References

[1] J. W. S. Cassels, *An Introduction to Diophantine Approximation*, Cambridge University Press, 1957.

[2] Martin Eichler, *Introduction to the Theory of Algebraic Numbers and Functions*, Academic Press, 1966.

[3] Charles F. Osgood, *The simultaneous diophantine approximation of certain k-th roots*, Proc. Camb. Phil. Soc. 67 (1970), pp. 75–86.

[4] E. G. C. Poole, *Introduction to the Theory of Linear Differential Equations*, Oxford 1936.

[5] B. Rosser, *Explicit bounds for some functions of prime numbers*, Amer. J. Math. 63 (1941), pp. 212–232.

Received on 15. 6. 1970 (98)

ACTA ARITHMETICA
XIX (1971)

О представлении чисел положительными тернарными диагональными квадратичными формами, II*

Г. А. Ломадзе (Тбилиси)

§ 4. В этом и следующих параграфах α, β, γ всюду обозначают неотрицательные целые числа; n — фиксированное натуральное число; m, u, v — нечетные натуральные числа; ω — бесквадратные числа.

Пусть $r(n; a_1, a_2, a_3)$ обозначает число представлений числа n формой $F = a_1x_1^2+a_2x_2^2+a_3x_3^2$, т.е. число решений уравнения

$$n = a_1x_1^2+a_2x_2^2+a_3x_3^2. \tag{4.1}$$

Без ограничения общности будем предполагать, что $(a_1, a_2, a_3) = 1$ и $2\nmid a_3$. Как и выше, $\Delta = a_1a_2a_3$ и a обозначает общее наименьшее кратное всех a_k. Далее, если положить $M = 4an$, то уравнение (4.1) примет вид:

$$M = \frac{a}{a_1}y_1^2+\frac{a}{a_2}y_2^2+\frac{a}{a_3}y_3^3, \quad y_k \equiv 0 \pmod{2a_k} \quad (k = 1, 2, 3). \tag{4.2}$$

Обозначим через $R(M; a_1, a_2, a_3)$ число решений уравнения (4.2). Очевидно, что

$$r(n; a_1, a_2, a_3) = R(M; a_1, a_2, a_3). \tag{4.3}$$

Из (2.3), (4.2) и (4.3) следует:

$$\prod_{k=1}^{3} \vartheta_{00}(\tau; 0, 2a_k) = 1+\sum_{M} R(M; a_1, a_2, a_3)e\left(\frac{M\tau}{4a}\right) = \tag{4.4}$$

$$= 1+\sum_{n=1}^{\infty} r(n; a_1, a_2, a_3)e(n\tau). \tag{4.5}$$

Далее, из (3.92) следует:

$$\theta(\tau; a_1, a_2, a_3) = \theta(\tau) = 1+\sum_{M} P(M; a_1, a_2, a_3)e\left(\frac{M\tau}{4a}\right), \tag{4.6}$$

---

* Первая часть работы была напечатана в номере XIX.3 журнала.

где

$$P(M;\, a_1, a_2, a_3) = \frac{\pi}{\Delta^{1/2} a^{1/2}}\, M^{1/2} V\left(\frac{M}{4a}, z\right)\Bigg|_{z=0}. \tag{4.7}$$

Лемма 14. *Ряд* $\sum\limits_{q=1}^{\infty} A_q\left(\frac{M}{4a}\right)$, *где* $A_q\left(\frac{M}{4a}\right)$ *определено формулой* (3.2), *сходится и*

$$V\left(\frac{M}{4a}, z\right)\Bigg|_{z=0} = \sum_{q=1}^{\infty} A_q\left(\frac{M}{4a}\right) = \prod_p X_p.$$

Доказательство. Так как $-\Delta\frac{M}{4a}$ не является полным квадратом, то, согласно (3.65), в полуплоскости $\operatorname{Re} z > -\frac{1}{2}$ имеем:

$$V\left(\frac{M}{4a}, z\right) = X_2\left(\frac{M}{4a}, z\right) \prod_{p\mid \Delta\frac{M}{4a},\, p>2} X_p\left(\frac{M}{4a}, z\right) L(1+z, \chi)\times$$
$$\times \prod_p \left(1-\chi(p^2)p^{-2(1+z)}\right),$$

где $\chi(k) = \left(\frac{-4\Delta\frac{M}{4a}}{k}\right)$ является неглавным характером по модулю $\Delta\frac{M}{a}$. Следовательно, принимая во внимание (3.61), получаем:

$$V\left(\frac{M}{4a}, z\right)\Bigg|_{z=0} = X_2 \prod_{p\mid \Delta\frac{M}{4a},\, p>2} X_p L(1, \chi) \prod_p \left(1-\chi(p^2)p^{-2}\right). \tag{4.8}$$

Имеет место равенство

$$\prod_p \left(1-\chi(p^2)p^{-2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)\chi(k^2)}{k^2} = \sum_{\substack{k=1\\ \left(k,\Delta\frac{M}{a}\right)=1}}^{\infty} \frac{\mu(k)\chi(k^2)}{k^2}, \tag{4.9}$$

ибо последний ряд абсолютно сходится и функция $\frac{\mu(k)\chi(k^2)}{k^2}$ мультипликативна; далее, ряд

$$L(1, \chi) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\chi(l)}{l} = \sum_{\substack{l=1\\ \left(l,\Delta\frac{M}{a}\right)=1}}^{\infty} \left(\frac{-4\Delta\frac{M}{4a}}{l}\right)\frac{1}{l} \tag{4.10}$$

сходится, ибо χ — неглавный характер. Следовательно, как известно, также будет сходящимся рядом и их произведение по Дирихле

$$\sum_{\substack{k=1\\ \left(k,\Delta\frac{M}{a}\right)=1}}^{\infty} \frac{\mu(k)\chi(k^2)}{k^2}\cdot \sum_{\substack{l=1\\ \left(l,\Delta\frac{M}{a}\right)=1}}^{\infty} \frac{\chi(l)}{l} = \sum_{\substack{q=1\\ \left(q,\Delta\frac{M}{a}\right)=1}}^{\infty} \sum_{k^2 l=q} \frac{\mu(k)\chi(k^2 l)}{k^2 l} = \tag{4.11}$$

$$= \sum_{\substack{q=1\\ \left(q,\Delta\frac{M}{a}\right)=1}}^{\infty} \frac{\chi(q)}{q} \sum_{k^2 l=q} \mu(k) = \sum_{\substack{q=1\\ \left(q,\Delta\frac{M}{a}\right)=1,\, q \text{ бескв.}}}^{\infty} \frac{\chi(q)}{q} = \sum_{\substack{q=1\\ q \text{ бескв.}}}^{\infty} \left(\frac{-4\Delta\frac{M}{4a}}{q}\right)\frac{1}{q}.$$

Если $p>2$, $p\nmid \Delta\frac{M}{4a}$, т.е. $l=\beta=0$, то, согласно (3.63) и (3.60), будем иметь:

$$A_p\left(\frac{M}{4a}\right) = \left(\frac{-\Delta\frac{M}{4a}}{p}\right)\frac{1}{p}, \qquad A_{p^\lambda}\left(\frac{M}{4a}\right) = 0 \quad \text{при } \lambda \geqslant 2. \tag{4.12}$$

Следовательно, ввиду мультипликативности функции $A_q\left(\frac{M}{4a}\right)$ (см., напр., [4], стр. 287, лемма 17), получим:

$$A_q\left(\frac{M}{4a}\right) = \left(\frac{-\Delta\frac{M}{4a}}{q}\right)\frac{|\mu(q)|}{q} \quad \text{при} \quad 2\nmid q,\ \left(q, \Delta\frac{M}{4a}\right) = 1,$$

т.е., согласно (4.11), ряд

$$\sum_{\substack{q=1\\ \left(q,4\Delta\frac{M}{4a}\right)=1}}^{\infty} A_q\left(\frac{M}{4a}\right) = \sum_{\substack{q=1\\ 2\nmid q,\, q \text{ бескв.}}}^{\infty} \left(\frac{-\Delta\frac{M}{4a}}{q}\right)\frac{1}{q} = \sum_{\substack{q=1\\ q \text{ бескв.}}}^{\infty} \left(\frac{-4\Delta\frac{M}{4a}}{q}\right)\frac{1}{q} \tag{4.13}$$

сходится. Таким образом, согласно (3.59), (3.60) и мультипликативности функции $A_q\left(\frac{M}{4a}\right)$, ряд

(4.14)
$$\sum_{q=1}^{\infty} A_q\left(\frac{M}{4a}\right) = \left\{1+\sum_{\lambda=1}^{\infty} A_{2^\lambda}\left(\frac{M}{4a}\right)\right\} \prod_{\substack{p\mid \Delta\frac{M}{4a}\\ p>2}} \left\{1+\sum_{\lambda=1}^{\infty} A_{p^\lambda}\left(\frac{M}{4a}\right)\right\} \sum_{\substack{q=1\\ \left(q,4\Delta\frac{M}{4a}\right)=1}}^{\infty} A_q\left(\frac{M}{4a}\right)$$

сходится[1].

[1] Ход рассуждений заимствован у Бэйтмена [1] (стр. 81–82).

