ACTA ARITHMETICA
XIX (1971)

О представлении чисел положительными тернарными диагональными квадратичными формами, I*

Г. А. Ломадзе (Тбилиси)

§ 1. Если не считать большого числа работ, относящихся к представлению чисел суммами трех квадратов целых чисел, вопросу о числе представлений натуральных чисел положительными тернарными квадратичными формами, до нашей работы [4], посвящены были лишь работы Успенского [10] и Маасса [7]. В первой из них рассмотрены 16 и во второй — 10 тернарных квадратичных форм, принадлежащих одноклассным родам и притом с бесквадратными коэффициентами. В работе [4] дается общий прием нахождения точных формул для числа представлений натуральных чисел произвольными положительными диагональными тернарными квадратичными формами, независимо от того, принадлежат они одноклассным или многоклассным родам. Однако, эта работа имеет ряд недостатков.

Целью предлагаемой работы в основном именно и является устранение этих недостатков.

Во-первых, в работе [4] мы пользовались аппаратом целых модулярных форм, принадлежащих главной группе сравнений $\Gamma(N)$, что требовало весьма трудоемких вычислений; в настоящей же работе используется аппарат целых модулярных форм, принадлежащих группе сравнений $\Gamma_0(N)$, что дает возможность значительно сократить объем вычислений.

В § 3 предлагаемой работы дается более простое и усовершенствованное изложение содержания § 4 работы [4]. Однако, объем этого параграфа несколько увеличился ввиду того, что лемму 16 работы [4] пришлось заменить леммами 7 и 10 настоящей работы, ибо упомянутая лемма 16 сформулирована неточно, а ее доказательство неполно.

Далее, в работе [4] вместо сингулярного ряда, соответствующего тернарным квадратичным формам, мы пользовались функцией (5.2)

---

* От редакции. Вторая часть работы будет напечатана в номере XIX.4 журнала.

работы [4] (стр. 249), являющейся своего рода „обобщенным сингулярным рядом", что естественно нежелательно. В настоящей работе мы показываем, что сингулярный ряд проблемы сходится и совпадает с функцией (5.2) работы [4].

Наконец, в предлагаемой работе мы даем значительно более простую формулу для числа представлений чисел формой $F = x_1^2+x_2^2+7x_3^2$, чем в работе [4], а также выводим формулы для числа представлений чисел формами: $x_1^2+x_2^2+11x_3^2$, $x_1^2+2x_2^2+24x_3^2$, $x_1^2+3x_2^2+5x_3^2$, $x_1^2+3x_2^2+8x_3^2$ и $x_1^2+4x_2^2+5x_3^2$, принадлежащими многоклассным родам.

§ 2. В настоящей работе будут применяться следующие обозначения: $N, a, d, k, n, q, r, \lambda, \varrho, \sigma, \omega, \xi, \eta$ — натуральные числа (за исключением формулы (3.1), в которой q — целое); b, u, v — нечетные натуральные числа; p — простые числа; $\varkappa, l$ — неотрицательные целые числа; $H, c, g, h, j, m, x, y, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu$ — целые числа; ν, t — действительные числа; i — мнимая единица; z, ζ, τ, A, C — комплексные величины, причем $\operatorname{Im}\tau > 0$. K обозначает положительное число, необязательно всюду одно и то же и возможно зависящее от параметров. Эти буквы, в случае надобности, будут сопровождаться индексами и штрихами.

$d|m$ обозначает, что d делит m; $d\nmid m$ обозначает, что d не делит m; $p^\lambda\|m$ обозначает, что $p^\lambda|m$, но $p^{\lambda+1}\nmid m$ (при $m=0$ полагаем $\lambda=\infty$, т.е. λ больше любого наперед заданного числа); $p^0\|m$ обозначает, что $p\nmid m$. $\left(\dfrac{h}{u}\right)$ обозначает обобщенный символ Якоби.

Далее, положим: $I(u) = i^{(1/4)(u-1)^2}$, $e(z) = e^{2\pi iz}$. $\sum\limits_{h \bmod q}$ и $\sum\limits_{h \bmod q}{}'$ обозначают суммы, в которых h пробегает полную и, соответственно, приведенную системы вычетов по модулю q. Пустые суммы предполагаем равными нулю, а пустые произведения — равными единице.

Теперь для удобства ссылок, приведем необходимые определения и в виде лемм сформулируем некоторые известные результаты.

Определение 1. Если $z\neq 0$, то полагаем

$$z^{k/2} = (z^{1/2})^k, \qquad -\frac{\pi}{2} < \arg z^{1/2} \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Пусть Γ — модулярная группа, т.е. группа линейных подстановок $\tau' = \dfrac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}$, где $\alpha\delta-\beta\gamma = 1$. Далее, пусть $\Gamma_0(N)$ обозначает ту подгруппу группы Γ, подстановки которой удовлетворяют сравнению $\gamma\equiv 0 \pmod N$).

Определение 2 (см., напр., [2], стр. 716 и [3], стр. 808–809). Аналитическая функция $F(\tau)$ называется *целой модулярной формой* (в дальнейшем будем писать ц.м.ф.) размерности $-r$, принадлежащей группе $\Gamma_0(N)$, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) $F(\tau)$ регулярна и однозначна в верхней полуплоскости;

2) для каждой подстановки группы $\Gamma_0(N)$

$$F\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) = (\gamma\tau+\delta)^r F(\tau);$$

3) в окрестности $\tau=\infty$ имеет место разложение

$$F(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m e\left(\frac{m\tau}{N}\right); \tag{2.1}$$

4) в окрестности $\tau = -\delta/\gamma$ ($\gamma\neq 0$, $(\gamma,\delta)=1$) имеет место разложение

$$(\gamma\tau+\delta)^r F(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} C'_m e\left(\frac{m}{N}\,\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right),$$

где $\alpha\delta-\beta\gamma=1$.

Определение 3 (см., напр., [3], стр. 808 и 811). Ц.м.ф. $F(\tau)$ называется *функцией делителя* N, если все показатели степеней m, встречающиеся в разложении (2.1), делятся на N. Тогда (2.1) принимает вид

$$F(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m e(m\tau). \tag{2.2}$$

Лемма 1 (см., напр., [3], стр. 811 и 953). *Ц.м.ф. $F(\tau)$ размерности $-r$, принадлежащая группе $\Gamma_0(N)$, и делителя N, тождественно равна нулю, если в ее разложении* (2.2)

$$A_m = 0 \qquad \text{для всех } m \leqslant \frac{r}{12} N\prod_{p|N}\left(1+\frac{1}{p}\right).$$

Лемма 2 (см., напр., [9], стр. 27). *Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\zeta_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\zeta_n|^2$ сходятся, то сходится также и произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+\zeta_n)$.*

Лемма 3 ([8], стр. 31, лемма 31 или [1], стр. 345 и 392–394). *При $\operatorname{Re}(z+\zeta)>1$ интеграл*

$$U(z;\zeta,\tau,\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e(-\nu t)}{(t+\tau)^\zeta\, |t+\tau|^z}\,dt$$

сходится абсолютно. Функция $U(z;\zeta,\tau,\nu)$ обладает следующими свойствами:

1) *при* $\nu \neq 0$ *она продолжаема во всю z-плоскость;*

2) $U(z;\zeta,\tau,0)$ *регулярна в полуплоскости* $\operatorname{Re}(z+\zeta)>1$;

