac{s+1}{s}}$, so sind wegen (16), (20), (21) alle diese Würfel im Würfel (8) enthalten. Weiter folgt aus (18), (14), (15), (13), (10):

$$z < z\frac{c_1^{\frac{1}{s+1}}}{3\cdot 32\cdot 2\cdot 3} < z\frac{\mathfrak{q}^{\frac{1}{s+1}}}{3\cdot 32\cdot 2\cdot 3} < q =$$

$$= \bar{q}\mathfrak{q} \leqq \frac{z}{32\cdot 2\cdot 3}\mathfrak{q}^{\frac{1}{s+1}} < \frac{z}{32\cdot 2\cdot 3}(k_2 Q)^{\frac{1}{s+1}} < k_2\, z\, Q^{\frac{1}{s+1}}.$$

Um den Hilfssatz 3 zu beweisen, genügt es also, eine Teilmenge $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{B}$ zu konstruieren, welche folgende Eigenschaften besitzt:

A. Sind

$$\left(\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}, \ldots, \frac{p_s}{q}\right),\ \left(\frac{p_1'}{q'}, \frac{p_2'}{q'}, \ldots, \frac{p_s'}{q'}\right)$$

zwei verschiedene Punkte von $\mathfrak{M}$, so gilt mindestens eine von den s Ungleichungen

$$\left|\frac{p_i}{q} - \frac{p_i'}{q'}\right| > \frac{1}{z^{\frac{s+1}{s}}}\ (i = 1, 2, \ldots, s).$$

B. Ist N die Anzahl der Punkte von $\mathfrak{M}$, so gilt (9).

Zu diesem Zweck definieren wir $\mathfrak{M}$ folgendermassen: $\mathfrak{M}$ ist eine Teilmenge von $\mathfrak{B}$ und ein Punkt (17) gehört dann und nur dann *nicht* zu $\mathfrak{M}$, wenn es in $\mathfrak{B}$ einen von (17) verschiedenen Punkt

$$(22)\qquad \left(\frac{p_1'}{q'}, \frac{p_2'}{q'}, \ldots, \frac{p_s'}{q'}\right)$$

gibt, so dass folgende s Ungleichungen gelten:

$$(23)\qquad \left|\frac{p_i}{q} - \frac{p_i'}{q'}\right| \leqq \frac{1}{z^{\frac{s+1}{s}}}\ (i = 1, 2, \ldots, s).$$

Dann besitzt $\mathfrak{M}$ die Eigenschaft A und es bleibt noch zu zeigen, dass die Anzahl N der Punkte von $\mathfrak{M}$ die Ungleichung (9) erfüllt.

Wir bemerken zunächst: sind (17), (22) zwei verschiedene Punkte aus $\mathfrak{B}$ und gilt (23), so ist $q \neq q'$; denn sonst wäre für mindestens ein i (vgl. (21))

$$\left|\frac{p_i}{q} - \frac{p_i}{q}\right| \geqq \frac{1}{q} > \frac{1}{z^{\frac{s+1}{s}}};$$

[14]) Bis zum Schluss des Beweises des Hilfssatzes 3. machen wir folgende Verabredung: Wird ein Punkt in der Gestalt $\left(\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}, \ldots, \frac{p_s}{q}\right)$ oder $\left(\frac{p_1'}{q'}, \frac{p_2'}{q'}, \ldots, \frac{p_s'}{q'}\right)$ geschrieben, so wird dabei stillschweigend folgendes vorausgesetzt: q, q', p_i, p_i' ganz, $(p_i, q) = (p_i', q') = 1\ (i = 1, 2, \ldots, s)$; $q = \bar{q}\mathfrak{q}$, $q' = \bar{q}'\mathfrak{q}$; $\bar{q}, \bar{q}'$ ganz, $b+1 \leqq \bar{q} \leqq 2b+1$, $b+1 \leqq \bar{q}' \leqq 2b+1$.

also ist für jedes i $(i=1,2,\dots,s)$

$$\frac{p_i}{q}-\frac{p_i'}{q'}\neq 0,$$

denn links stehen zwei irreduzible Brüche mit verschiedenen Nennern. Wir können also in der Definition von $\mathfrak{M}$ die Ungleichungen (23) durch die Ungleichungen

$$0<\left|\frac{p_i}{q}-\frac{p_i'}{q'}\right|\leqq\frac{1}{z^{\frac{s+1}{s}}}\qquad(i=1,2,\dots,s)\tag{24}$$

ersetzen.