Из (4.8)–(4.11), (4.13), (4.14), (3.6) и (3.59)–(3.61) получаем:

$$V\left(\frac{M}{4a}, z\right)\bigg|_{z=0} = \sum_{q=1}^{\infty} A_q\left(\frac{M}{4a}\right). \tag{4.15}$$

Из (3.61), (3.6) и (4.12) следует:

$$\prod_{p\nmid 2\Delta\frac{M}{4a}} X_p = \prod_{p\nmid 2\Delta\frac{M}{4a}} \left(1+\left(\frac{-\Delta\frac{M}{4a}}{p}\right)\frac{1}{p}\right) = \prod_{p}\left(1+\frac{\chi(p)}{p}\right). \tag{4.16}$$

Бесконечное произведение, стоящее в правой части, сходится, согласно лемме 2, ибо ряд $\sum_{p}\frac{\chi(p)}{p}$ сходится, согласно лемме 11 работы [3], а ряд $\sum_{p}\frac{\chi^2(p)}{p^2}$ абсолютно сходится. Следовательно, опять-таки, согласно лемме 11 работы [3], получаем:

$$\prod_{p}\left(1+\frac{\chi(p)}{p}\right) = \prod_{p}\left(1-\frac{\chi(p^2)}{p^2}\right)L(1,\chi). \tag{4.17}$$

Из (4.8), (4.16) и (4.17) следует:

$$V\left(\frac{M}{4a}, z\right)\bigg|_{z=0} = \prod_{p}\chi_p.$$

Согласно лемме 14, соответствующий квадратичным формам $F = a_1x_1^2+a_2x_2^2+a_3x_3^3$ сингулярный ряд

$$\varrho(n; a_1, a_2, a_3) = \frac{2\pi}{\Delta^{1/2}}n^{1/2}\sum_{q=1}^{\infty}A_q(n) \tag{4.18}$$

сходится, но неабсолютно. В следующей лемме дается удобная формула для вычисления суммы этого ряда.

Из (4.6), (4.7), (4.15) и (4.18) следует:

$$\theta(\tau; a_1, a_2, a_3) = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\varrho(n; a_1, a_2, a_3)e(n\tau). \tag{4.19}$$

Лемма 15. *Пусть*

$$2^{\alpha}\| n,\quad 2^{\gamma_k}\| a_k,\quad \gamma = \sum_{k=1}^{3}\gamma_k,\quad p^{\beta}\| n,\quad p^{l}\|\Delta\quad (p>2),$$

$$\Delta n = 2^{\alpha+\gamma}uv = r^2\omega,\quad u = \prod_{\substack{p\mid n\\ p\nmid 2\Delta}} p^{\beta} = r_1^2\omega_1,\quad v = \prod_{\substack{p\mid \Delta n\\ p\mid\Delta, p>2}} p^{\beta+l} = r_2^2\omega_2.$$

Тогда

$$\varrho(n; a_1, a_2, a_3) = 2^{\frac{\alpha+\gamma}{2}+4}\frac{\omega_1^{1/2}v^{1/2}}{\Delta\pi}X_2\prod_{p\mid\Delta, p>2}X_p\prod_{p\mid\Delta, p>2}(1-p^{-2})^{-1}\times \tag{4.20}$$

$$\times\prod_{p\mid r_2}\left(1-\left(\frac{-\omega}{p}\right)\frac{1}{p}\right)L(1,-\omega)\sum_{d\mid r_1}d\prod_{p\mid d}\left(1-\left(\frac{-\omega}{p}\right)\frac{1}{p}\right),$$

где

$$L(1,-\omega) = \frac{\pi}{4} \text{ при } \omega = 1,$$

$$= \frac{\pi}{2^{3/2}} \text{ при } \omega = 2,$$

$$= \frac{\pi}{\omega^{1/2}}\sum_{1\leqslant h\leqslant\omega/4}\left(\frac{h}{\omega}\right) \text{ при } \omega\equiv 1 \pmod 4,\ \omega>1,$$

$$= \frac{\pi}{2\omega^{1/2}}\sum_{1\leqslant h\leqslant\omega/2}\left(\frac{h}{\omega}\right) \text{ при } \omega\equiv 3 \pmod 4,$$

$$= \frac{\pi}{\omega^{1/2}}\left\{\sum_{1\leqslant h\leqslant\omega/16}\left(\frac{h}{\omega/2}\right)-\sum_{3\omega/16<h\leqslant\omega/4}\left(\frac{h}{\omega/2}\right)\right\} \text{ при } \omega\equiv 2 \pmod 8,\ \omega>2,$$

$$= \frac{\pi}{\omega^{1/2}}\sum_{\omega/16<h\leqslant 3\omega/16}\left(\frac{h}{\omega/2}\right) \text{ при } \omega\equiv 6 \pmod 8,$$

а значения величин X_2 и X_p, соответственно, даны в леммах 8 *и* 9 *с натуральным M вместо целого μ, т.е. с n вместо $\frac{\mu}{4a}$.*

Доказательство. В работе [3] (стр. 262, формулы (5.13) и (5.14)) показано, что при $p>2$, $p^{\beta}\| n$, $p\nmid\Delta$

$$X_p = (1-p^{-2})w(p^{\beta}),\qquad w(u) = \sum_{d^2\mid u}d^{-1}\prod_{p\mid u}\left(1-\left(\frac{-d^{-2}\Delta n}{p}\right)\frac{1}{p}\right)^{-1}. \tag{4.21}$$

При $p>2$, $p\nmid\Delta n$, т.е. при $l=\beta=0$, из леммы 9 следует, что

$$X_p = 1+\left(\frac{-\Delta n}{p}\right)\frac{1}{p}. \tag{4.22}$$

Так как $M = 4an$, то, согласно лемме 14, принимая во внимание (4.21) и (4.22), получаем:

$$\sum_{q=1}^{\infty}A_q(n) = X_2\prod_{p\mid\Delta, p>2}X_p\prod_{p>2}(1-p^{-2})\prod_{p\mid\Delta, p>2}(1-p^{-2})^{-1}\times \tag{4.23}$$

$$\times\prod_{p\nmid 2\Delta n}\left(1-\left(\frac{-\Delta n}{p}\right)\frac{1}{p}\right)^{-1}w(u),$$

ибо как показано в работе [3] (стр. 263), функция $w(u)$ мультипликативна. В работе [3] (стр. 263) также показано, что

$$(4.24)\qquad w(u)=\frac{1}{r_1}\sum_{d|r_1} d\prod_{p|d}\left(1-\left(\frac{-\omega}{p}\right)\frac{1}{p}\right)\prod_{p|r_1}\left(1-\left(\frac{-\omega}{p}\right)\frac{1}{p}\right)^{-1},$$

$$(4.25)\qquad \prod_{p\nmid 2\Delta n}\left(1-\left(\frac{-\Delta n}{p}\right)\frac{1}{p}\right)=\prod_{p>2}\left(1-\left(\frac{-\omega}{p}\right)\frac{1}{p}\right)\prod_{p|r,p>2}\left(1-\left(\frac{-\omega}{p}\right)\frac{1}{p}\right)^{-1}.$$

Из (4.18), (4.23)–(4.25) и леммы 11 работы [3] следует (4.20). Значения функции $L(1,-\omega)=\sum_{u=1}^{\infty}\left(\frac{-\omega}{u}\right)\frac{1}{u}$ имеются у Дирихле ([2], стр. 489–491).

В дальнейшем положим:

$$L_1=\sum_{d|r_1} d\prod_{p|d}\left(1-\left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p}\right),$$

$$L_2=\sum_{d|r_1} d\prod_{p|d}\left(1-\left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{p}{\omega}\right)\frac{1}{p}\right)\sum_{1\leqslant h\leqslant \omega/4}\left(\frac{h}{\omega}\right),$$

$$L_3=\sum_{d|r_1} d\prod_{p|d}\left(1-\left(\frac{p}{\omega}\right)\left(\frac{1}{p}\right)\right)\sum_{1\leqslant h\leqslant \omega/2}\left(\frac{h}{\omega}\right),$$

$$L_4=\sum_{d|r_1} d\prod_{p|d}\left(1-\left(\frac{-2}{p}\right)\frac{1}{p}\right),$$

$$L_5=\sum_{d|r_1} d\prod_{p|d}\left(1-\left(\frac{-2}{p}\right)\left(\frac{p}{\omega/2}\right)\frac{1}{p}\right)\left\{\sum_{1\leqslant h\leqslant \omega/16}\left(\frac{h}{\omega/2}\right)-\sum_{3\omega/16<h\leqslant \omega/4}\left(\frac{h}{\omega/2}\right)\right\},$$

$$L_6=\sum_{d|r_1} d\prod_{p|d}\left(1-\left(\frac{2}{p}\right)\left(\frac{p}{\omega/2}\right)\frac{1}{p}\right)\sum_{\omega/16<h\leqslant 3\omega/16}\left(\frac{h}{\omega/2}\right).$$

§ 5. В настоящем параграфе рассматривается представление чисел формой $F=x_1^2+x_2^2+7x_3^2$.