3) *если* D — *некоторая ограниченная область z-плоскости и* $\nu\neq 0$, *то в* D *имеет место неравенство:*

$$|U(z;\zeta,\tau,\nu)|<Ke^{-K'|\nu|},$$

причем K *и* K' *не зависят ни от* ν, *ни от* z; *если* $\nu=0$, *то это неравенство имеет место при* $\operatorname{Re}z>1-\operatorname{Re}\zeta$;

4) $$U(0;\zeta,\tau,\nu)=\begin{cases}0 & \text{при}\quad \nu<0,\\ \dfrac{(2\pi)^{\zeta}\nu^{\zeta-1}}{\Gamma(\zeta)e(\zeta/4)}\,e(\nu\tau) & \text{при}\quad \nu>0,\ \zeta\neq 0,-1,-2,\ldots\end{cases}$$

$$U(0;\zeta,\tau,0)=0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Re}\zeta>1.$$

Наконец, пусть

$$\vartheta_{gh}(\tau;c,N)=\sum_{m\equiv c \,(\mathrm{mod}\, N)}(-1)^{h(m-c)/N}e\left(\frac{(m+g/2)^2}{2N}\,\tau\right). \tag{2.3}$$

Из (2.3) *следует, что*

$$\begin{aligned}\vartheta_{g+2j,h}(\tau;c,N)&=\vartheta_{gh}(\tau;c+j,N),\\ \vartheta_{gh}(\tau;c+Nj,N)&=(-1)^{hj}\vartheta_{gh}(\tau;c,N),\end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\vartheta_{-g,h}(\tau;0,N)=\vartheta_{gh}(\tau;0,N). \tag{2.5}$$

В дальнейшем мы также будем пользоваться некоторыми хорошо известными результатами, которые будем цитировать по работам [4] и [5].

§ 3. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что коэффициенты формы $F=a_1x_1^2+a_2x_2^2+a_3x_3^2$ взаимно просты. Определитель F будем обозначать через Δ, а общее наименьшее кратное всех коэффициентов a_k — через a.

В работе [5] (стр. 286) рассмотрена функция $\Psi_s(\tau,z)$, определенная для произвольной диагональной квадратичной формы с s переменными формулой (3.1). В случае $s=3$, эта функция, регулярная при фиксированном τ и $\operatorname{Re}z>\frac{1}{2}$, принимает вид

$$\Psi(\tau,z)=1+\frac{1}{2\Delta^{1/2}}\left(\frac{i}{2}\right)^{3/2}\sum_{\substack{q,H=-\infty\\(H,q)=1}}^{\infty}{}' i^{(3/2)(\operatorname{sgn}q-1)}\frac{\prod_{k=1}^{3}S(-a_kH\operatorname{sgn}q,|q|)}{|q|^{3/2}(q\tau+H)^{3/2}|q\tau+H|^{z}}, \tag{3.1}$$

где штрих обозначает, что отсутствуют члены с $q=0$, а S — сумма Гаусса. Нашей ближайшей целью является нахождение аналитического продолжения этой функции в полуплоскость $\operatorname{Re}z>-\frac{1}{2}$.

В дальнейшем, из работы [5] нам понадобятся следующие три леммы, которые мы здесь сформулируем для случая $s=3$.

Лемма 4 ([5], стр. 287, лемма 16). *Пусть*

$$A_q\left(\frac{\mu}{4a}\right)=q^{-3}\sum_{h\bmod q}{}' e\left(-\frac{\mu h}{4aq}\right)\prod_{k=1}^{3}S(a_kh,q). \tag{3.2}$$

Тогда при $\operatorname{Re}z>\frac{1}{2}$

$$\Psi(\tau,z)=1+\frac{e(3/8)}{2^{(5/2)+2z}\Delta^{1/2}a^{(1/2)+z}}\sum_{\substack{\mu=-\infty\\4a_1\mu}}^{\infty}T(\mu,z)V\left(\frac{\mu}{4a},z\right), \tag{3.3}$$

где

$$T(\mu,z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e(-\mu t)}{\left(\frac{\tau}{4a}+t\right)^{3/2}\left|\frac{\tau}{4a}+t\right|^{z}}\,dt, \tag{3.4}$$

$$V\left(\frac{\mu}{4a},z\right)=\sum_{q=1}^{\infty}A_q\left(\frac{\mu}{4a}\right)q^{-z}. \tag{3.5}$$

Лемма 5 ([5], стр. 287, лемма 17). *Пусть*

$$X_p\left(\frac{\mu}{4a},z\right)=1+\sum_{\lambda=1}^{\infty}A_{p^\lambda}\left(\frac{\mu}{4a}\right)p^{-\lambda z}. \tag{3.6}$$

Тогда при $\operatorname{Re}z>\frac{1}{2}$

$$V\left(\frac{\mu}{4a},z\right)=\prod_{p}X_p\left(\frac{\mu}{4a},z\right). \tag{3.7}$$

Лемма 6 ([5], стр. 288, лемма 18). *При* $\operatorname{Re}z>\frac{1}{2}$ *для всякой подстановки группы* $\Gamma_0(4a)$ *имеет место соотношение*

$$\Psi\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta},z\right)= \tag{3.8}$$

$$=i^{(3/2)\eta(\gamma)(\operatorname{sgn}\delta-1)}i^{(3/4)(|\delta|-1)^2}\left(\frac{\Delta}{|\delta|}\right)\left(\frac{\beta\operatorname{sgn}\delta}{|\delta|}\right)(\gamma\tau+\delta)^{3/2}|\gamma\tau+\delta|^{z}\Psi(\tau,z),$$

где $\eta(\gamma)=1$ *при* $\gamma\geqslant 0$ *и* $\eta(\gamma)=-1$ *при* $\gamma<0$.

Лемма 7. *Функция* $V(0,z)$, *определенная при* $\operatorname{Re}z>\frac{1}{2}$ *формулами* (3.5) *и* (3.2), *аналитически продолжаема в полуплоскость* $\operatorname{Re}z>-\frac{1}{2}$ *и регулярна в этой полуплоскости.*

Доказательство. I. Начнем с нахождения значений $A_{2^\lambda}\left(\frac{\mu}{4a}\right)$ при $4a|\mu$.

Пусть

$$\frac{\mu}{4a} = 2^a m \ (a \geqslant 0, 2\nmid m), \qquad a_k = 2^{\gamma_k} b_k \ (k = 1, 2, 3),$$

$\gamma_1 \geqslant \gamma_2 \geqslant \gamma_3 = 0$, b — общее наименьшее кратное всех b_k.