Es sei nun $\bar q$ ganz, $b+1\leqq\bar q\leqq 2b+1$; $t(\bar q)$ sei die Anzahl derjenigen Punkte aus $\mathfrak{B}$, für welche die Darstellung (17) mit $\bar q=q\mathfrak{q}$ gilt; die Anzahl derjenigen unter diesen Punkten, die *nicht* zu $\mathfrak{M}$ gehören, werde mit $v(\bar q)$ bezeichnet. Nun ist nach (19) $t(\bar q)$ gleich der Anzahl derjenigen Systeme ganzer Zahlen $p_1,p_2,\dots,p_s$, welche den Beziehungen

$$a_i\bar q\leqq p_i<a_i\bar q+\bar q,\ (p_i,\bar q)=1,\ (p_i,\mathfrak{q})=1\tag{25}$$

für $i=1,2,\dots,s$ genügen. Bei jedem i ist die Anzahl derjenigen p_i, für welche (25) gilt, mindestens gleich $\varphi(\bar q)-\frac{\bar q}{16}$; denn die Anzahl der durch die Primzahl $\mathfrak{q}$ teilbaren Zahlen unter $\bar q$ konsekutiven ist höchstens

$$\frac{\bar q}{\mathfrak{q}}+1\leqq\frac{2\bar q}{\mathfrak{q}}<\frac{\bar q}{16}$$

(denn aus (18), (14), (13), (11), (10) folgt

$$\bar q>\frac{1}{3\cdot32\cdot2\cdot3}\cdot\frac{z}{(k_2Q)^{\frac{s}{s+1}}}>k_2Q>\mathfrak{q},\ \mathfrak{q}>2c_1>32).$$

Ist also insbesondere $\bar q$ eine *normale Zahl*, $b+1\leqq\bar q\leqq2b+1$, so ist

$$t(\bar q)\geqq\left(\varphi(\bar q)-\frac{\bar q}{16}\right)^s>\frac{\bar q^s}{16^s}\geqq\frac{(b+1)^s}{16^s}.\tag{26}$$

Sind $\bar q,\bar q'$ ganze Zahlen mit

$$b+1\leqq\bar q\leqq2b+1,\quad b+1\leqq\bar q'\leqq2b+1,$$

so sei $w(\bar q,\bar q')$ die Anzahl derjenigen modulo $\bar q$ verschiedenen ganzen Zahlen p, zu welchen es ein ganzes p' mit

$$0<\left|\frac{p}{\bar q\mathfrak{q}}-\frac{p'}{\bar q'\mathfrak{q}}\right|\leqq\frac{1}{z^{\frac{s+1}{s}}}\tag{27}$$

gibt; dann ist (vgl. (24)) offenbar

$$v(\bar q)\leqq\sum_{\bar q'=b+1}^{2b+1}w^s(\bar q,\bar q').\tag{28}$$

Aus (27) folgt

$$0<|p\bar q'-p'\bar q|\leqq\frac{9b^2\mathfrak{q}}{z^{\frac{s+1}{s}}},$$

also

$$p\bar q'\equiv a\ (\mathrm{mod}\ \bar q),\ \text{wo}\ 0<|a|\leqq\frac{9b^2\mathfrak{q}}{z^{\frac{s+1}{s}}}.$$

Dabei haben wir also, falls $(\bar q,\bar q')=g$ gesetzt wird, für a höchstens $\frac{18b^2\mathfrak{q}}{gz^{\frac{s+1}{s}}}$ Möglichkeiten (denn a muss durch g teilbar sein) und bei gegebenem a hat die Kongruenz $p\bar q'\equiv a$ (mod $\bar q$) genau eine Lösung modulo $\frac{\bar q}{g}$, also genau g Lösungen modulo $\bar q$; daher ist

$$w(\bar q,\bar q')\leqq\frac{18b^2\mathfrak{q}}{z^{\frac{s+1}{s}}}$$

und daher (vgl. (28), (14))

$$v(\bar q)\leqq\frac{2^s\cdot3^{2s}(b+1)b^{2s}\mathfrak{q}^s}{z^{s+1}}\leqq\frac{2^s\cdot3^{2s}(b+1)b^{s-1}z^{s+1}\mathfrak{q}^s}{z^{s+1}(3\cdot32\cdot2\cdot3)^{s+1}\mathfrak{q}^s}<\frac{(b+1)^s}{3\cdot16^s}.$$

Daraus und aus (26) folgt: ist $\bar q$ normal, $b+1\leqq\bar q\leqq2b+1$, so ist

$$t(\bar q)-v(\bar q)>\frac{(b+1)^s}{2\cdot16^s}.\tag{29}$$

Nach der Definition ist aber $t(\bar q)-v(\bar q)$ genau die Anzahl derjenigen Punkte aus $\mathfrak{M}$, welche bei der Darstellung (17) im Nenner genau die Zahl $q=\bar{q}\mathfrak{q}$ besitzen. Nach (15) ist $b+1>k_5$; nach Hilfssatz 2 gibt es also unter den Zahlen $b+1, b+2, \ldots, 2b+1$ mindestens $\frac{1}{5}(b+1)$ normale Zahlen; also ist nach (29), (14), (13), (12)

$$N>\frac{1}{10\cdot 16^s}(b+1)^{s+1}>\frac{1}{10\cdot 16^s}\cdot\left(\frac{1}{3\cdot 32\cdot 2\cdot 3}\right)^{s+1}\cdot\frac{z^{s+1}}{(k_2\,Q)^s}=c_2\,\frac{z^{s+1}}{Q^s},$$

womit der Hilfssatz 3 bewiesen ist[15]).