Теорема 1. 1) *Имеет место тождество*

$$(5.1)\qquad \vartheta_{00}^2(\tau;0,2)\vartheta_{00}(\tau;0,14)=$$
$$=\theta(\tau;1,1,7)+\frac{4}{3}\vartheta_{00}(\tau;0,2)\vartheta_{21}(\tau;0,4)\vartheta_{14,1}(\tau;0,28).$$

2) *Пусть* $n=2^\alpha 7^\beta u$, $(u,14)=1$, $7n=r^2\omega$, $u=r_1^2\omega_1$. *Далее, пусть* $\delta=4$ *при* $\omega\equiv 0\pmod 7$, $\delta=8$ *при* $\omega\equiv 1,2,4\pmod 7$ *и* $\delta=0$ *при* $\omega\equiv 3,5,6\pmod 7$. *Тогда*

$$(5.2)\qquad r(n;1,1,7)=\varrho(n;1,1,7)+\tfrac{4}{3}\nu(n),$$

где

$$(5.3)\qquad \varrho(n;1,1,7)=\frac{2}{3}\left(2^{\frac{\alpha}{2}+2}-3\right)L_1\quad \text{при}\quad \omega=1,$$
$$=\frac{\delta}{3}\left(2^{\frac{\alpha}{2}+2}-3\right)L_2\quad \text{при}\quad \omega\equiv 1\pmod 4,\ \omega>1,$$
$$=\frac{\delta}{3}\left(2^{\frac{\alpha}{2}+1}-1\right)L_3\quad \text{при}\quad \omega\equiv 3\pmod 8,$$
$$=\frac{\delta}{3}2^{\frac{\alpha}{2}+1}L_3\quad \text{при}\quad \omega\equiv 7\pmod 8,$$
$$=\frac{4}{3}\left(2^{\frac{\alpha+3}{2}}-3\right)L_4\quad \text{при}\quad \omega=2,$$
$$=\frac{\delta}{3}\left(2^{\frac{\alpha+3}{2}}-3\right)L_5\quad \text{при}\quad \omega\equiv 2\pmod 8,\ \omega>2,$$
$$=\frac{\delta}{3}\left(2^{\frac{\alpha+3}{2}}-3\right)L_6\quad \text{при}\quad \omega\equiv 6\pmod 8,$$

а $\nu(n)$ *обозначает коэффициент при* Q^n *в разложении функции* $\vartheta_{00}(\tau;0,2)\vartheta_{21}(\tau;0,4)\vartheta_{14,1}(\tau;0,28)$ *по степеням* $Q=e(\tau)$.

Доказательство. 1) Положим

$$\psi(\tau;1,1,7)=\vartheta_{00}^2(\tau;0,2)\vartheta_{00}(\tau;0,14)-\theta(\tau;1,1,7)-$$
$$-\tfrac{4}{3}\vartheta_{00}(\tau;0,2)\vartheta_{21}(\tau;0,4)\vartheta_{14,1}(\tau;0,28).$$

Согласно лемме 13, функция $\psi^4(\tau;1,1,7)$ является ц.м.ф. размерности -6, принадлежащей подгруппе $\Gamma_0(56)$, и делителя 56. Действительно, непосредственно видно, что условия (3.93) и (3.94) выполняются. Из $\alpha\delta\equiv 1\pmod{56}$ следует, что $\alpha\delta\equiv 1\pmod 8$, т.е, $\alpha\equiv\delta\equiv 1$ или 3 или 5 или $7\pmod 8$. Следовательно, в силу (2.4) и (2.5). получаем:

$$\vartheta_{2\alpha,1}(\tau;0,4)=\vartheta_{\pm 2,1}(\tau;\alpha\mp 1,4)=\begin{cases}\vartheta_{21}(\tau;0,4) & \text{при}\quad \alpha\equiv 1,7\pmod 8,\\ -\vartheta_{21}(\tau;0,4) & \text{при}\quad \alpha\equiv 3,5\pmod 8,\end{cases}$$

$$\vartheta_{14\alpha,1}(\tau;0,28)=\vartheta_{\pm 14,1}(\tau;7(\alpha\mp 1),28)=$$
$$=\begin{cases}\vartheta_{14,1}(\tau;0,28) & \text{при}\quad \alpha\equiv 1,7\pmod 8,\\ -\vartheta_{14,1}(\tau;0,28) & \text{при}\quad \alpha\equiv 3,5\pmod 8,\end{cases}$$

откуда следует выполнимость условия (3.95).

Таким образом, согласно лемме 1, функция $\psi^4(\tau;1,1,7)$ будет тождественно равна нулю, если коэффиценты при Q^n $(n\leqslant 48)$ в ее разложении по степеням Q равняются нулю, т.е. достаточно показать, что все коэффициенты при Q^n $(n\leqslant 12)$ в разложении $\psi(\tau;1,1,7)$ по степеням Q равны нулю.

В лемме 15 положим: $a_1=a_2=1$, $a_3=7$, $\gamma_1=\gamma_2=\gamma_3=0$, $\varDelta=7$, $n=2^\alpha m$, $\varDelta n=2^\alpha 7m=2^\alpha uv=r^2\omega$, $u=r_1^2\omega_1$, $v=7^{\beta+1}=r_2^2\omega_2$.

Тогда получим, что

$$(5.4)\qquad \varrho(n;1,1,7)=2^{\frac{\alpha}{2}}\cdot 7^{\frac{\beta+1}{2}+1}\frac{\omega_1^{1/2}}{3\pi}X_2X_7\left(1+\left(\frac{\omega}{7}\right)\frac{1}{7}\right)\times$$
$$\times L(1,-\omega)\sum_{d\mid r_1}d\prod_{p\mid d}\left(1-\left(\frac{-\omega}{p}\right)\frac{1}{p}\right),$$

где, согласно леммам 8 и 9,

$$(5.5)\qquad \begin{aligned} X_2&=2 &&\text{при}\quad 2\mid\alpha,\ m\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,8),\\ &=(2^{\frac{\alpha}{2}+1}-1)2^{-\frac{\alpha}{2}} &&\text{при}\quad 2\mid\alpha,\ m\equiv 5\,(\mathrm{mod}\,8),\\ &=(2^{\frac{\alpha}{2}+2}-3)2^{-\frac{\alpha}{2}-1} &&\text{при}\quad 2\mid\alpha,\ m\equiv 3\,(\mathrm{mod}\,4),\\ &=(2^{\frac{\alpha+3}{2}}-3)2^{-\frac{\alpha+1}{2}} &&\text{при}\quad 2\nmid\alpha;\end{aligned}$$

$$(5.6)\qquad \begin{aligned} X_7&=8\cdot 7^{-\frac{\beta}{2}-1} &&\text{при}\quad 2\mid\beta,\\ &=\left(1+\left(\frac{u}{7}\right)\right)7^{-\frac{\beta+1}{2}} &&\text{при}\quad 2\nmid\beta.\end{aligned}$$

Очевидно, что

1) при $\omega=1$: $\omega_1=1$, $2\mid\alpha$, $m\equiv 3\,(\mathrm{mod}\,4)$, $2\nmid\beta$, $u=r_1^2$;

2) при $\omega\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,4)$, $\omega>1$: $2\mid\alpha$, $m\equiv 3\,(\mathrm{mod}\,4)$, $\omega=7\omega_1$ или ω_1, смотря по тому β четно или нечетно и в последнем случае $\left(\frac{u}{7}\right)=\left(\frac{\omega}{7}\right)$;

3) при $\omega\equiv 3\,(\mathrm{mod}\,4)$: $2\mid\alpha$, $m\equiv 5$ или $1\,(\mathrm{mod}\,8)$, смотря по тому $\omega\equiv 3$ или $7\,(\mathrm{mod}\,8)$ и как и выше $\omega=7\omega_1$ или ω_1;

4) при $\omega=2$: $2\nmid\alpha$, $\omega_1=\omega_2=1$, $2\nmid\beta$, $u=r_1^2$;

5) при $2\mid\omega$, $\omega>2$: $2\nmid\alpha$, $\omega=14\omega_1$ или $2\omega_1$ смотря по тому β четно или нечетно и в последнем случае $\left(\frac{u}{7}\right)=\left(\frac{\omega}{7}\right)$.

Приняв только что сказанное во внимание, из формул (5.4)–(5.6) и выражений для $L(1,-\omega)$, после некоторых вычислений, получим

формулы (5.3). Вычислив значения $\varrho(n;1,1,7)$ для всех $n\leqslant 12$ по формулам (5.3), согласно (4.19), получим:

$$(5.7)\qquad \theta(\tau;1,1,7)=1+\frac{8}{3}Q+\frac{8}{3}Q^2+\frac{8}{3}Q^3+\frac{16}{3}Q^4+8Q^5+$$
$$+\frac{8}{3}Q^6+\frac{2}{3}Q^7+\frac{40}{3}Q^8+\frac{40}{3}Q^9+\frac{8}{3}Q^{10}+\frac{16}{3}Q^{11}+\frac{40}{3}Q^{12}+\ldots$$

Из (2.3) следует:

$$(5.8)\qquad \vartheta_{00}^2(\tau;0,2)\vartheta_{00}(\tau;0,14)=$$
$$=1+4Q+4Q^2+4Q^4+8Q^5+2Q^7+$$
$$+12Q^8+12Q^9+8Q^{10}+8Q^{11}+16Q^{12}+\ldots,$$

$$(5.9)\qquad \vartheta_{00}(\tau;0,2)\vartheta_{21}(\tau;0,4)\vartheta_{14,1}(\tau;0,28)=$$
$$=Q+Q^2-2Q^3-Q^4-2Q^6+$$
$$+Q^7-Q^8-Q^9+4Q^{10}+2Q^{11}+2Q^{12}+\ldots$$

Приняв во внимание (5.7)–(5.9), нетрудно проверить, что все коэффициенты при Q^n $(n\leqslant 12)$ в разложении функции $\psi(\tau;1,1,7)$ по степеням Q равны нулю. Итак, тождество (5.1) доказано.

2) Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях Q в обеих частях тождества (5.1) и принимая во внимание (4.5) и (4.19), получаем формулу (5.2).

§ 6. В настоящем параграфе рассматривается представление чисел формой $F=x_1^2+x_2^2+11x_3^2$.

Теорема 2. 1) *Имеет место тождество*

$$(6.1)\qquad \vartheta_{00}^2(\tau;0,2)\vartheta_{00}(\tau;0,22)=$$
$$=\theta(\tau;1,1,11)+\frac{8}{5}\vartheta_{00}(\tau;0,2)\vartheta_{21}(\tau;0,6)\vartheta_{22,1}(\tau;0,66).$$

2) *Пусть* $n=2^\alpha 11^\beta u$, $(u,22)=1$, $11n=r^2\omega$, $u=r_1^2\omega_1$. *Далее, пусть* $\delta=4$ *при* $\omega\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,11)$, $\delta=8$ *при* $\omega\equiv 1,3,4,5,9\,(\mathrm{mod}\,11)$ *и* $\delta=0$ *при* $\omega\equiv 2,6,7,8,10\,(\mathrm{mod}\,11)$. *Тогда*

$$(6.2)\qquad r(n;1,1,11)=\varrho(n;1,1,11)+\frac{8}{5}\nu(n),$$

где

$$(6.3)\quad \varrho(n;1,1,11) = \frac{2}{5}\left(2^{\frac{\alpha}{2}+2}-3\right)L_1 \quad \text{при} \quad \omega = 1,$$

$$= \frac{\delta}{5}\left(2^{\frac{\alpha}{2}+2}-3\right)L_2 \quad \text{при} \quad \omega \equiv 1 \pmod 4,\ \omega > 1,$$

$$= \frac{\delta}{5}\left(2^{\frac{\alpha}{2}+1}-1\right)L_3 \quad \text{при} \quad \omega \equiv 3 \pmod 8,$$

$$= \frac{\delta}{5}\,2^{\frac{\alpha}{2}+1}L_3 \quad \text{при} \quad \omega \equiv 7 \pmod 8,$$

$$= \frac{\delta}{5}\left(2^{\frac{\alpha+3}{2}}-3\right)L_5 \quad \text{при} \quad \omega \equiv 2 \pmod 8,$$

$$= \frac{\delta}{5}\left(2^{\frac{\alpha+3}{2}}-3\right)L_6 \quad \text{при} \quad \omega \equiv 6 \pmod 8,$$

а $\nu(n)$ *обозначает коэффициент при* Q^n *в разложении функции* $\vartheta_{00}(\tau;0,2)\vartheta_{21}(\tau;0,6)\vartheta_{22,1}(\tau,0,66)$ *по степеням* Q.

Доказательство. Положим

$$\psi(\tau;1,1,11) = \vartheta_{00}^2(\tau;0,2)\vartheta_{00}(\tau;0,22) - \theta(\tau;1,1,11) - $$
$$- \frac{8}{5}\vartheta_{00}(\tau;0,2)\vartheta_{21}(\tau;0,6)\vartheta_{22,1}(\tau;0,66).$$

Согласно лемме 13, функция $\psi^4(\tau;1,1,11)$ является ц.м.ф. размерностью -6, принадлежащей подгруппе $\Gamma_0(132)$, и делителя 132. Действительно, непосредственно видно, что условия (3.93) и (3.94) выполняются. Из $\alpha\delta \equiv 1 \pmod{132}$ следует, что $\alpha\delta \equiv 1 \pmod{12}$, т.е. $\alpha \equiv \delta \equiv 1$ или 5 или 7 или $11 \pmod{12}$. Следовательно, в силу (2.4) и (2.5), получаем:

$$\vartheta_{2\alpha,1}(\tau;0,6) = \vartheta_{\pm 2,1}(\tau;\alpha\mp 1,6) = \begin{cases} \vartheta_{21}(\tau;0,6) & \text{при} \quad \alpha \equiv 1, 11 \pmod{12}, \\ -\vartheta_{21}(\tau;0,6) & \text{при} \quad \alpha \equiv 5, 7 \pmod{12}, \end{cases}$$

$$\vartheta_{22\alpha,1}(\tau;0,66) = \vartheta_{\pm 22,1}(\tau;11(\alpha\mp 1),66) = \begin{cases} \vartheta_{22,1}(\tau;0,66) & \text{при} \quad \alpha \equiv 1, 11 \pmod{12}, \\ -\vartheta_{22,1}(\tau;0,66) & \text{при} \quad \alpha \equiv 5, 7 \pmod{12}, \end{cases}$$

откуда следует выполнимость условия (3.95).

Таким образом, для того чтобы показать, что функция $\psi^4(\tau;1,1,11)$ тождественно равна нулю, согласно лемме 1, достаточно показать,

что все коэффициенты при Q^n $(n \leqslant 36)$ в разложении $\psi(\tau;1,1,11)$ по степеням Q равны нулю.

В лемме 15 положим: $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 11$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$, $\Delta = 11$, $n = 2^\alpha m$, $\Delta n = 2^\alpha\cdot 11 m = 2^\alpha uv = r^2\omega$, $u = r_1^2\omega_1$, $v = 11^{\beta+1} = r_2^2\omega_2$.

Тогда получим, что

$$\varrho(n;1,1,11) = 2^{\frac{\alpha}{2}+1}\cdot 11^{\frac{\beta+1}{2}+1}\frac{\omega_1^{1/2}}{15\pi}X_2X_{11}\left(1+\left(\frac{\omega}{11}\right)\frac{1}{11}\right)\times$$
$$\times L(1,-\omega)\sum_{d\mid r_1} d\prod_{p\mid d}\left(1-\left(\frac{-\omega}{p}\right)\frac{1}{p}\right),$$

где, согласно леммам 8 и 9,

$$X_2 = \left(2^{\frac{\alpha}{2}+1}-1\right)2^{-\frac{\alpha}{2}} \quad \text{при} \quad 2\mid\alpha,\ m \equiv 1 \pmod 8,$$
$$= 2 \quad \text{при} \quad 2\mid\alpha,\ m \equiv 5 \pmod 8,$$
$$= \left(2^{\frac{\alpha}{2}+2}-3\right)2^{-\frac{\alpha}{2}-1} \quad \text{при} \quad 2\mid\alpha,\ m \equiv 3 \pmod 4,$$
$$= \left(2^{\frac{\alpha+3}{2}}-3\right)2^{-\frac{\alpha+1}{2}} \quad \text{при} \quad 2\nmid\alpha;$$

$$X_{11} = 12\cdot 11^{-\frac{\beta}{2}-1} \quad \text{при} \quad 2\mid\beta,$$
$$= \left(1+(-1)^\alpha\left(\frac{u}{11}\right)\right)11^{-\frac{\beta+1}{2}} \quad \text{при} \quad 2\nmid\beta.$$

Далее, рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 1, получаем формулы (6.3). Вычислив по этим формулам значения $\varrho(n;1,1,11)$ для всех $n \leqslant 36$, получим:

$$(6.4)\quad \theta(\tau;1,1,11) =$$
$$= 1+\frac{12}{5}Q+\frac{4}{5}Q^2+\frac{8}{5}Q^3+\frac{36}{5}Q^4+\frac{32}{5}Q^5+$$
$$+\frac{16}{5}Q^6+\frac{16}{5}Q^7+4Q^8+\frac{36}{5}Q^9+\frac{24}{5}Q^{10}+$$
$$+\frac{2}{5}Q^{11}+8Q^{12}+16Q^{13}+\frac{16}{5}Q^{14}+\frac{16}{5}Q^{15}+$$
$$+\frac{84}{5}Q^{16}+\frac{24}{5}Q^{17}+4Q^{18}+8Q^{19}+\frac{64}{5}Q^{20}+$$
$$+\frac{96}{5}Q^{21}+\frac{8}{5}Q^{23}+16Q^{24}+12Q^{25}+\frac{24}{5}Q^{26}+$$

$$+\frac{32}{5}Q^{27}+16Q^{28}+16Q^{29}+\frac{16}{5}Q^{30}+\frac{56}{5}Q^{31}+$$
$$+\frac{52}{5}Q^{32}+\frac{8}{5}Q^{33}+\frac{56}{5}Q^{34}+\frac{16}{5}Q^{35}+\frac{108}{5}Q^{36}+\ldots$$