Если в (3.2) положить $q = 2^\lambda$, а затем вместо h ввести новую переменную суммирования y, определенную с помощью сравнения $h \equiv by \pmod{2^\lambda}$, то получим:

$$A_{2^\lambda}\left(\frac{\mu}{4a}\right) = 2^{-3\lambda} \sideset{}{'}\sum_{y \bmod 2^\lambda} e(-2^{a-\lambda}mby) \prod_{k=1}^{3} S(2^{\gamma_k} b_k by, 2^\lambda). \tag{3.9}$$

Из (3.9), согласно леммам 2, 4 и 6 работы [5], получаем для четных γ_2 (ниже $c(2^a mb, 2^\lambda)$ обозначает сумму Рамануджана):

1) если $\lambda = 1, \gamma_2+1, \gamma_1+1$, то

$$A_{2^\lambda}\left(\frac{\mu}{4a}\right) = 0; \tag{3.10}$$

2) если $2 \leqslant \lambda \leqslant \gamma_2$, $2|\lambda$, то

$$A_{2^\lambda}\left(\frac{\mu}{4a}\right) = 2^{-\lambda/2}\left\{c(2^a mb, 2^\lambda) + \sideset{}{'}\sum_{y \bmod 2^\lambda} e\left(\frac{bb_3 y}{4} - 2^{a-\lambda} mby\right)\right\} = \tag{3.11}$$

$$= 2^{-\lambda/2}\left\{c(2^a mb, 2^\lambda) + e\left(\frac{bb_3}{4} - 2^{a-\lambda} mb\right) \sum_{\varkappa=0}^{2^{\lambda-1}-1} e\left(\frac{bb_3\varkappa}{2} - \frac{2^{a+2-\lambda} mb\varkappa}{2}\right)\right\} =$$

$$= \begin{cases} 2^{-\lambda/2} \cdot 2^{\lambda-1} = 2^{(\lambda/2)-1} & \text{при} \quad \lambda < a+1, \\ -2^{-\lambda/2} \cdot 2^{\lambda-1} = -2^{(a-1)/2} & \text{при} \quad \lambda = a+1, \\ 2^{-\lambda/2}(-1)^{(b_3-m)/2} 2^{\lambda-1} = (-1)^{(m-b_3)/2} \cdot 2^{a/2} & \text{при} \quad \lambda = a+2, \\ 0 & \text{при} \quad \lambda > a+2; \end{cases}$$

22) если $2 \leqslant \lambda \leqslant \gamma_2$, $2 \nmid \lambda$, то

$$A_{2^\lambda}\left(\frac{\mu}{4a}\right) = \begin{cases} (-1)^{(m-b_3)/4} \cdot 2^{(a/2)+1} & \text{при} \quad \lambda = a+3, \ m \equiv b_3 \ (^1), \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases} \tag{3.12}$$

(1) Здесь все сравнения имеют место по модулю 4.

31) если $\gamma_2+2 \leqslant \lambda \leqslant \gamma_1$, $2|\lambda$, то

$$A_{2^\lambda}\left(\frac{\mu}{4a}\right) = \begin{cases} 2^{\gamma_2/2} & \text{при} \quad \lambda < a+1, \ b_2 \equiv -b_3, \\ -2^{\gamma_2/2} & \text{при} \quad \lambda = a+1, \ b_2 \equiv -b_3, \\ (-1)^{(m-b_3)/2} \cdot 2^{\gamma_2/2} & \text{при} \quad \lambda = a+2, \ b_2 \equiv b_3, \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases} \tag{3.13}$$

32) если $\gamma_2+2 \leqslant \lambda \leqslant \gamma_1$, $2 \nmid \lambda$, то

$$A_{2^\lambda}\left(\frac{\mu}{4a}\right) = \begin{cases} (-1)^{(b_2+b_3)/4} \cdot 2^{\gamma_2/2} & \text{при} \quad \lambda < a+1, \ b_2 \equiv -b_3, \\ -(-1)^{(b_2+b_3)/4} \cdot 2^{\gamma_2/2} & \text{при} \quad \lambda = a+1, \ b_2 \equiv -b_3, \\ (-1)^{(b_2+b_3-2m)/4} \cdot 2^{\gamma_2/2} & \text{при} \quad \lambda = a+2, \ b_2 \equiv b_3, \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases} \tag{3.14}$$

41) если $\lambda > \gamma_1+1$, $2|\lambda$, $2|\gamma_1$, то

(3.15)

$$A_{2^\lambda}\left(\frac{\mu}{4a}\right) = \begin{cases} (-1)^{(b_1+b_3)/2} \cdot 2^{-(\lambda/2)+(\gamma_1+\gamma\ )/2} & \text{при} \quad \lambda < a+1, \ b_2 \equiv b_3, \\ 2^{-(\lambda/2)+(\gamma_1+\gamma_2)/2} & \text{при} \quad \lambda < a+1, \ b_2 \equiv -b_3, \\ -(-1)^{(b_1+b_3)/2} \cdot 2^{-(a+1)/2+(\gamma_1+\gamma_2)/2} & \text{при} \quad \lambda = a+1, \ b_2 \equiv b_3, \\ -2^{-(a+1)/2+(\gamma_1+\gamma_2)/2} & \text{при} \quad \lambda = a+1, \ b_2 \equiv -b_3, \\ (-1)^{(m-b_3)/2} \cdot 2^{-(a+2)/2+(\gamma_1+\gamma_2)/2} & \text{при} \quad \lambda = a+2, \ b_2 \equiv b_3, \\ (-1)^{(m-b_1)/2} \cdot 2^{-(a+2)/2+(\gamma_1+\gamma_2)/2} & \text{при} \quad \lambda = a+2, \ b_2 \equiv -b_3, \\ 0 & \text{при} \quad \lambda > a+2. \end{cases}$$

42) если $\lambda > \gamma_1+1$, $2 \nmid \lambda$, $2|\gamma_1$, то

$$A_{2^\lambda}\left(\frac{\mu}{4a}\right) = \tag{3.16}$$

$$= \begin{cases} (-1)^{(m-\Sigma b_k)/4} \cdot 2^{-(a+3)/2+(\gamma_1+\gamma_2+1)/2} & \text{при} \quad \lambda = a+3, \ m \equiv \sum_{k=1}^{3} b_k, \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

43) если $\lambda > \gamma_1+1$, $2|\lambda$, $2 \nmid \gamma_1$, то

$$A_{2^\lambda}\left(\frac{\mu}{4a}\right) = \tag{3.17}$$

$$= \begin{cases} (-1)^{(b_1+2b_3-m)/4} \cdot 2^{-(a+3)/2+(\gamma_1+\gamma_2+1)/2} & \text{при} \quad \lambda = a+3, \ b_2 \equiv b_3, \ m \equiv -b_1, \\ (-1)^{(m-b_1)/4} \cdot 2^{-(a+3)/2+(\gamma_1+\gamma_2+1)/2} & \text{при} \quad \lambda = a+3, \ b_2 \equiv -b_3, \ m \equiv b_1, \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

44) если $\lambda > \gamma_1+1,\ 2\nmid\lambda,\ 2\nmid\gamma_1$, то

$$(3.18)\quad A_{2^\lambda}\left(\frac{\mu}{4a}\right)=$$
$$=\begin{cases} (-1)^{(2b_1+b_2+b_3)/4}\cdot 2^{-(\lambda/2)+(\gamma_1+\gamma_2)/2} & \text{при}\quad \lambda<a+1,\ b_2\equiv b_3,\\ (-1)^{(b_2+b_3)/4}\cdot 2^{-(\lambda/2)+(\gamma_1+\gamma_2)/2} & \text{при}\quad \lambda<a+1,\ b_2\equiv -b_3,\\ -(-1)^{(2b_1+b_2+b_3)/4}\cdot 2^{-(a+1)/2+(\gamma_1+\gamma_2)/2} & \text{при}\quad \lambda=a+1,\ b_2\equiv b_3,\\ -(-1)^{(b_2+b_3)/4}\cdot 2^{-(a+1)/2+(\gamma_1+\gamma_2)/2} & \text{при}\quad \lambda=a+1,\ b_2\equiv -b_3,\\ (-1)^{(b_2+b_3-2m)/4}\cdot 2^{-(a+2)/2+(\gamma_1+\gamma_2)/2} & \text{при}\quad \lambda=a+2,\ b_2\equiv b_3,\\ (-1)^{(2b_1+b_2+b_3-2m)/4}\cdot 2^{-(a+2)/2+(\gamma_1+\gamma_2)/2} & \text{при}\quad \lambda=a+2,\ b_2\equiv -b_3,\\ 0 & \text{при}\quad \lambda>a+2. \end{cases}$$