Man setze nun

$$G=8\,s^3\,(s+1)^{s-1}\,3^{s-1}\,(2\,s+3)\,2^{\beta}\,.\,\beta^{-1} \tag{30}$$

und wähle eine Folge

$$f<z_1<z_2<z_3<\ldots$$

mit folgenden Eigenschaften:

$$f>e^e,\ f>c_1,\ z_1>d(f),\ z_{n+1}>d\left(z_n^{\frac{s+1+\beta}{s}}\right)\ (n=1, 2, \ldots); \tag{31}$$

$$z_{n+1}>e^{z_n},\ z_n^{\frac{\beta}{s}}>2\,(s+1)\,(\log\log z_n)^{s+1+\beta}>s+1\quad(n=1, 2, \ldots); \tag{32}$$

$$z_n^{\frac{1}{2s}}>e\log\log z_n\qquad(n=1, 2, \ldots); \tag{33}$$

$$(\log\log z_{n+1})^{s+1}>\beta\,z_n^{\frac{\beta}{s}}\log z_n\quad(n=1, 2, \ldots); \tag{34}$$

$$G\,\frac{(\log\log z_n)^{\beta}}{\log z_n}<\frac{c_2^{\,n+1}}{2^{n+1}\,f^s\,(z_1\,z_2\,\ldots\,z_{n-1})^{\beta}}\ ^{16)}\quad(n=1, 2, \ldots); \tag{35}$$

das ist offenbar möglich.

Wir definieren nun für jedes ganze $n\geqq 1$ Punkte, Würfel und vergrösserte Würfel n-ter Ordnung[17]). Ein Würfel n-ter Ordnung (bzw. ein vergrösserter Würfel n-ter Ordnung) ist dabei ein abgeschlossener

[15]) Zu einem zulässigen System von Zahlen $s, Q, z, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ kann es mehrere (aber offenbar nur endlichviele) Mengen $\mathfrak{M}(s, Q, z, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s)$ mit den im Hilfssatz 3 geforderten Eigenschaften geben; man kann aber offenbar eine Vorschrift angeben, durch welche jedem solchen System $s, Q, z, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ *eindeutig* eine solche Menge $\mathfrak{M}(s, Q, z, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s)$ zugeordnet wird; ebenso lässt sich freilich auch c_1 (als Funktion von s) und $d(Q)$ (als Funktion von s und Q) von vornherein eindeutig feststellen.

[16]) Für $n=1$ soll $z_1 . z_2 \ldots z_{n-1}=1$ gesetzt werden.

[17]) Wir arbeiten stets im s-dimensionalen cartesischen Raume der Punkte $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$.

Würfel von der Kantenlänge $z_n^{-\frac{s+1+\beta}{s}}$ $\left(\text{bzw. } z_n^{-\frac{s+1}{s}}\right)$, dessen Mittelpunkt ein Punkt n-ter Ordnung ist. Die Punkte (und daher auch die Würfel und die vergrösserten Würfel) n-ter Ordnung werden schliesslich folgendermassen definiert:

Man wähle eine Zahl a mit $0<\frac{a}{f}<\frac{a+1}{f}<1$; dann gibt es wegen (31) nach dem Hilfssatz 3. (mit $Q=f$, $z=z_1$, $\alpha_i=a$) eine Menge $\mathfrak{M}$ von mehr als

$$c_2\,\frac{z_1^{\,s+1}}{f^s}$$

Punkten, welche folgende Eigenschaft besitzen: Jeder Punkt von $\mathfrak{M}$ hat die Gestalt

$$\left(\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}, \ldots, \frac{p_s}{q}\right);\ p_1, p_2, \ldots, p_s, q \text{ ganz};\ z_1\leqq q\leqq k_2\,z_1\,f^{\frac{1}{s+1}};$$

konstruiert man um jeden Punkt von $\mathfrak{M}$ als Mittelpunkt einen abgeschlossenen Würfel von der Kante $z_1^{-\frac{s+1}{s}}$, so sind diese Würfel paarweise fremd und liegen sämtlich im Würfel

$$\frac{a}{f}\leqq\theta_i\leqq\frac{a+1}{f}\qquad(i=1, 2, \ldots, s).$$

Die Punkte von $\mathfrak{M}$ mögen die Punkte erster Ordnung sein.