Из (2.3) следует:

$$(6.5)\quad \vartheta_{00}^2(\tau;0,2)\,\vartheta_{00}(\tau;0,22)=$$
$$=1+4Q+4Q^2+4Q^4+8Q^5+4Q^8+4Q^9+8Q^{10}+2Q^{11}+8Q^{12}+$$
$$+16Q^{13}+8Q^{15}+20Q^{16}+8Q^{17}+4Q^{18}+8Q^{19}+16Q^{20}+16Q^{21}+$$
$$+16Q^{24}+12Q^{25}+8Q^{26}+8Q^{27}+16Q^{28}+16Q^{29}+16Q^{31}+4Q^{32}+$$
$$+8Q^{34}+28Q^{36}+\ldots,$$

$$(6.6)\quad \vartheta_{00}(\tau;0,2)\,\vartheta_{21}(\tau;0,6)\,\vartheta_{22,1}(\tau;0,66)=$$
$$=Q+2Q^2-Q^3-2Q^4+Q^5-2Q^6-2Q^7-2Q^9+$$
$$+2Q^{10}+Q^{11}-2Q^{14}+3Q^{15}+2Q^{16}+2Q^{17}+2Q^{20}-$$
$$-2Q^{21}-Q^{23}+2Q^{26}+Q^{27}-2Q^{30}+3Q^{31}-$$
$$-4Q^{32}-Q^{33}-2Q^{34}-2Q^{35}+4Q^{36}+\ldots$$

Приняв во внимание (6.4)–(6.6), нетрудно проверить, что все коэффициенты при Q^n $(n\leqslant 36)$ в разложении $\psi(\tau;1,1,11)$ по степеням Q равны нулю. Итак, тождество (6.1) доказано. Из этого тождества так же, как и при доказательстве теоремы 1, следует формула (6.2).

§ 7. В настоящем параграфе рассматривается представление чисел формой $F=x_1^2+2x_2^2+24x_3^2$.

Теорема 3. 1) *Имеет место тождество*

$$(7.1)\quad \vartheta_{00}(\tau;0,2)\,\vartheta_{00}(\tau;0,4)\,\vartheta_{00}(\tau;0,48)=$$
$$=\theta(\tau;1,2,24)\tfrac{1}{2}\vartheta_{80}(\tau;0,8)\,\vartheta_{01}(\tau;0,16)\,\vartheta_{01}(\tau;0,48)+$$
$$+\vartheta_{00}(\tau;0,8)\,\vartheta_{81}(\tau;0,16)\,\vartheta_{24,1}(\tau;0,48).$$

2) *Пусть* $n=2^a3^\beta u$, $(u,6)=1$, $48n=r^2\omega$, $u=r_1^2\omega_1$. *Далее, пусть* $\varepsilon_1=2$ *при* $a=0,2$ *и* $\varepsilon_1=6$ *при* $a>2$; $\varepsilon_2=1$ *при* $a=0$ *и* $\varepsilon_2=2$ *при* $a>0$; $\varepsilon_3=1$ *при* $a=1$, $\varepsilon_3=2$ *при* $a=3$ *и* $\varepsilon_3=6$ *при* $a>3$; $\delta=3^{\frac{\beta}{2}+1}-2$ *при* $\omega\equiv 0\pmod 3$, $\delta=4(3^{\frac{\beta+1}{2}}-1)$ *при* $\omega\equiv 1\pmod 3$ *и* $\delta=2\cdot 3^{\frac{\beta+1}{2}}$ *при* $\omega\equiv 2\pmod 3$. *Тогда*

$$(7.2)\quad r(n;1,2,24)=\begin{cases}\varrho(n;1,2,24)+\tfrac{1}{2}\nu_1(n) & \text{при}\quad n\equiv 1\pmod 8,\\ \varrho(n;1,2,24) & \text{при}\quad n\equiv 3,5,7\pmod 8,\\ \varrho(n;1,2,24)+\nu_2(n) & \text{при}\quad n\equiv 0\pmod 2,\end{cases}$$

где

$$(7.3)\quad \varrho(n;1,2,24)=\begin{cases}\varepsilon_1(3^{\frac{\beta+1}{2}}-1)L_1 & \text{при}\quad \omega=1,\\ \varepsilon_1\,\delta L_2 & \text{при}\quad \omega\equiv 1\pmod 8,\ \omega>1\\ & \text{и при}\quad \omega\equiv 5\pmod 8,\ a>0,\\ 0 & \text{при}\quad \omega\equiv 5\pmod 8,\ a=0\\ & \text{и при}\quad \omega\equiv 7\pmod 8,\\ \varepsilon_2\,\delta L_3 & \text{при}\quad \omega\equiv 3\pmod 8,\\ \varepsilon_3\cdot 3^{\frac{\beta+1}{2}}L_4 & \text{при}\quad \omega=2,\\ \varepsilon_3\,\delta L_5 & \text{при}\quad \omega\equiv 2\pmod 8,\ \omega>2,\\ \varepsilon_3\,\delta L_6 & \text{при}\quad \omega\equiv 6\pmod 8,\end{cases}$$

а $\nu_1(n)$ *и* $\nu_2(n)$ *соответственно обозначают коэффициенты при* Q^n *в разложениях функций* $\vartheta_{80}(\tau;0,8)\,\vartheta_{01}(\tau;0,16)\,\vartheta_{01}(\tau;0,48)$ *и* $\vartheta_{00}(\tau;0,8)\,\vartheta_{81}(\tau;0,16)\,\vartheta_{24,1}(\tau;0,48)$ *по степеням* Q.

Доказательство. 1) Положим

$$\psi(\tau;1,2,24)=\vartheta_{00}(\tau;0,2)\,\vartheta_{00}(\tau;0,4)\,\vartheta_{00}(\tau;0,48)-\theta(\tau;1,2,24)-$$
$$-\tfrac{1}{2}\vartheta_{80}(\tau;0,8)\,\vartheta_{01}(\tau;0,16)\,\vartheta_{01}(\tau;0,48)-$$
$$-\vartheta_{00}(\tau;0,8)\,\vartheta_{81}(\tau;0,16)\,\vartheta_{24,1}(\tau;0,48).$$

Так же, как и при доказатальстве теоремы 1, согласно лемме 13, нетрудно убедиться, что функция $\psi^4(\tau;1,2,24)$ является ц.м.ф. размерности -6, принадлежащей подгруппе $\Gamma_0(96)$, и делителя 96. Таким образом, для того, чтобы доказать, что она тождественно равна нулю, согласно лемме 1, достаточно показать, что все коэффициенты при Q^n $(n\leqslant 24)$ в разложении $\psi(\tau;1,2,24)$ по степеням Q равны нулю.

В лемме 15 положим: $a_1=24$, $a_2=2$, $a_3=1$, $b_1=3$, $b_2=b_3=1$, $\gamma_1=3$, $\gamma_2=1$, $\gamma_3=0$, $\gamma=4$, $\Delta=48$, $n=2^am$, $\Delta n=2^{a+4}\cdot 3m=2^{a+4}uv=r^2\omega$, $u=r_1^2\omega_1$, $v=3^{\beta+1}=r_2^2\omega_2$.

Тогда получим, что

$$\varrho(n;1,2,24)=2^{\frac{a}{2}}\cdot 3^{\frac{\beta+1}{2}+1}\frac{\omega_1^{1/2}}{2\pi}X_2X_3\left(1+\left(\frac{\omega}{3}\right)\frac{1}{3}\right)\times$$
$$\times L(1,-\omega)\sum_{d\mid r_1}d\prod_{p\mid d}\left(1-\left(\frac{-\omega}{p}\right)\frac{1}{p}\right),$$

где, согласно леммам 8 и 9,

$$\begin{aligned}
X_2 &= 2 && \text{при}\quad \alpha=0,\ m\equiv 1,3 \pmod 8,\\
&= 0 && \text{при}\quad \alpha=0,\ m\equiv 5,7 \pmod 8,\\
&= 1 && \text{при}\quad \alpha=1,3\\
& && \text{и при}\quad \alpha=2,\ m\equiv 3 \pmod 4,\\
&= 2^{-\frac{\alpha}{2}+2} && \text{при}\quad 2\,|\,\alpha,\ \alpha>0,\ m\equiv 1 \pmod 8,\\
&= 0 && \text{при}\quad 2\,|\,\alpha,\ \alpha>0,\ m\equiv 5 \pmod 8,\\
&= 2^{-\frac{\alpha}{2}+1}\cdot 3 && \text{при}\quad 2\,|\,\alpha,\ \alpha>2,\ m\equiv 3 \pmod 4,\\
&= 2^{-\frac{\alpha-1}{2}+1}\cdot 3 && \text{при}\quad 2\nmid\alpha,\ \alpha>3;\\
X_3 &= 2\left(3^{\frac{\beta}{2}+1}-2\right)3^{-\frac{\beta}{2}-1} && \text{при}\quad 2\,|\,\beta,\\
&= \left(2\cdot 3^{\frac{\beta+1}{2}}-(-1)^{\alpha}\left(\frac{u}{3}\right)-1\right)3^{-\frac{\beta+1}{2}} && \text{при}\quad 2\nmid\beta.
\end{aligned}$$

Далее, рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 1, получаем формулы (7.3). Вычислив по этим формулам $\varrho(n;1,2,24)$ для всех $n\leqslant 24$, получим:

$$(7.4)\qquad \theta(\tau;1,2,24) = 1+Q+Q^2+4Q^3+2Q^4+3Q^6+2Q^8+7Q^9+2Q^{10}+ \\ +4Q^{11}+4Q^{12}+2Q^{14}+2Q^{16}+6Q^{17}+7Q^{18}+4Q^{19}+4Q^{22}+6Q^{24}+\ldots$$