Из (3.9) аналогично получаем и для нечетных γ_2:

1) если $\lambda=1,\ \gamma_2+1,\ \gamma_1+1$ или $2\leqslant\lambda\leqslant\gamma_2$, то $A_{2^\lambda}\left(\frac{\mu}{4a}\right)$ принимает те же значения, что и при четных γ_2;

21) если $\gamma_2+2\leqslant\lambda\leqslant\gamma_1,\ 2|\lambda$, то

$$(3.19)\quad A_{2^\lambda}\left(\frac{\mu}{4a}\right)=\begin{cases} (-1)^{(m-b_2)/4}\cdot 2^{(\gamma_2-1)/2} & \text{при}\quad \lambda=a+3,\ m\equiv b_2,\\ (-1)^{(b_2+2b_3-m)/4}\cdot 2^{(\gamma_2-1)/2} & \text{при}\quad \lambda=a+3,\ m\equiv -b_2,\\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

22) если $\gamma_2+2\leqslant\lambda\leqslant\gamma_1,\ 2\nmid\lambda$, то

$$(3.20)\quad A_{2^\lambda}\left(\frac{\mu}{4a}\right)=\begin{cases} (-1)^{(m-b_3)/4}\cdot 2^{(\gamma_2-1)/2} & \text{при}\quad \lambda=a+3,\ m\equiv b_3,\\ (-1)^{(2b_2+b_3-m)/4}\cdot 2^{(\gamma_2-1)/2} & \text{при}\quad \lambda=a+3,\ m\equiv -b_3,\\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

31) если $\lambda>\gamma_1+1,\ 2|\lambda,\ 2|\gamma_1$, то

$$(3.21)\quad A_{2^\lambda}\left(\frac{\mu}{4a}\right)=$$
$$=\begin{cases} (-1)^{(b_2+2b_3-m)/4}\cdot 2^{-(a+3)/2+(\gamma_1+\gamma_2+1)/2} & \text{при}\quad \lambda=a+3,\ b_1\equiv b_3,\ m\equiv -b_2,\\ (-1)^{(m-b_2)/4}\cdot 2^{-(a+3)/2+(\gamma_1+\gamma_2+1)/2} & \text{при}\quad \lambda=a+3,\ b_1\equiv -b_3,\ m\equiv b_2,\\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

32) если $\lambda>\gamma_1+1,\ 2\nmid\lambda,\ 2|\gamma_1$, то

$$(3.22)\quad A_{2^\lambda}\left(\frac{\mu}{4a}\right)=$$
$$=\begin{cases} (-1)^{(b_1+2b_2+b_3)/4}\cdot 2^{-(\lambda/2)+(\gamma_1+\gamma_2)/2} & \text{при}\quad \lambda<a+1,\ b_1\equiv b_3,\\ (-1)^{(b_1+b_3)/4}\cdot 2^{-(\lambda/2)+(\gamma_1+\gamma_2)/2} & \text{при}\quad \lambda<a+1,\ b_1\equiv -b_3,\\ -(-1)^{(b_1+2b_2+b_3)/4}\cdot 2^{-(a+1)/2+(\gamma_1+\gamma_2)/2} & \text{при}\quad \lambda=a+1,\ b_1\equiv b_3,\\ -(-1)^{(b_1+b_3)/4}\cdot 2^{-(a+1)/2+(\gamma_1+\gamma_2)/2} & \text{при}\quad \lambda=a+1,\ b_1\equiv -b_3,\\ (-1)^{(b_1+b_3-2m)/4}\cdot 2^{-(a+2)/2+(\gamma_1+\gamma_2)/2} & \text{при}\quad \lambda=a+2,\ b_1\equiv b_3,\\ (-1)^{(b_1+2b_2+b_3-2m)/4}\cdot 2^{-(a+2)/2+(\gamma_1+\gamma_2)/2} & \text{при}\quad \lambda=a+2,\ b_1\equiv -b_3,\\ 0 & \text{при}\quad \lambda>a+2; \end{cases}$$

33) если $\lambda>\gamma_1+1,\ 2|\lambda,\ 2\nmid\gamma_1$, то

$$(3.23)\quad A_{2^\lambda}\left(\frac{\mu}{4a}\right)=$$
$$=\begin{cases} (-1)^{(b_1+b_2+2b_3)/4}\cdot 2^{-(\lambda/2)+(\gamma_1+\gamma_2)/2} & \text{при}\quad \lambda<a+1,\ b_1\equiv b_2,\\ (-1)^{(b_1+b_2)/4}\cdot 2^{-(\lambda/2)+(\gamma_1+\gamma_2)/2} & \text{при}\quad \lambda<a+1,\ b_1\equiv -b_2,\\ -(-1)^{(b_1+b_2+2b_3)/4}\cdot 2^{-(a+1)/2+(\gamma_1+\gamma_2)/2} & \text{при}\quad \lambda=a+1,\ b_1\equiv b_2,\\ -(-1)^{(b_1+b_2)/4}\cdot 2^{-(a+1)/2+(\gamma_1+\gamma_2)/2} & \text{при}\quad \lambda=a+1,\ b_1\equiv -b_2,\\ (-1)^{(b_1+b_2-2m)/4}\cdot 2^{-(a+2)/2+(\gamma_1+\gamma_2)/2} & \text{при}\quad \lambda=a+2,\ b_1\equiv b_2,\\ (-1)^{(b_1+b_2+2b_3-2m)/4}\cdot 2^{-(a+2)/2+(\gamma_1+\gamma_2)/2} & \text{при}\quad \lambda=a+2,\ b_1\equiv -b_2,\\ 0 & \text{при}\quad \lambda>a+2; \end{cases}$$

34) если $\lambda>\gamma_1+1,\ 2\nmid\lambda,\ 2\nmid\gamma_1$, то

$$(3.24)\quad A_{2^\lambda}\left(\frac{\mu}{4a}\right)=$$
$$=\begin{cases} (-1)^{(2b_2+b_3-m)/4}\cdot 2^{-(a+3)/2+(\gamma_1+\gamma_2+1)/2} & \text{при}\quad \lambda=a+3,\ b_1\equiv b_2,\ m\equiv -b_3\\ (-1)^{(m-b_3)/4}\cdot 2^{-(a+3)/2+(\gamma_1+\gamma_2+1)/2} & \text{при}\quad \lambda=a+3,\ b_1\equiv -b_2,\ m\equiv b_3,\\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Из (3.6), с помощью полученных значений для $A_{2^\lambda}\left(\frac{\mu}{4a}\right)$ при $\mu=0$, т.е. $a=\infty$, следует:

$$X_2(0,z)=1+\sum_{2|\lambda,\,\lambda=2}^{\gamma_2}2^{(\lambda/2)-1}\cdot 2^{-\lambda z}+2^{\gamma_2/2}\sum_{2|\lambda,\,\lambda=\gamma_2+2}^{\gamma_1}2^{-\lambda z}+$$
$$+(-1)^{(b_2+b_3)/4}\cdot 2^{\gamma_2/2}\sum_{2\nmid\lambda,\,\lambda=\gamma_2+2}^{\gamma_1}2^{-\lambda z}+\frac{2^{(\gamma_2/2)-1-(\gamma_1+2)z}}{1-2^{-(1+2z)}},$$