Ist n ganz, $n>1$ und sind die Punkte (und also auch Würfel und vergrösserte Würfel) $(n-1)$-ter Ordnung definiert, so definiere man Punkte n-ter Ordnung folgendermassen. Es seien $W_1, W_2, \ldots, W_r$ die Würfel $(n-1)$-ter Ordnung. Zu jedem Würfel W_h $(1\leqq h\leqq r)$ gibt es nach Hilfssatz 3 (mit $Q=z_{n-1}^{\frac{s+1+\beta}{s}}$, $z=z_n$ und mit geeigneten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$; vgl. (31)) eine Menge $\mathfrak{M}_h$ von mehr als

$$c_2\,\frac{z_n^{\,s+1}}{z_{n-1}^{\,s+1+\beta}}$$

Punkten, die folgende Eigenschaften haben: Jeder Punkt von $\mathfrak{M}_h$ hat die Gestalt

$$\left(\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}, \ldots, \frac{p_s}{q}\right);\ p_1, p_2, \ldots, p_s, q \text{ ganz};\ z_n\leqq q\leqq k_2\,z_n\,z_{n-1}^{\frac{s+1+\beta}{s(s+1)}};$$

konstruiert man um jeden Punkt von $\mathfrak{M}_h$ als Mittelpunkt einen abgeschlossenen Würfel von der Kante $z_n^{-\frac{s+1}{s}}$, so sind diese Würfel paarweise fremd und liegen sämtlich im Würfel W_h. Die Punkte von $\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \ldots + \mathfrak{M}_r$ mögen die Punkte n-ter Ordnung sein[18]).

Damit sind also Punkte, Würfel und vergrösserte Würfel aller Ordnungen definiert. Sie haben offenbar folgende Eigenschaften:

A 1. Jeder Punkt n-ter Ordnung hat die Gestalt

$$\left(\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}, \ldots, \frac{p_s}{q}\right)$$

mit ganzen $p_1, p_2, \ldots, p_s, q$, wo

$$z_1 \leqq q \leqq k_2 z_1 f^{\frac{1}{s+1}}, \text{ wenn } n = 1,$$

$$z_n \leqq q \leqq k_2 z_n z_{n-1}^{\frac{s+1+\beta}{s(s+1)}}, \text{ wenn } n > 1.$$

A 2. Die Würfel n-ter Ordnung bzw. die vergrösserten Würfel n-ter Ordnung sind genau diejenigen abgeschlossenen Würfel von der Kantenlänge $z_n^{-\frac{s+1+\beta}{s}}$ bzw. $z_n^{-\frac{s+1}{s}}$, deren Mittelpunkte Punkte n-ter Ordnung sind.

A 3. Je zwei vergrösserte Würfel derselben Ordnung sind fremd.

A 4. Jeder vergrösserte Würfel $(n+1)$-ter Ordnung $(n = 1, 2, \ldots)$ liegt in genau einem Würfel n-ter Ordnung.

A 5. Alle vergrösserten Würfel aller Ordnungen liegen im *offenen* Würfel

$$0 < \theta_i < 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

A 6. Die Anzahl aller Punkte erster Ordnung ist grösser als

$$c_2 \frac{z_1^{s+1}}{f^s} > 0.$$

A 7. In jedem Würfel $(n-1)$-ter Ordnung $(n > 1)$ liegen mehr als

$$c_2 \frac{z_n^{s+1}}{z_{n-1}^{s+1+\beta}} > 0$$

Punkte (also auch Würfel und vergrösserte Würfel) n-ter Ordnung.

[18]) Die Anwendung des Auswahlaxioms bei der Wahl von $\mathfrak{M}_h$ ist nur scheinbar; vgl. die Fussnole [15]).

Es sei V_n die Vereinigungsmenge aller Würfel n-ter Ordnung; nach A 4 ist $V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset \ldots$

Man setze

$$E = V_1 V_2 V_3 \ldots;$$

E ist abgeschlossen und liegt nach A 5 *im offenen Würfel* $0 < \theta_i < 1$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$. Weiter: in jedem Würfel h-ter Ordnung liegt nach A 7 mindestens ein Würfel $(h+1)$-ter Ordnung. Ist also W ein Würfel n-ter Ordnung $(n \geqq 1)$, so ist $W V_h \neq 0$ für $h \geqq n$; da die Mengen

$$W V_n \supset W V_{n+1} \supset W V_{n+2} \supset \ldots$$

abgeschlossen, beschränkt und nicht leer sind, so ist auch ihr Durchschnitt

$$E W = W V_n \cdot W V_{n+1} \cdot W V_{n+2} \ldots$$

nicht leer; mit anderen Worten: *Jeder Würfel n-ter Ordnung $(n \geqq 1)$ enthält mindestens einen Punkt von E.*

§ 3. Beweis des Hauptsatzes für $0 < \beta < \infty$.

Im folgenden soll stets

$$x = \operatorname{Max}(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_s|)$$

gesetzt werden. Sind M und N zwei Mengen, so soll die Aussage „M schneidet N" oder „M wird von N geschnitten" bedeuten, dass $MN \neq 0$.

Hilfssatz 4. *Es sei n ganz, $n \geqq 2$; $x_1, x_2, \ldots, x_s, x_{s+1}$ ganz;*

$$\frac{z_{n-1}^{\frac{1}{s}}}{\log\log z_{n-1}} \leqq x < \frac{z_n^{\frac{1}{s}}}{\log\log z_n}, \tag{36}$$

M sei die Menge aller Punkte $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ *mit*

$$0 < \theta_i < 1 \ (i = 1, 2, \ldots, s), \ |x_1 \theta_1 + x_2 \theta_2 + \ldots + x_s \theta_s + x_{s+1}| < \frac{1}{x^{s+\beta} \log x}.$$

Behauptung: die Menge M schneidet höchstens

$$2s(s+1)^{s-1} \frac{z_n^{s+1}}{z_{n-1}^{\frac{\beta(s-1)}{s}}} \left(\frac{1}{x^{s+1+\beta} \log x} + \frac{1}{z_n^{\frac{s+1}{s}}}\right)$$

Würfel n-ter Ordnung.