Из (2.3) следует:

$$(7.5)\qquad \vartheta_{00}(\tau;0,2)\vartheta_{00}(\tau;0,4)\vartheta_{00}(\tau;0,48) = 1+2Q+2Q^2+4Q^3+ \\ +2Q^4+4Q^6+2Q^8+6Q^9+4Q^{11}+4Q^{12}+2Q^{16}+4Q^{17}+6Q^{18}+ \\ +4Q^{19}+4Q^{22}+6Q^{24}+\ldots,$$

$$(7.6)\qquad \vartheta_{80}(\tau;0,8)\vartheta_{01}(\tau;0,16)\vartheta_{01}(\tau;0,48) = \\ = \sum_{h=-\infty}^{\infty} Q^{(2h+1)^2}\cdot \sum_{h=-\infty}^{\infty}(-1)^h Q^{8h^2} \sum_{h=-\infty}^{\infty}(-1)^h Q^{24h^2} = \\ = 2Q-2Q^9-4Q^{17}-2Q^{25}+\ldots,$$

$$(7.7)\qquad \vartheta_{00}(\tau;0,8)\vartheta_{81}(\tau;0,16)\vartheta_{24,1}(\tau;0,48) = \\ = \sum_{h=-\infty}^{\infty} Q^{4h^2}\cdot \sum_{h=-\infty}^{\infty}(-1)^h Q^{\frac{1}{2}(4h+1)^2} \sum_{h=-\infty}^{\infty}(-1)^h Q^{\frac{3}{2}(4h+1)^2} = \\ = Q^2+Q^6-2Q^{10}-2Q^{14}-Q^{18}+2Q^{26}+\ldots$$

Приняв во внимание (7.4)–(7.7), нетрудно проверить, что все коэффициенты при Q^n $(n\leqslant 24)$ в разложении $\psi(\tau;1,2,24)$ по степеням Q равны нулю. Итак, тождество (7.1) доказано.

2) Из разложения (7.6) следует, что в нем все показатели степеней имеют вид: $n=8j+1$, т.е.

$$(7.8)\qquad \nu_1(n)=0 \quad \text{при} \quad n\not\equiv 1 \pmod 8.$$

Из разложения (7.7) следует, что в нем все показатели степеней четные, т.е.

$$(7.9)\qquad \nu_2(n)=0 \quad \text{при нечетных } n.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях Q в обеих частях тождества (7.1) и принимая во внимание (7.8) и (7.9), получаем формулу (7.2).

§ 8. В настоящем параграфе рассматривается представление чисел формой $F=x_1^2+3x_2^2+5x_3^2$.

Теорема 4. 1) *Имеет место тождество*

$$(8.1)\qquad \vartheta_{00}(\tau;0,2)\vartheta_{00}(\tau;0,6)\vartheta_{00}(\tau;0,10) = \\ = \theta(\tau;1,3,5)-\vartheta_{00}(\tau;0,2)\vartheta_{21}(\tau;0,4)\vartheta_{30,1}(\tau;0,60).$$

2) *Пусть* $n=2^{\alpha}\cdot 3^{\beta_1}\cdot 5^{\beta_2}u$, $(u,30)=1$, $15n=r^2\omega$, $u=r_1^2\omega_1$. *Далее, пусть* $\varepsilon=1$ *при* $5\,|\,\omega$ *и* $\varepsilon=2$ *при* $5\nmid\omega$; $\delta=0$ *при* $\omega\equiv 1,4,6,9,11,14 \pmod{15}$, $\delta=3^{\frac{\beta_1+1}{2}}$ *при* $\omega\equiv 2,5,8 \pmod{15}$, $\delta=2\left(3^{\frac{\beta_1+1}{2}}-1\right)$ *при* $\omega\equiv 7,10,13 \pmod{15}$ *и* $\delta=\frac{1}{2}\left(3^{\frac{\beta_1}{2}+1}-2\right)$ *при* $\omega\equiv 0,3,12 \pmod{15}$. *Тогда*

$$(8.2)\qquad r(n;1,3,5)=\varrho(n;1,3,5)-\nu(n),$$

где

$$\begin{aligned}
(8.3)\qquad \varrho(n;1,3,5) &= \left(2^{\frac{\alpha}{2}+2}-3\right)\varepsilon\delta L_2 && \text{при}\quad \omega\equiv 1 \pmod 4,\\
&= \left(2^{\frac{\alpha}{2}+1}-1\right)\varepsilon\delta L_3 && \text{при}\quad \omega\equiv 3 \pmod 8,\\
&= 2^{\frac{\alpha}{2}+1}\varepsilon\delta L_3 && \text{при}\quad \omega\equiv 7 \pmod 8,\\
&= \left(2^{\frac{\alpha+3}{2}}-3\right)3^{\frac{\beta_1+1}{2}}L_4 && \text{при}\quad \omega=2,\\
&= \left(2^{\frac{\alpha+3}{2}}-3\right)\varepsilon\delta L_5 && \text{при}\quad \omega\equiv 2 \pmod 8,\ \omega>2,\\
&= \left(2^{\frac{\alpha+3}{2}}-3\right)\varepsilon\delta L_6 && \text{при}\quad \omega\equiv 6 \pmod 8,
\end{aligned}$$

а $\nu(n)$ *обозначает коэффициент при* Q^n *в разложении функции* $\vartheta_{00}(\tau;0,2)\vartheta_{21}(\tau;0,4)\vartheta_{30,1}(\tau;0,60)$ *по степеням* Q.

Доказательство. Положим

$$\psi(\tau;1,3,5)=\vartheta_{00}(\tau;0,2)\vartheta_{00}(\tau;0,6)\vartheta_{00}(\tau;0,10)-\theta(\tau;1,3,5)+\\+\vartheta_{00}(\tau;0,2)\vartheta_{21}(\tau;0,4)\vartheta_{30,1}(\tau;0,60).$$

Так же, как и при доказательстве теоремы 1, согласно лемме 13, нетрудно убедиться, что функция $\psi^4(\tau;1,3,5)$ является ц.м.ф. размерности -6, принадлежащей подгруппе $\Gamma_0(120)$, и делителя 120. Таким образом, для того, чтобы показать, что она тождественно равна нулю, согласно лемме 1, достаточно показать, что все коэффициенты при Q^n $(n\leqslant 36)$ в разложении $\psi(\tau;1,3,5)$ по степеням Q равны нулю.

В лемме 15 положим: $a_1=1$, $a_2=3$, $a_3=5$, $\gamma_1=\gamma_2=\gamma_3=0$, $\Delta=15$, $n=2^\alpha m$, $\Delta n=2^\alpha 15m=2^\alpha uv=r^2\omega$, $u=r_1^2\omega_1$, $v=3^{\beta_1+1}\cdot 5^{\beta_2+1}=r_2^2\omega_2$. Тогда получим, что

$$\varrho(n;1,3,5)=2^{\frac{\alpha}{2}}\cdot 3^{\frac{\beta_1+1}{2}}\cdot 5^{\frac{\beta_2+1}{2}+1}\frac{\omega_1^{1/2}}{4\pi}X_2X_3X_5\left(1+\left(\frac{\omega}{3}\right)\frac{1}{3}\right)\times\\\times\left(1-\left(\frac{\omega}{5}\right)\frac{1}{5}\right)L(1,-\omega)\sum_{d|r_1}d\prod_{p|d}\left(1-\left(\frac{-\omega}{p}\right)\frac{1}{p}\right),$$

где, согласно леммам 8 и 9,

$$\begin{aligned}
X_2&=2 && \text{при}\quad 2|\alpha,\ m\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,8),\\
&=\left(2^{\frac{\alpha}{2}+1}-1\right)2^{-\frac{\alpha}{2}} && \text{при}\quad 2|\alpha,\ m\equiv 5\,(\mathrm{mod}\,8),\\
&=\left(2^{\frac{\alpha}{2}+2}-3\right)2^{-\frac{\alpha}{2}-1} && \text{при}\quad 2|\alpha,\ m\equiv 3\,(\mathrm{mod}\,4),\\
&=\left(2^{\frac{\alpha+3}{2}}-3\right)2^{-\frac{\alpha+1}{2}} && \text{при}\quad 2\nmid\alpha;\\
X_3&=2\left(3^{\frac{\beta_1}{2}+1}-2\right)3^{-\frac{\beta_1}{2}-1} && \text{при}\quad 2|\beta_1,\\
&=\left(2\cdot 3^{\frac{\beta_1+1}{2}}+(-1)^{\alpha+\beta_2}\left(\frac{u}{3}\right)-1\right)3^{-\frac{\beta_1+1}{2}} && \text{при}\quad 2\nmid\beta_1;\\
X_5&=6\cdot 5^{-\frac{\beta_2}{2}-1} && \text{при}\quad 2|\beta_2,\\
&=\left(1+(-1)^{\alpha+\beta_1}\left(\frac{u}{5}\right)\right)5^{-\frac{\beta_2+1}{2}} && \text{при}\quad 2\nmid\beta_2.
\end{aligned}$$