если γ_1 и γ_2 четные, $\gamma_1\geqslant\gamma_2+2,\ b_2\equiv -b_3$;

$$X_2(0,z)=1+\sum_{2|\lambda,\,\lambda=2}^{\gamma_2}2^{(\lambda/2)-1}\cdot 2^{-\lambda z}+\frac{2^{(\gamma_2/2)-1-(\gamma_1+2)z}}{1-2^{-(1+2z)}},$$

если γ_1 и γ_2 четные, $\gamma_1=\gamma_2$, $b_2\equiv -b_3$;

$$X_2(0,z)=1+\sum_{2|\lambda,\,\lambda=2}^{\gamma_2}2^{(\lambda/2)-1}\cdot 2^{-\lambda z}+(-1)^{(b_1+b_3)/2}\frac{2^{(\gamma_2/2)-1-(\gamma_1+2)z}}{1-2^{-(1+2z)}},$$

если γ_1 и γ_2 четные, $b_2\equiv b_3$;

$$X_2(0,z)=1+\sum_{2|\lambda,\,\lambda=2}^{\gamma_2}2^{(\lambda/2)-1}\cdot 2^{-\lambda z}+2^{\gamma_2/2}\sum_{2|\lambda,\,\lambda=\gamma_2+2}^{\gamma_1}2^{-\lambda z}+$$

$$+(-1)^{(b_2+b_3)/4}\cdot 2^{\gamma_2/2}\sum_{2\nmid\lambda,\,\lambda=\gamma_2+2}^{\gamma_1}2^{-\lambda z}+(-1)^{(b_2+b_3)/4}\frac{2^{(\gamma_2/2)-1-(\gamma_1+2)z}}{1-2^{-(1+2z)}},$$

если γ_1 нечетное, γ_2 четное, $b_2\equiv -b_3$;

$$X_2(0,z)=1+\sum_{2|\lambda,\,\lambda=2}^{\gamma_2}2^{(\lambda/2)-1}\cdot 2^{-\lambda z}+(-1)^{(2b_1+b_2+b_3)/4}\frac{2^{(\gamma_2/2)-1-(\gamma_1+2)z}}{1-2^{-(1+2z)}},$$

если γ_1 нечетное, γ_2 четное, $b_2\equiv b_3$;

$$X_2(0,z)=1+\sum_{2|\lambda,\,\lambda=2}^{\gamma_2}2^{(\lambda/2)-1}\cdot 2^{-\lambda z}+(-1)^{(b_1+2b_2+b_3)/4}\frac{2^{(\gamma_2-3)/2-(\gamma_1-3)z}}{1-2^{-(1+2z)}},$$

если γ_1 четное, γ_2 нечетное, $b_1\equiv b_3$;

$$X_2(0,z)=1+\sum_{2|\lambda,\,\lambda=2}^{\gamma_2}2^{(\lambda/2)-1}\cdot 2^{-\lambda z}+(-1)^{(b_1+b_3)/4}\frac{2^{(\gamma_2-3)/2-(\gamma_1-3)z}}{1-2^{-(1+2z)}},$$

если γ_1 четное, γ_2 нечетное, $b_1\equiv -b_3$;

$$X_2(0,z)=1+\sum_{2|\lambda,\,\lambda=2}^{\gamma_2}2^{(\lambda/2)-1}\cdot 2^{-\lambda z}+(-1)^{(b_1+b_2+2b_3)/4}\frac{2^{(\gamma_2-3)/2-(\gamma_1-3)z}}{1-2^{-(1+2z)}},$$

если γ_1 и γ_2 нечетные, $b_1\equiv b_2$;

$$X_2(0,z)=1+\sum_{2|\lambda,\,\lambda=2}^{\gamma_2}2^{(\lambda/2)-1}\cdot 2^{-\lambda z}+(-1)^{(b_1+b_2)/4}\frac{2^{(\gamma_2-3)/2-(\gamma_1-3)z}}{1-2^{-(1+2z)}},$$

если γ_1 и γ_2 нечетные, $b_1\equiv -b_2$.

Таким образом, функция $X_2(0,z)$ регулярна при $\operatorname{Re} z>-\frac{1}{2}$, и в частности, имеем:

$$X_2(0,0)=\big(1+(-1)^{(b_2+b_3)/4}\big)2^{(\gamma_2/2)-1}(\gamma_1-\gamma_2-2)+3\cdot 2^{\gamma_2/2}\neq 0,$$

если $2|\gamma_2,\ 2|\gamma_1,\ \gamma_1\geqslant\gamma_2+2,\ b_2\equiv -b_3$;

$$X_2(0,0)=2^{(\gamma_1/2)+1}\neq 0,$$ если $2|\gamma_2,\ 2|\gamma_1,\ \gamma_1=\gamma_2,\ b_2\equiv -b_3$;

$$=\big(1+(-1)^{(b_1+b_3)/2}\big)2^{\gamma_2/2},$$ если $2|\gamma_2,\ 2|\gamma_1,\ b_2\equiv b_3$;

$$=\big(1+(-1)^{(b_2+b_3)/4}\big)2^{(\gamma_2/2)-1}(\gamma_1-\gamma_2+1),$$

если $2|\gamma_2,\ 2\nmid\gamma_1,\ b_2\equiv -b_3$;

$$=\big(1+(-1)^{(2b_1+b_2+b_3)/4}\big)2^{\gamma_2/2},$$

если $2|\gamma_2,\ 2\nmid\gamma_1,\ b_2\equiv b_3$;

$$=\big(1+(-1)^{(b_1+2b_2+b_3)/4}\big)2^{(\gamma_2-1)/2},$$

если $2\nmid\gamma_2,\ 2|\gamma_1,\ b_1\equiv b_3$;

$$=\big(1+(-1)^{(b_1+b_3)/4}\big)2^{(\gamma_2-1)/2},$$

если $2\nmid\gamma_2,\ 2|\gamma_1,\ b_1\equiv -b_3$;

$$=\big(1+(-1)^{(b_1+b_2+2b_3)/4}\big)2^{(\gamma_2-1)/2},$$

если $2\nmid\gamma_2,\ 2\nmid\gamma_1,\ b_1\equiv b_2$;

$$=\big(1+(-1)^{(b_1+b_2)/4}\big)2^{(\gamma_2-1)/2},$$

если $2\nmid\gamma_2,\ 2\nmid\gamma_1,\ b_1\equiv -b_2$.

II. Теперь переходим к нахождению значений $A_{p^\lambda}\left(\frac{\mu}{4a}\right)$ при $4a|\mu$, $p>2$. Пусть $p^\beta\left\|\frac{\mu}{4a}(\beta\geqslant 0),\ p_k^{l_k}\right\|a_k$ $(k=1,2,3)$. Наибольшее из чисел l_1,l_2,l_3 обозначим через $\bar{l}$; наименьшее, т.е. нуль, через $\underline{l}$; а третье — через l'; $l=l_1+l_2+l_3=\bar{l}+l'+\underline{l}$. Далее, пусть $\bar{a}, a'$ и $\underline{a}$ те из a_k, для которых соответственно, $l_k=\bar{l}, l'$ и $\underline{l}$.