Beweis. Man wähle zunächst ein ganzes j $(1 \leqq j \leqq s)$ mit $x_j = x$[19]).

[19]) Man kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x_j > 0$ voraussetzen; sonst ändere man das Vorzeichen von $x_1, x_2, \ldots, x_s, x_{s+1}$.

Wir zeigen zuerst, dass *die Menge* M *höchstens*

$$(s+1)^{s-1} z_{n-1}^{\frac{(s+1)(s-1)}{s}} \tag{37}$$

Würfel $(n-1)$*-ter Ordnung schneidet.*

Es sei $P=(y_1, y_2, \ldots, y_s)$ ein Punkt $(n-1)$-ter Ordnung, W bzw. W' der ihn enthaltende Würfel bzw. vergrösserte Würfel $(n-1)$-ter Ordnung. Ist $MW \neq 0$, so gibt es einen Punkt $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s)$ von M mit

$$|\xi_i - y_i| \leqq \frac{1}{2 z_{n-1}^{\frac{s+1+\beta}{s}}} \quad (i=1, 2, \ldots, s),$$

$$|x_1\xi_1 + \ldots + x_s\xi_s + x_{s+1}| < \frac{1}{x^{s+\beta}\log x}. \tag{38}$$

Wegen (32) ist dann auch

$$|\xi_i - y_i| < \frac{1}{2(s+1) z_{n-1}^{\frac{s+1}{s}}} \quad (i=1, 2, \ldots, s). \tag{39}$$

Man setze $\lambda_i = \xi_i$ für $1 \leqq i \leqq s$, $i \neq j$ und wähle λ_j so, dass

$$x_1\lambda_1 + \ldots + x_s\lambda_s + x_{s+1} = 0. \tag{40}$$

Dann ist nach (38) und wegen $x_j = x$

$$|\lambda_j - \xi_j| < \frac{1}{x^{s+1+\beta}\log x};$$

nach (36), (33) ist $x > e$, also ist nach (36), (32)

$$\frac{1}{x^{s+1+\beta}\log x} < \frac{1}{x^{s+1+\beta}} \leqq \frac{(\log\log z_{n-1})^{s+1+\beta}}{z_{n-1}^{\frac{s+1+\beta}{s}}} < \frac{1}{2(s+1) z_{n-1}^{\frac{s+1}{s}}};$$

also ist

$$|\lambda_i - y_i| < \frac{1}{(s+1) z_{n-1}^{\frac{s+1}{s}}} \quad (i=1, 2, \ldots, s). \tag{41}$$

Es sei A die Menge aller Punkte $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ mit

$$x_1\theta_1 + \ldots + x_s\theta_s + x_{s+1} = 0, \tag{42}$$

$$|\theta_i - \lambda_i| < \frac{1}{2(s+1) z_{n-1}^{\frac{s+1}{s}}} \quad (i=1, 2, \ldots, s,\ i \neq j). \tag{43}$$

Ist $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ ein Punkt von A, so ist nach (40), (42), (43) und wegen $x_j = x$

$$|\theta_j - \lambda_j| < \frac{s-1}{2(s+1) z_{n-1}^{\frac{s+1}{s}}},$$

also wegen (41), (43)

$$|\theta_i - y_i| < \frac{1}{2 z_{n-1}^{\frac{s+1}{s}}} \quad (i=1, 2, \ldots, s),$$

also ist $A \subset W'$. Es sei B die Menge aller Punkte $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ mit

$$0 < \theta_i < 1 \ (i=1, 2, \ldots, s), \quad x_1\theta_1 + \ldots + x_s\theta_s + x_{s+1} = 0;$$

dann ist (man beachte, dass W' im Würfel $0 < \theta_i < 1$ $(i=1, 2, \ldots, s)$ liegt)

$$A \subset BW'.$$

Nun hat aber die Projektion von A auf die Hyperebene $\theta_j = 0$ das $(s-1)$-dimensionale Volumen

$$\frac{1}{(s+1)^{s-1} z_{n-1}^{\frac{(s+1)(s-1)}{s}}}; \tag{44}$$

wird also W von M geschnitten, so hat die Projektion von BW' ein $(s-1)$-dimensionales Volumen, welches mindestens dem Ausdruck (44) gleich ist. Nun sind aber je zwei vergrösserte Würfel $(n-1)$-ter Ordnung fremd und verschiedene Punkte von B haben auch verschiedene Projektionen; endlich ist das $(s-1)$-dimensionale Volumen der Projektion von B höchstens gleich Eins. Daher ist die Anzahl der von M geschnittenen Würfel $(n-1)$-ter Ordnung höchstens gleich dem reziproken Wert von (44), d. h. höchstens gleich (37).