Очевидно, что

1) при $2\nmid\omega$: $\omega=15\omega_1$, если $2|\beta_1, 2|\beta_2$; $\omega=3\omega_1$, если $2|\beta_1, 2\nmid\beta_2$, в этом случае $\left(\frac{u}{5}\right)=-\left(\frac{\omega}{5}\right)$; $\omega=5\omega_1$, если $2\nmid\beta_1, 2|\beta_2$, в этом случае $\left(\frac{u}{3}\right)=-\left(\frac{\omega}{3}\right)$; $\omega=\omega_1$, если $2\nmid\beta_1, 2\nmid\beta_2$, в этом случае $\left(\frac{u}{p}\right)=\left(\frac{\omega}{p}\right)$ $(p=3,5)$;

2) при $2|\omega$: $\omega=30\omega_1$, если $2|\beta_1, 2|\beta_2$; $\omega=6\omega_1$, если $2|\beta_1, 2\nmid\beta_2$, в этом случае $\left(\frac{u}{5}\right)=\left(\frac{\omega}{5}\right)$; $\omega=10\omega_1$, если $2\nmid\beta_1, 2|\beta_2$, в этом случае $\left(\frac{u}{3}\right)=\left(\frac{\omega}{3}\right)$; $\omega=2\omega_1$, если $2\nmid\beta_1, 2\nmid\beta_2$, в этом случае $\left(\frac{u}{p}\right)=-\left(\frac{\omega}{p}\right)$ $(p=3,5)$.

В силу этого, рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 1, получаем формулы (8.3). Вычислив по этим формулам $\varrho(n;1,3,5)$ дяа всех $n\leqslant 36$, получим:

$$\theta(\tau;1,3,5)=1+2Q+Q^2+3Q^3+4Q^4+Q^5+4Q^6+2Q^7+5Q^8+\\+14Q^9+2Q^{11}+15Q^{12}+6Q^{13}+2Q^{14}+8Q^{16}+\\+12Q^{17}+7Q^{18}+4Q^{19}+3Q^{20}+18Q^{21}+2Q^{22}+\\+2Q^{23}+20Q^{24}+2Q^{25}+4Q^{26}+9Q^{27}+10Q^{28}+\\+6Q^{29}+3Q^{30}+4Q^{31}+13Q^{32}+32Q^{33}+4Q^{34}+\\+28Q^{36}+\ldots \tag{8.4}$$

Из (2.3) следует:

$$\vartheta_{00}(\tau;0,2)\vartheta_{00}(\tau;0,6)\vartheta_{00}(\tau;0,10)=1+2Q+2Q^3+6Q^4+\\+2Q^5+4Q^6+4Q^7+4Q^8+14Q^9+14Q^{12}+4Q^{13}+4Q^{14}+\\+6Q^{16}+12Q^{17}+8Q^{18}+4Q^{19}+2Q^{20}+20Q^{21}+\\+4Q^{23}+20Q^{24}+2Q^{25}+8Q^{26}+10Q^{27}+12Q^{28}+4Q^{29}+\\+4Q^{30}+4Q^{31}+16Q^{32}+32Q^{33}+26Q^{36}+\ldots, \tag{8.5}$$

$$\vartheta_{00}(\tau;0,2)\vartheta_{21}(\tau;0,4)\vartheta_{30,1}(\tau;0,60)=Q^2+Q^3-2Q^4-Q^5-\\-2Q^7+Q^8+2Q^{11}+Q^{12}+2Q^{13}-2Q^{14}+2Q^{16}-Q^{18}+\\+Q^{20}-2Q^{21}+2Q^{22}-2Q^{23}-4Q^{26}-Q^{27}-2Q^{28}+\\+2Q^{29}-Q^{30}-3Q^{32}+4Q^{34}+2Q^{36}+\ldots \tag{8.6}$$

Приняв во внимание (8.4)–(8.6), нетрудно проверить, что все коэффициенты при Q^n $(n\leqslant 36)$ в разложении $\psi(\tau;1,3,5)$ по степеням Q равны нулю. Итак, тождество (8.1) доказано. Из этого тождества так же, как и при доказательстве теоремы 1, следует формула (8.2).

§ 9. В настоящем параграфе рассматривается представление чисел формой $F = x_1^2+3x_2^2+8x_3^2$.

Теорема 5. 1) *Имеет место тождество*

$$\vartheta_{00}(\tau;0,2)\vartheta_{00}(\tau;0,6)\vartheta_{00}(\tau;0,16) = \theta(\tau;1,3,8)+\vartheta_{01}(\tau;0,4)\vartheta_{40}(\tau;0,8)\vartheta_{12,0}(\tau;0,24). \tag{9.1}$$

2) *Пусть* $n = 2^\alpha 3^\beta u$, $(u,6)=1$, $24n = r^2\omega$, $u = r_1^2\omega_1$. *Далее, пусть* $\varepsilon = 1$ *при* $\alpha = 0$ *и* $\varepsilon = 6$ *при* $\alpha > 0$; $\delta = 3^{\frac{\beta}{2}+1}-2$ *при* $\omega \equiv 0 \pmod 3$, $\delta = 4(3^{\frac{\beta+1}{2}}-1)$ *при* $\omega \equiv 1 \pmod 3$ *и* $\delta = 2\cdot 3^{\frac{\beta+1}{2}}$ *при* $\omega \equiv 2 \pmod 3$. *Тогда*

$$\begin{aligned} r(n;1,3,8) &= \varrho(n;1,3,8)+\nu(n) && \text{при нечетных } n,\\ &= \varrho(n;1,3,8) && \text{при четных } n, \end{aligned} \tag{9.2}$$

где

$$\begin{aligned} \varrho(n;1,3,8) &= 6(3^{\frac{\beta+1}{2}}-1)L_1 && \text{при} \quad \omega = 1,\ \alpha > 1,\\ &= 6\delta L_2 && \text{при} \quad \omega \equiv 1 \pmod 4,\ \omega > 1,\ \alpha > 1,\\ &= 2\delta L_3 && \text{при} \quad \omega \equiv 3 \pmod 8,\ \alpha > 1,\\ &= 0 && \text{при} \quad \omega \equiv 7 \pmod 8 \text{ и при } \alpha = 1,\\ &= \varepsilon\cdot 3^{\frac{\beta+1}{2}} L_4 && \text{при} \quad \omega = 2,\\ &= \varepsilon\delta L_5 && \text{при} \quad \omega \equiv 2 \pmod 8,\ \omega > 2,\\ &= \varepsilon\delta L_6 && \text{при} \quad \omega \equiv 6 \pmod 8, \end{aligned} \tag{9.3}$$

а $\nu(n)$ *обозначает коэффициент при* Q^n *в разложении функции* $\vartheta_{01}(\tau;0,4)\vartheta_{40}(\tau;0,8)\vartheta_{12,0}(\tau;0,24)$ *по степеням* Q.

Доказательство. 1) Для доказательства тождества (9.1), так же как и в предыдущих теоремах, достаточно показать, что все коэффициенты при Q^n $(n \leqslant 24)$ в разложении функции

$$\psi(\tau;1,3,8) = \vartheta_{00}(\tau;0,2)\vartheta_{00}(\tau;0,6)\vartheta_{00}(\tau;0,16) - \theta(\tau;1,3,8)-\vartheta_{01}(\tau;0,4)\vartheta_{40}(\tau;0,8)\vartheta_{12,0}(\tau;0,24)$$

по степеням Q равны нулю.

При помощи лемм 15, 8 и 9, так же как и в предыдущих теоремах, получаем формулы (9.3). Вычислив по этим формулам значения $\varrho(n;1,3,8)$ для всех $n \leqslant 24$, получим:

$$\theta(\tau;1,3,8) = 1+Q+3Q^3+6Q^4+2Q^5+2Q^7+2Q^8+7Q^9+ +4Q^{11}+18Q^{12}+2Q^{13}+8Q^{15}+6Q^{16}+2Q^{17}+4Q^{19}+12Q^{20}+ +12Q^{21}+4Q^{23}+12Q^{24}+\ldots \tag{9.4}$$

Из (2.3) следует:

$$\vartheta_{00}(\tau;0,2)\vartheta_{00}(\tau;0,6)\vartheta_{00}(\tau;0,16) = 1+2Q+2Q^3+6Q^4+ +4Q^7+2Q^8+6Q^9+4Q^{11}+18Q^{12}+4Q^{13}+8Q^{15}+ +6Q^{16}+4Q^{17}+4Q^{19}+12Q^{20}+12Q^{21}+12Q^{24}+\ldots, \tag{9.5}$$

$$\begin{aligned} &\vartheta_{01}(\tau;0,4)\vartheta_{40}(\tau;0,8)\vartheta_{12,0}(\tau;0,24) = \\ &= \sum_{h=-\infty}^{\infty}(-1)^h Q^{2h^2}\cdot \sum_{h=-\infty}^{\infty} Q^{\frac{1}{4}(4h+1)^2} \sum_{h=-\infty}^{\infty} Q^{\frac{3}{4}(4h+1)^2} = \\ &= Q-Q^3-2Q^5+2Q^7-Q^9+2Q^{13}+2Q^{17}-4Q^{23}-3Q^{25}+\ldots \end{aligned} \tag{9.6}$$

Приняв во внимание (9.4)–(9.6), нетрудно проверить, что все коэффициенты при Q^n $(n \leqslant 24)$ в разложении функции $\psi(\tau;1,3,8)$ по степеням Q равны нулю. Итак, тождество (9.1) доказано.