Пусть q нечетное и $q=(q,a_k)q_k$, $a_k=(q,a_k)a_k'$ $(k=1,2,3)$. Из (3.2), согласно леммам 2 и 5 работы [5], следует, что

$$A_q\left(\frac{\mu}{4a}\right)=\prod_{k=1}^{3}\left\{\left(\frac{a_k'}{q_k}\right)I(q_k)(q,a_k)^{1/2}\right\}q^{3/2}\sideset{}{'}\sum_{x \bmod q}e\left(-\frac{\mu x}{4aq}\right)\left(\frac{x}{q_1q_2q_3}\right),$$

откуда, положив $q=p^\lambda$ и приняв во внимание, что $(a_1,a_2,a_3)=1$, получим

$$A_{p^\lambda}\left(\frac{\mu}{4a}\right)=\left(\frac{-\underline{a}}{p}\right)^\lambda\left(\frac{-p^{-\min(\lambda,l')}a'}{p^{\lambda-\min(\lambda,l')}}\right)\left(\frac{-p^{-\min(\lambda,\bar{l})}\bar{a}}{p^{\lambda-\min(\lambda,\bar{l})}}\right)\times \tag{3.25}$$

$$\times I(p^\lambda)I(p^{\lambda-\min(\lambda,l')})I(p^{\lambda-\min(\lambda,\bar{l})})p^{-3\lambda/2}p^{(1/2)\{\min(\lambda,l')+\min(\lambda,\bar{l})\}}\times$$

$$\times\sideset{}{'}\sum_{h \bmod p^\lambda}e\left(\frac{\mu h}{4ap^\lambda}\right)\left(\frac{h}{p}\right)^{\lambda-\min(\lambda,l')-\min(\lambda,\bar{l})}.$$

Из (3.25), согласно леммам 6 и 7 работы [5], получаем:

1) если $\lambda \leqslant l'$, $2|\lambda$, то

$$(3.26)\qquad A_{p^\lambda}\left(\frac{\mu}{4a}\right) = \begin{cases} p^{-\lambda/2}\cdot p^{\lambda-1}(p-1) = p^{(\lambda/2)-1}(p-1) & \text{при} \quad \lambda < \beta+1, \\ -p^{-\lambda/2}\cdot p^{\lambda-1} = -p^{(\beta-1)/2} & \text{при} \quad \lambda = \beta+1, \\ 0 & \text{при} \quad \lambda > \beta+1; \end{cases}$$

2) если $\lambda \leqslant l'$, $2 \nmid \lambda$, то

$$(3.27)\qquad A_{p^\lambda}\left(\frac{\mu}{4a}\right) = \begin{cases} \left(\dfrac{p^{-\beta}\dfrac{\mu}{4a}a}{p}\right) p^{\beta/2} & \text{при} \quad \lambda = \beta+1, \\ 0 & \text{при} \quad \lambda \neq \beta+1, \end{cases}$$

ибо

$$\left(\frac{-1}{p}\right) I(p^\lambda) I(p) = 1 \quad \text{при} \quad 2 \nmid \lambda.$$

3) если $l' < \lambda \leqslant \bar{l}$, $2|l'$, $2|\lambda$, то

$$(3.28)\qquad A_{p^\lambda}\left(\frac{\mu}{4a}\right) = \begin{cases} p^{l'/2}(1-p^{-1}) & \text{при} \quad \lambda < \beta+1, \\ -p^{(l'/2)-1} & \text{при} \quad \lambda = \beta+1, \\ 0 & \text{при} \quad \lambda > \beta+1; \end{cases}$$

4) если $l' < \lambda \leqslant \bar{l}$, $2|l'$, $2 \nmid \lambda$, то

$$(3.29)\qquad A_{p^\lambda}\left(\frac{\mu}{4a}\right) = \begin{cases} \left(\dfrac{-p^{-l'}a'a}{p}\right) p^{l'/2}(1-p^{-1}) & \text{при} \quad \lambda < \beta+1, \\ -\left(\dfrac{-p^{-l'}a'a}{p}\right) p^{(l'/2)-1} & \text{при} \quad \lambda = \beta+1, \\ 0 & \text{при} \quad \lambda > \beta+1, \end{cases}$$

ибо

$$\left(\frac{-1}{p}\right) I(p^\lambda) I(p^{\lambda-l'}) = 1 \quad \text{при} \quad 2 \nmid \lambda,\ 2|l';$$

5) если $l' < \lambda \leqslant \bar{l}$, $2 \nmid l'$, $2|\lambda$, то

$$(3.30)\qquad A_{p^\lambda}\left(\frac{\mu}{4a}\right) = \begin{cases} \left(\dfrac{p^{-(\beta+l')}\dfrac{\mu}{4a}a'}{p}\right) p^{(l'-1)/2} & \text{при} \quad \lambda = \beta+1, \\ 0 & \text{при} \quad \lambda \neq \beta+1; \end{cases}$$

6) если $l' < \lambda \leqslant \bar{l}$, $2 \nmid l'$, $2 \nmid \lambda$, то

$$(3.31)\qquad A_{p^\lambda}\left(\frac{\mu}{4a}\right) = \begin{cases} \left(\dfrac{p^{-\beta}\dfrac{\mu}{4a}a}{p}\right) p^{(l'-1)/2} & \text{при} \quad \lambda = \beta+1, \\ 0 & \text{при} \quad \lambda \neq \beta+1; \end{cases}$$

7) если $\lambda > \bar{l}$, $2|l'$, $2|\bar{l}$, $2|\lambda$, то

$$(3.32)\qquad A_{p^\lambda}\left(\frac{\mu}{4a}\right) = \begin{cases} p^{-\lambda/2}\cdot p^{l/2}(1-p^{-1}) & \text{при} \quad \lambda < \beta+1, \\ -p^{l/2}\cdot p^{-(\beta+3)/2} & \text{при} \quad \lambda = \beta+1, \\ 0 & \text{при} \quad \lambda > \beta+1; \end{cases}$$

8) если $\lambda > \bar{l}$, $2|l'$, $2|\bar{l}$, $2 \nmid \lambda$, то

$$(3.33)\qquad A_{p^\lambda}\left(\frac{\mu}{4a}\right) = \begin{cases} \left(\dfrac{-p^{-(\beta+l)}\dfrac{\mu}{4a}\Delta}{p}\right) p^{l/2}\cdot p^{-(\beta/2)-1} & \text{при} \quad \lambda = \beta+1, \\ 0 & \text{при} \quad \lambda \neq \beta+1, \end{cases}$$

ибо

$$I(p^\lambda) I(p^{\lambda-l'}) I(p^{\lambda-\bar{l}}) I(p) = 1 \quad \text{при} \quad 2 \nmid \lambda,\ 2|l',\ 2|\bar{l};$$

9) если $\lambda > \bar{l}$, $2|l'$, $2 \nmid \bar{l}$, $2|\lambda$, то

$$(3.34)\qquad A_{p^\lambda}\left(\frac{\mu}{4a}\right) = \begin{cases} \left(\dfrac{p^{-(\beta+\bar{l})}\dfrac{\mu}{4a}\bar{a}}{p}\right) p^{l/2}\cdot p^{-(\beta/2)-1} & \text{при} \quad \lambda = \beta+1, \\ 0 & \text{при} \quad \lambda \neq \beta+1; \end{cases}$$