Es sei nun $Q = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s)$ ein Punkt n-ter Ordnung, U bzw. U' der ihn enthaltende Würfel bzw. vergrösserte Würfel n-ter Ordnung; es sei $MU \neq 0$. Dann gibt es also einen Punkt $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s)$ von M mit

$$|\nu_i - \mu_i| \leqq \frac{1}{2 z_n^{\frac{s+1+\beta}{s}}}, \quad |x_1\nu_1 + \ldots + x_s\nu_s + x_{s+1}| < \frac{1}{x^{s+\beta}\log x}.$$

Ist nun $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ ein Punkt aus U', so ist

$$|\theta_i - \mu_i| \leqq \frac{1}{\frac{s+1}{}} \quad (i=1, 2, \ldots, s),$$

also

$$| \theta_i - \nu_i | < \frac{1}{z_n^{\frac{s+1}{s}}} \ (i = 1, 2, \ldots, s),$$

also

$$(45) \qquad | x_1 \theta_1 + \ldots + x_s \theta_s + x_{s+1} | < \frac{1}{x^{s+\beta} \log x} + \frac{s\, x}{z_n^{\frac{s+1}{s}}}.$$

Also: *Es sei N die Menge aller Punkte* $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ *mit* (45); *ist U ein Würfel n-ter Ordnung, ist U' derjenige vergrösserte Würfel n-ter Ordnung, welcher U enthält und ist $MU \neq 0$, so ist $U' \subset N$.*

Es sei nun W ein Würfel $(n-1)$-ter Ordnung; die Anzahl ρ der in W liegenden und von M (also von MW) geschnittenen Würfel n-ter Ordnung ist nach dem eben bewiesenen höchstens gleich der Anzahl der in W liegenden und in N (also in NW) enthaltenen vergrösserten Würfel n-ter Ordnung. Nun ist aber das Volumen eines vergrösserten Würfels n-ter Ordnung gleich z_n^{-s-1}; dagegen ist das Volumen von WN höchstens gleich

$$\frac{1}{z_{n-1}^{\frac{(s+1+\beta)(s-1)}{s}}} \left(\frac{2}{x^{s+1+\beta} \log x} + \frac{2s}{z_n^{\frac{s+1}{s}}} \right)$$[20];

daher ist

$$\rho \leqq \frac{2 s\, z_n^{s+1}}{z_{n-1}^{\frac{(s+1+\beta)(s-1)}{s}}} \left(\frac{1}{x^{s+1+\beta} \log x} + \frac{1}{z_n^{\frac{s+1}{s}}} \right).$$

Da aber die Anzahl der von M geschnittenen Würfel $(n-1)$-ter Ordnung höchstens gleich dem Ausdruck (37), ist, so ist Hilfssatz 4 bewiesen.

Sind $x_1, x_2, \ldots, x_s, x_{s+1}$ ganze Zahlen mit $x > 0$, so werde die Menge aller Punkte $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$, welche den Bedingungen

$$(46) \ 0 < \theta_i < 1 \ (i = 1, 2, \ldots, s), \ | x_1 \theta_1 + x_2 \theta_2 + \ldots + x_s \theta_s + x_{s+1} | < \frac{1}{x^{s+\beta} \log x}$$

[20]) Denn jedes θ_i $(i = 1, 2, \ldots, s, i \neq j)$ durchläuft höchstens ein Intervall von der Länge $z_{n-1}^{-\frac{s+1+\beta}{s}}$; bei gegebenen θ_i $(i = 1, 2, \ldots, s, i \neq j)$ durchläuft aber θ_j (wegen (45) und wegen $x_j = x$) höchstens ein Intervall von der Länge

$$\frac{2}{x^{s+1+\beta} \log x} + \frac{2s}{z_n^{\frac{s+1}{s}}}.$$

genügen, mit $M(x_1, x_2, \ldots, x_s, x_{s+1})$ bezeichnet. Ist n ganz, $n \geqq 2$, so bedeute P_n die Vereinigungsmenge aller Mengen $M(x_1, x_2, \ldots, x_s, x_{s+1})$, welche der Bedingung

$$(47) \qquad \frac{z_{n-1}^{\frac{1}{s}}}{\log \log z_{n-1}} \leqq x < \frac{z_n^{\frac{1}{s}}}{\log \log z_n}$$

genügen.