2) Из разложения (9.6) следует, что в нем все показатели степеней нечетные, т.е. $\nu(n) = 0$ при четных n. Из тождества (9.1), таким образом, следует формула (9.2).

§ 10. В настоящем параграфе рассматривается представление чисел формой $F = x_1^2+4x_2^2+5x_3^2$.

Теорема 6. 1) *Имеет место тождество*

$$\vartheta_{00}(\tau;0,2)\vartheta_{00}(\tau;0,8)\vartheta_{00}(\tau;0,10) = \theta(\tau;1,4,5)-\tfrac{2}{3}\vartheta_{00}(\tau;0,2)\vartheta_{41}(\tau;0,20)\vartheta_{12,1}(\tau;0,20). \tag{10.1}$$

2) *Пусть* $n = 2^\alpha 5^\beta u$, $(u,10)=1$, $20n = r^2\omega$, $u = r_1^2\omega_1$. *Далее, пусть* $\varepsilon_1 = 2$ *при* $\alpha = 0$ *и* $\varepsilon_1 = 3$ *при* $\alpha > 0$; $\varepsilon_2 = 1$ *при* $\alpha = 1$ *и* $\varepsilon_2 = 3$ *при* $\alpha > 1$; $\delta = 5^{\frac{\beta}{2}+1}-3$ *при* $\omega \equiv 0 \pmod 5$, $\delta = 4\cdot 5^{\frac{\beta+1}{2}}$ *при* $\omega \equiv 1, 4 \pmod 5$ *и* $\delta = 6(5^{\frac{\beta+1}{2}}-1)$ *при* $\omega \equiv 2, 3 \pmod 5$. *Тогда*

$$\begin{aligned} r(n;1,4,5) &= \varrho(n;1,4,5)-\frac{2}{3}\nu(n) && \text{при} \quad n \equiv 1, 2 \pmod 4,\\ &= \varrho(n;1,4,5) && \text{при} \quad n \equiv 0, 3 \pmod 4, \end{aligned} \tag{10.2}$$

где

$$\begin{aligned} \varrho(n;1,4,5) &= \frac{2}{3}\varepsilon_1\cdot 5^{\frac{\beta+1}{2}} L_1 && \text{при} \quad \omega = 1,\\ &= \frac{2}{3}\varepsilon_1\delta L_2 && \text{при} \quad \omega \equiv 1 \pmod 4,\ \omega > 1,\\ &= \frac{2}{3}\delta L_3 && \text{при} \quad \omega \equiv 3 \pmod 8,\ \alpha > 0, \end{aligned} \tag{10.3}$$

$$= 0 \qquad \textit{при} \quad \omega \equiv 3 \pmod 8,\ \alpha = 0$$
$$\textit{и при} \quad \omega \equiv 7 \pmod 8,$$
$$= 2\varepsilon_2 (5^{\frac{\beta+1}{2}} - 1) L_4 \quad \textit{при} \quad \omega = 2,$$
$$= \frac{2}{3}\varepsilon_2 \delta L_5 \qquad \textit{при} \quad \omega \equiv 2 \pmod 8,\ \omega > 2,$$
$$= \frac{2}{3}\varepsilon_2 \delta L_6 \qquad \textit{при} \quad \omega \equiv 6 \pmod 8,$$

а $\nu(n)$ *обозначает коэффициент при* Q^n *в разложении функции* $\vartheta_{00}(\tau;0,2)\vartheta_{41}(\tau;0,20)\vartheta_{12,1}(\tau;0,20)$ *по степеням* Q.

Доказательство. 1) Положим

$$\psi(\tau;1,4,5) = \vartheta_{00}(\tau;0,2)\vartheta_{00}(\tau;0,8)\vartheta_{00}(\tau;0,10) - \theta(\tau;1,4,5) + \frac{2}{3}\vartheta_{00}(\tau;0,2)\vartheta_{41}(\tau;0,20)\vartheta_{12,1}(\tau;0,20).$$

Согласно лемме 13, функция $\psi^4(\tau;1,4,5)$ является ц.м.ф. размерности -6, принадлежащей подгруппе $\Gamma_0(80)$, и делителя 80. Действительно, непосредственно видно, что условия (3.93) и (3.94) выполняются. Из $\alpha\delta \equiv 1 \pmod{80}$ следует: $\alpha \equiv 1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19 \pmod{20}$ и, соответственно, $\delta \equiv 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4 \pmod 5$. Следовательно, в силу (2.4) и (2.5), получаем:

$$\vartheta_{4\alpha,1}(\tau;0,20)\vartheta_{12\alpha,1}(\tau;0,20) = \vartheta_{\pm 4,1}(\tau;2(\alpha\mp 1),20)\,\vartheta_{\pm 12,1}(\tau;6(\alpha\mp 1),20) = \vartheta_{41}(\tau;0,20)\vartheta_{12,1}(\tau;0,20)$$

при $\alpha \equiv 1, 19 \pmod{20}$ и при $\alpha \equiv 9, 11 \pmod{20}$,

$$\vartheta_{4\alpha,1}(\tau;0,20)\vartheta_{12\alpha,1}(\tau;0,20) = \vartheta_{\pm 12,1}(\tau;2(\alpha\mp 3),20)\,\vartheta_{\pm 4,1}(\tau;2(3\alpha\mp 1),20) = -\vartheta_{41}(\tau;0,20)\vartheta_{12,1}(\tau;0,20)$$

при $\alpha \equiv 3, 17 \pmod{20}$ и при $\alpha \equiv 7, 13 \pmod{20}$, откуда следует выполнимость условия (3.95), ибо в первом случае $\left(\frac{5}{|\delta|}\right) = 1$, во втором же $\left(\frac{5}{|\delta|}\right) = -1$.

Таким образом, для доказательства тождества (10.1), так же как и в предыдущих теоремах, достаточно показать, что все коэффициенты при Q^n $(n \leqslant 18)$ в разложении функции $\psi(\tau;1,4,5)$ по степеням Q равны нулю.

При помощи лемм 15, 8 и 9, получаем формулы (10.3). Вычислив по этим формулам значения $\varrho(n;1,4,5)$ для всех $n \leqslant 18$, получим:

$$(10.4)\quad \theta(\tau;1,4,5) = 1 + \frac{8}{3}Q + \frac{4}{3}Q^2 + 4Q^4 + \frac{20}{3}Q^5 + \frac{8}{3}Q^6 + 4Q^8 + 8Q^9 + 8Q^{10} + \frac{32}{3}Q^{13} + \frac{8}{3}Q^{14} + 4Q^{16} + \frac{16}{3}Q^{17} + \frac{20}{3}Q^{18} + \ldots$$

Из (2.3) следует:

$$(10.5)\quad \vartheta_{00}(\tau;0,2)\vartheta_{00}(\tau;0,8)\vartheta_{00}(\tau;0,10) = 1 + 2Q + 4Q^4 + 6Q^5 + 4Q^6 + 4Q^8 + 10Q^9 + 8Q^{10} + 12Q^{13} + 4Q^{14} + 4Q^{16} + 4Q^{17} + 8Q^{18} + \ldots,$$

$$(10.6)\quad \vartheta_{00}(\tau;0,2)\vartheta_{41}(\tau;0,20)\vartheta_{12,1}(\tau;0,20) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} Q^{h^2}\cdot \sum_{h=-\infty}^{\infty} (-1)^h Q^{\frac{1}{10}(10h+1)^2} \sum_{h=-\infty}^{\infty} (-1)^h Q^{\frac{1}{10}(10h+3)^2} = Q + 2Q^2 + Q^5 - 2Q^6 - 3Q^9 - 2Q^{13} - 2Q^{14} + 2Q^{17} - 2Q^{18} + \ldots$$

Приняв во внимание (10.4)–(10.6), нетрудно проверить, что все коэффициенты при Q^n $(n \leqslant 18)$ в разложении $\psi(\tau;1,4,5)$ по степеням Q равны нулю. Итак, тождество (10.1) доказано.

2) Из разложения (10.6) следует, что в нем показатели степеней имеют вид: $n = h_1^2 + 1 + 2h_2(5h_2+1) + 2h_3(5h_3+3) \equiv 1$ или $2 \pmod 4$, т.е.

$$(10.7)\qquad \nu(n) = 0 \quad \text{при} \quad n \equiv 0, 3 \pmod 4.$$

Из (10.1) и (10.7) следует формула (10.2).

Цитированная литература

[1] P. T. Bateman, *On the representation of a number as the sum of three squares*, Trans. Amer. Math. Soc. 71 (1951), стр. 70–101.

[2] G. Dirichlet, *Recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres*, Werke I, Berlin 1889, стр. 411–496.

[3] G. Lomadse, *Über die Darstellung der Zahlen durch einige ternäre quadratische Formen*, Acta Arith. 6 (1961), стр. 225–275.

[4] Г. А. Ломадзе, *О представлении чисел положительными бинарными диагональными квадратичными формами*, Мат. сб. 68 (2) (1965), стр. 282–312.

Получено 15. 6. 1970 (99)