10) если $\lambda > \bar{l}$, $2|l'$, $2 \nmid \bar{l}$, $2 \nmid \lambda$, то

$$(3.35)\qquad A_{p^\lambda}\left(\frac{\mu}{4a}\right) = \begin{cases} \left(\dfrac{-p^{-l'}a'a}{p}\right) p^{l/2}\cdot p^{-\lambda/2}(1-p^{-1}) & \text{при} \quad \lambda < \beta+1, \\ -\left(\dfrac{-p^{-l'}a'a}{p}\right) p^{l/2}\cdot p^{-(\beta+3)/2} & \text{при} \quad \lambda = \beta+1, \\ 0 & \text{при} \quad \lambda > \beta+1; \end{cases}$$

11) если $\lambda > \bar{l}$, $2 \nmid l'$, $2 \nmid \bar{l}$, $2|\lambda$, то

$$(3.36)\qquad A_{p^\lambda}\left(\frac{\mu}{4a}\right) = \begin{cases} \left(\dfrac{-p^{-l}\bar{a}a'}{p}\right) p^{l/2}\cdot p^{-\lambda/2}(1-p^{-1}) & \text{при} \quad \lambda < \beta+1, \\ -\left(\dfrac{-p^{-l}\bar{a}a'}{p}\right) p^{l/2}\cdot p^{-(\beta+3)/2} & \text{при} \quad \lambda = \beta+1, \\ 0 & \text{при} \quad \lambda > \beta+1, \end{cases}$$

ибо

$$\left(\frac{-1}{p}\right) I(p^{\lambda-l'}) I(p^{\lambda-\bar{l}}) = 1 \quad \text{при} \quad 2|\lambda, 2\nmid l', 2\nmid \bar{l};$$

12) если $\lambda > \bar{l}, 2\nmid l', 2\nmid \bar{l}, 2\nmid\lambda$, то

$$(3.37)\quad A_{p^\lambda}\left(\frac{\mu}{4a}\right) = \begin{cases} \left(\dfrac{p^{-\beta}\frac{\mu}{4a}\underline{a}}{p}\right) p^{l/2}\cdot p^{-(\beta/2)-1} & \text{при} \quad \lambda = \beta+1, \\ 0 & \text{при} \quad \lambda \neq \beta+1; \end{cases}$$

13) если $\lambda > \bar{l}, 2\nmid l', 2|\bar{l}, 2|\lambda$, то

$$(3.38)\quad A_{p^\lambda}\left(\frac{\mu}{4a}\right) = \begin{cases} \left(\dfrac{p^{-(\beta+l')}\frac{\mu}{4a}a'}{p}\right) p^{l/2}\cdot p^{-(\beta/2)-1} & \text{при} \quad \lambda = \beta+1, \\ 0 & \text{при} \quad \lambda \neq \beta+1; \end{cases}$$

14) если $\lambda > \bar{l}, 2\nmid l', 2|\bar{l}, 2\nmid\lambda$, то

$$(3.39)\quad A_{p^\lambda}\left(\frac{\mu}{4a}\right) = \begin{cases} \left(\dfrac{-p^{-\bar{l}}\bar{a}\,a}{p}\right) p^{l/2}\cdot p^{-\lambda/2}(1-p^{-1}) & \text{при} \quad \lambda < \beta+1, \\ -\left(\dfrac{-p^{-\bar{l}}\bar{a}\,\underline{a}}{p}\right) p^{l/2}\cdot p^{-(\beta+3)/2} & \text{при} \quad \lambda = \beta+1, \\ 0 & \text{при} \quad \lambda > \beta+1. \end{cases}$$

Из (3.6), с помощью полученных значений для $A_{p^\lambda}\left(\frac{\mu}{4a}\right)$ при $p|\Delta$, $\mu = 0$, т.е. $\beta = \infty$, следует:

$$X_p(0, z) = 1+(p-1)\sum_{2|\lambda,\lambda=2}^{l'} p^{(\lambda/2)-1}\cdot p^{-\lambda z} + p^{l'/2}\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{\substack{\lambda=l'+2\\ 2|\lambda}}^{\bar{l}} p^{-\lambda z} +$$
$$+ p^{l'/2}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(\frac{-p^{-l'}a'\underline{a}}{p}\right)\sum_{2\nmid\lambda,\lambda=l'+1}^{\bar{l}} p^{-\lambda z} +$$
$$+ p^{l/2}\left(1-\frac{1}{p}\right)\frac{p^{-(\bar{l}+2)((1/2)+z)}}{1-p^{-(1+2z)}} \quad \text{при} \quad 2|l', 2|\bar{l};$$

$$X_p(0, z) = 1+(p-1)\sum_{2|\lambda,\lambda=2}^{l'} p^{(\lambda/2)-1}\cdot p^{-\lambda z} +$$
$$+ \left(\frac{-p^{-\bar{l}}\bar{a}\,\underline{a}}{p}\right) p^{l/2}\left(1-\frac{1}{p}\right)\frac{p^{-(\bar{l}+1)((1/2)+z)}}{1-p^{-(1+2z)}} \quad \text{при} \quad 2\nmid l', 2|\bar{l};$$

$$X_p(0, z) = 1+(p-1)\sum_{2|\lambda,\lambda=2}^{l'} p^{(\lambda/2)-1}\cdot p^{-\lambda z} + p^{l'/2}\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{\substack{\lambda=l'+2\\ 2|\lambda}}^{\bar{l}} p^{-\lambda z} +$$
$$+ \left(\frac{-p^{-l'}a'\underline{a}}{p}\right) p^{l'/2}\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{2\nmid\lambda,\lambda=l'+1}^{\bar{l}} p^{-\lambda z} +$$
$$+ \left(\frac{-p^{-l'}a'\underline{a}}{p}\right) p^{l/2}\left(1-\frac{1}{p}\right)\frac{p^{-(\bar{l}+2)((1/2)+z)}}{1-p^{-(1+2z)}} \quad \text{при} \quad 2|l', 2\nmid\bar{l};$$

$$X_p(0, z) = 1+(p-1)\sum_{2|\lambda,\lambda=2}^{l'} p^{(\lambda/2)-1}\cdot p^{-\lambda z} +$$
$$+ \left(\frac{-p^{-l}\bar{a}\,a'}{p}\right) p^{l/2}\left(1-\frac{1}{p}\right)\frac{p^{-(\bar{l}+1)((1/2)+z)}}{1-p^{-(1+2z)}} \quad \text{при} \quad 2\nmid l', 2\nmid\bar{l}.$$

Таким образом, произведение $\prod_{p|\Delta, p>2} X_p(0, z)$ регулярно при $\mathrm{Re}\, z > -\frac{1}{2}$, и, в частности, имеем:

$$X_p(0, 0) = \left\{\left(1+\left(\frac{-p^{-l'}a'\underline{a}}{p}\right)\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)\frac{\bar{l}-l'}{2} + \left(1+\frac{1}{p}\right)\right\} p^{l'/2} \neq 0 \quad \text{при} \quad 2|l', 2|\bar{l};$$
$$= \left(1+\left(\frac{-p^{-\bar{l}}\bar{a}\,\underline{a}}{p}\right)\right) p^{(l'-1)/2} \quad \text{при} \quad 2\nmid l', 2|\bar{l};$$
$$= \left(1+\left(\frac{-p^{-l'}a'\underline{a}}{p}\right)\right)\left(1+\left(1-\frac{1}{p}\right)\frac{\bar{l}-l'-1}{2}\right) p^{l'/2} \quad \text{при} \quad 2|l', 2\nmid\bar{l};$$
$$= \left(1+\left(\frac{-p^{-l}\bar{a}a'}{p}\right)\right) p^{(l'-1)/2} \quad \text{при} \quad 2\nmid l', 2\nmid\bar{l}.$$