Hilfssatz 5. *Es sei n ganz, $n \geqq 2$; τ_n sei die Anzahl der von der Menge P_n geschnittenen Würfel n-ter Ordnung. Dann ist*

$$\tau_n \leqq G \frac{z_n^{s+1}}{z_{n-1}^{\beta}} \frac{(\log \log z_{n-1})^\beta}{\log z_{n-1}},$$

wo G durch (30) *definiert ist.*

Beweis. Für ganzes $m > 0$ sei

$$v_m = \frac{z_m^{\frac{1}{s}}}{\log \log z_m};$$

nach (33) ist

$$(48) \qquad v_{n-1} > e > 2, \quad v_{n-1} > z_{n-1}^{\frac{1}{2s}}.$$

Ist eine ganze Zahl j mit $1 \leqq j \leqq s$ und eine ganze Zahl x mit (47), d. h. mit $v_{n-1} \leqq x < v_n$ gegeben, so ist die Anzahl aller nichtleeren Mengen $M(x_1, x_2, \ldots, x_s, x_{s+1})$ mit

$$x_j = x = \operatorname{Max}(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_s|)$$

höchstens gleich

$$(2x+1)^{s-1} (2 s x + 3) \leqq 3^{s-1} (2s+3) x^s$$

(denn für $i \neq j$, $1 \leqq i \leqq s$ soll $|x_i| \leqq x$ sein und wegen (46), (48) soll

$$| x_{s+1} | < | x_1 | + | x_2 | + \ldots + | x_s | + \frac{1}{x^{s+\beta} \log x} < s x + 1$$

sein). Daher ist nach Hilfssatz 4 [21])

$$\tau_n \leqq s \cdot 3^{s-1} (2s+3) \cdot 2s \cdot (s+1)^{s-1} \frac{z_n^{s+1}}{z_{n-1}^{\frac{\beta(s-1)}{s}}} \sum_{v_{n-1} \leqq x < v_n} \left(\frac{1}{x^{1+\beta} \log x} + \frac{x^s}{z_n^{\frac{s+1}{s}}} \right)$$

$$\leqq s^2 \cdot 3^{s-1} \cdot 2 \cdot (2s+3) \cdot (s+1)^{s-1} \frac{z_n^{s+1}}{z_{n-1}^{\frac{\beta(s-1)}{s}}} \left(\frac{1}{\beta (v_{n-1} - 1)^\beta \log v_{n-1}} + \frac{v_n^{s+1}}{z_n^{\frac{s+1}{s}}} \right).$$

[21]) Vgl. die Fussnote [19]).

Nach (48) ist $v_{n-1}-1>\frac{1}{2}v_{n-1}$, also nach (48)

$$\frac{1}{\beta(v_{n-1}-1)^{\beta}\log v_{n-1}}<\frac{2^{\beta}\cdot 2s(\log\log z_{n-1})^{\beta}}{\beta z_{n-1}^{\frac{\beta}{s}}\cdot\log z_{n-1}};$$

nach (34) ist

$$\frac{v_n^{s+1}}{z_n^{\frac{s+1}{s}}}=\frac{1}{(\log\log z_n)^{s+1}}<\frac{2^{\beta}\cdot 2s(\log\log z_{n-1})^{\beta}}{\beta z_{n-1}^{\frac{\beta}{s}}\cdot\log z_{n-1}}$$

(denn der Zähler rechts ist >1 wegen (31)).
Daher ist

$$\tau_n\leqq\frac{8s^3\cdot 3^{s-1}\cdot(2s+3)\cdot(s+1)^{s-1}\cdot 2^{\beta}}{\beta}\cdot\frac{z_n^{s+1}}{z_{n-1}^{\beta}}\cdot\frac{(\log\log z_{n-1})^{\beta}}{\log z_{n-1}},$$

womit wegen (30) der Hilfssatz 5. bewiesen ist.

Hilfssatz 6. *Es sei n ganz, $n\geqq 1$; Γ_n sei die Anzahl der von der Menge $P_2+P_3+\ldots+P_n$* **nicht** *geschnittenen Würfel n-ter Ordnung* (für $n=1$ soll $P_2+P_3+\ldots+P_n$ die leere Menge bedeuten).
Dann ist

$$\Gamma_n\geqq\frac{c_2^n z_n^{s+1}}{2^n(z_1\cdot z_2\ldots z_{n-1})^{\beta}f}\tag{49}$$

(für $n=1$ soll $z_1\cdot z_2\ldots z_{n-1}=1$ gesetzt werden), *also insbesondere* $\Gamma_n>0$.

Beweis. (49) ist wahr für $n=1$; denn Γ_1 ist gleich der Anzahl aller Würfel erster Ordnung; nach A6 (vgl. den Schluss des § 2) ist also

$$\Gamma_1>\frac{c_2 z_1^{s+1}}{f^s}.$$

Es sei nun n ganz, $n\geqq 1$ und (49) wahr. Nach A7, A4 und dem Hilfssatz 5 ist dann

$$\Gamma_{n+1}\geqq\Gamma_n\cdot c_2\frac{z_{n+1}^{s+1}}{z_n^{s+1+\beta}}-\tau_{n+1}$$

$$\geqq\frac{c_2^{n+1}z_{n+1}^{s+1}}{2^n(z_1\cdot z_2\ldots z_n)^{\beta}f^s}-G\frac{z_{n+1}^{s+1}}{z_n^{\beta}}\frac{(\log\log z_n)^{\beta}}{\log z_n};$$

nach (35) folgt daraus

$$\Gamma_{n+1}\geqq\frac{c_2^{n+1}z_{n+1}^{s+1}}{2^{n+1}(z_1\cdot z_2\ldots z_n)^{\beta}f^s},$$

womit der Hilfssatz 6. bewiesen ist.

Beweis des Hauptsatzes für $0<\beta<\infty$.
Ich behaupte erstens:

$$E-\sum_{n=2}^{\infty}P_n\neq 0\tag{50}$$

(E ist am Schluss des § 2, P_n vor dem Wortlaut des Hilfssatzes 5. definiert). E ist nämlich beschränkt und abgeschlossen, P_n ist offen. Wäre

$$E\subset\sum_{n=2}^{\infty}P_n,\tag{51}$$

so gäbe es nach dem Borelschen Überdeckungssatz eine ganze Zahl $m\geqq 2$ mit

$$E\subset\sum_{n=2}^{m}P_n.$$

Da aber jeder Würfel m-ter Ordnung mindestens einen Punkt von E enthält, so müsste die Menge $\sum_{n=2}^{m}P_n$ jeden Würfel m-ter Ordnung schneiden, also wäre $\Gamma_m=0$ im Widerspruch gegen den Hilfssatz 6. Also gilt nicht (51), also gilt (50).

Es sei nun $(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_s)$ ein Punkt, der in $E-\sum_{n=2}^{\infty}P_n$ liegt; es gibt einen solchen Punkt. Sind $x_1,x_2,\ldots,x_s$, x_{s+1} ganze Zahlen mit

$$x=\mathrm{Max}(|x_1|,|x_2|,\ldots,|x_s|)\geqq\frac{z_1^{\frac{1}{s}}}{\log\log z_1},$$

so gibt es — wegen $z_n^{\frac{1}{s}}(\log\log z_n)^{-1}\to\infty$ — eine ganze Zahl $n\geqq 2$ mit

$$\frac{z_{n-1}^{\frac{1}{s}}}{\log\log z_{n-1}}\leqq x<\frac{z_{n-1}^{\frac{1}{s}}}{\log\log z_n}.$$

Da $0<\theta_i<1$ $(i=1,2,\ldots,s)$ und da der Punkt $(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_s)$ nicht in P_n liegt, ist

$$|x_1\theta_1+x_2\theta_2+\ldots+x_s\theta_s+x_{s+1}|\geqq\frac{1}{x^{s+\beta}\log x},$$

also

(52) $$\beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) \leqq \beta.$$

Andererseits: ist n ganz, $n \geqq 2$, so liegt $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ in einem Würfel n-ter Ordnung. Nach A 1, A 2 gibt es also ganze Zahlen $p_1, p_2, \ldots, p_s, q$ mit

(53) $$\left|\theta_i - \frac{p_i}{q}\right| \leqq \frac{1}{2 z_n^{\frac{s+1+\beta}{s}}} \quad (i = 1, 2, \ldots, s), \quad z_n \leqq q \leqq k_2 z_n z_{n-1}^{\frac{s+1+\beta}{s(s+1)}}.$$

Wird also $\frac{s+1+\beta}{s(s+1)} = \sigma$ gesetzt, so ist nach (32), (53)

$$z_n \leqq q \leqq k_2 z_n (\log z_n)^\sigma \leqq k_2 z_n (\log q)^\sigma,$$

also

$$\left|\theta_i - \frac{p_i}{q}\right| \leqq \frac{1}{2}\left(\frac{k_2 (\log q)^\sigma}{q}\right)^{\frac{s+1+\beta}{s}} \quad (i = 1, 2, \ldots, s),$$

also

(54) $$\beta_2(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) \geqq \beta.$$

Nach (1), (52), (54) ist aber

$$\beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = \beta_2(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = \beta,$$

w. z. b. w.

Praha, den 24. September 1935. [22])

(Eingegangen am 4. Oktober 1935.)

[22]) Zusatz bei der Korrektur: Herr Mahler wird demnächst einen sehr einfachen Beweis von (2) veröffentlichen.

On the order of magnitude of the difference between consecutive prime numbers.

By

Harald Cramér (Stockholm).

Introduction.

Let p_n denote the n: th prime number. It has been proved by Hoheisel [8] [1]) that we have

(1) $$p_{n+1} - p_n = O(p_n^{1-\delta})$$

for some $\delta > 0$. On the other hand, it is known (Westzynthius [11]) that the relation

(2) $$p_{n+1} - p_n = O(\log p_n)$$

is certainly *not* true. Thus with respect to the maximum order of the difference $p_{n+1} - p_n$ there remains a large domain of uncertainty.

If the Riemann hypothesis is assumed, it is possible (Cramér [4]) to improve (1) to

(3) $$p_{n+1} - p_n = O(\sqrt{p_n} \log p_n),$$

but obviously even in this case a comparatively wide gap is still left open between (2) and (3). It has been conjectured by Piltz [9] that we have for every $\varepsilon > 0$

$$p_{n+1} - p_n = O(p_n^{\varepsilon}),$$

but this has never been proved.

[1]) Numbers in brackets refer to the appended list of references.