Пусть теперь $\mu = 0$ и $p\nmid 2\Delta$. Следовательно, в (3.32) положив $\beta = \infty$ и $l = 0$, из (3.6) получим

$$(3.40)\quad \prod_{p\nmid 2\Delta} X_p(0, z) = \prod_{p\nmid 2\Delta}\left(1+\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{2|\lambda,\lambda=2}^{\infty} p^{-\lambda/2}\cdot p^{-\lambda z}\right) = \prod_{p\nmid 2\Delta}\frac{1-p^{-2-2z}}{1-p^{-1-2z}}.$$

III. В силу леммы 13 и (3.40) при $\mathrm{Re}\, z > \frac{1}{2}$ имеем:

$$(3.41)\quad V(0, z) = X_2(0, z)\prod_{p|\Delta, p>2} X_p(0, z)\prod_{p|2\Delta}\frac{1-p^{-1-2z}}{1-p^{-2-2z}}\,\frac{\zeta(1+2z)}{\zeta(2+2z)}.$$

Последний множитель в правой части этого равенства имеет простой полюс в точке $z = 0$, тогда как остальные множители регулярны при $\operatorname{Re} z > -\frac{1}{2}$.

Из выражений для $X_p(0, 0)$ следует, что если $p^{l'+\bar{l}} \| \Delta$, причем l' и $\bar{l}$ оба четные, то всегда $X_p(0, 0) \neq 0$.

Следовательно, для того чтобы доказать, что функция $V(0, z)$ аналитически продолжаема в полуплоскость $\operatorname{Re} z > -\frac{1}{2}$ и там регулярна, надо показать, что всегда имеет место равенство

$$X_2(0, 0) \prod_{p|\Delta, p>2} X_p^*(0, 0) = 0. \tag{3.42}$$

Здесь звездочка обозначает, что p пробегает лишь те нечетные простые делители Δ, для которых $p^{l'+\bar{l}} \| \Delta$, причем по крайней мере одно из чисел l' и $\bar{l}$ нечетное.

Переходим к доказательству равенства (3.42)([2]).

Очевидно, что коэффициенты a_k формы единственным образом можно представить в виде:

$$a_1 = \xi_1 \eta_2 \eta_3, \quad a_2 = \xi_2 \eta_1 \eta_3', \quad a_3 = \xi_3 \eta_1' \eta_2', \tag{3.43}$$

где $(\xi_k, \xi_r) = (\eta_k, \eta_r) = (\eta_k', \eta_r') = (\eta_k, \eta_r') = 1$ при $k \neq r$, η_k и η_k' состоят из одних и тех же простых множителей, но возможно с разными показателями степеней, $(\xi_k, \eta_r) = (\xi_k, \eta_r') = 1$ при любых k и r.

Обозначив через $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \lambda, \lambda', \varrho, \varrho', \sigma$ и σ' показатели степеней с которыми простые числа делят соответственно $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \eta_1, \eta_1', \eta_2, \eta_2', \eta_3$ и η_3' и положив

$$\begin{aligned} H_1 &= \prod_{\substack{p^{\omega_1} \| \xi_1 \\ 2 \nmid \omega_1}} p \cdot \prod_{\substack{p^{\sigma+\sigma'} \| \eta_3 \eta_3' \\ 2 \nmid \sigma, 2 | \sigma'}} p \cdot \prod_{\substack{p^{\lambda+\lambda'} \| \eta_1 \eta_1' \\ 2 \nmid \lambda, 2 \nmid \lambda'}} p \cdot \prod_{\substack{p^{\varrho+\varrho'} \| \eta_2 \eta_2' \\ 2 \nmid \varrho, 2 | \varrho'}} p, \\ H_2 &= \prod_{\substack{p^{\omega_2} \| \xi_2 \\ 2 \nmid \omega_2}} p \cdot \prod_{\substack{p^{\lambda+\lambda'} \| \eta_1 \eta_1' \\ 2 \nmid \lambda, 2 | \lambda'}} p \cdot \prod_{\substack{p^{\varrho+\varrho'} \| \eta_2 \eta_2' \\ 2 \nmid \varrho, 2 \nmid \varrho'}} p \cdot \prod_{\substack{p^{\sigma+\sigma'} \| \eta_3 \eta_3' \\ 2 | \sigma, 2 \nmid \sigma'}} p, \\ H_3 &= \prod_{\substack{p^{\omega_3} \| \xi_3 \\ 2 \nmid \omega_3}} p \cdot \prod_{\substack{p^{\varrho+\varrho'} \| \eta_2 \eta_2' \\ 2 | \varrho, 2 \nmid \varrho'}} p \cdot \prod_{\substack{p^{\sigma+\sigma'} \| \eta_3 \eta_3' \\ 2 \nmid \sigma, 2 \nmid \sigma'}} p \cdot \prod_{\substack{p^{\lambda+\lambda'} \| \eta_1 \eta_1' \\ 2 | \lambda, 2 \nmid \lambda'}} p, \end{aligned} \tag{3.44}$$

получим

$$\begin{aligned} H_2 H_3 &= \prod_{p^{2\varkappa+1} \| \xi_2 \xi_3} p \cdot \prod_{p^{2\varkappa+1} \| \eta_1 \eta_1'} p \cdot \prod_{p^{2\varkappa+1} \| \eta_2'} p \cdot \prod_{p^{2\varkappa+1} \| \eta_3'} p, \\ H_3 H_1 &= \prod_{p^{2\varkappa+1} \| \xi_3 \xi_1} p \cdot \prod_{p^{2\varkappa+1} \| \eta_1'} p \cdot \prod_{p^{2\varkappa+1} \| \eta_2 \eta_2'} p \cdot \prod_{p^{2\varkappa+1} \| \eta_3} p, \\ H_1 H_2 &= \prod_{p^{2\varkappa+1} \| \xi_1 \xi_2} p \cdot \prod_{p^{2\varkappa+1} \| \eta_1} p \cdot \prod_{p^{2\varkappa+1} \| \eta_2} p \cdot \prod_{p^{2\varkappa+1} \| \eta_3 \eta_3'} p. \end{aligned} \tag{3.45}$$

([2]) Идея доказательства заимствована у Маасса [7] (стр. 153–154), который рассматривает лишь бесквадратные коэффициенты a_k.

Если $\prod_{p|\Delta, p>2} X_p^*(0, 0) \neq 0$, то, как следует из выражений для $X_p(0, 0)$, при всех $p > 2$, $p^{l'+\bar{l}} \| \Delta$ будем иметь

$$\left(\frac{-p^{-\bar{l}} \bar{a}\, \underline{a}}{p}\right) = 1 \quad \text{при} \quad 2|\bar{l}, 2 \nmid l'; \qquad \left(\frac{-p^{-l'} a' \underline{a}}{p}\right) = 1 \quad \text{при} \quad 2 \nmid \bar{l}, 2|l';$$

(3.46)

$$\left(\frac{-p^{-l}\, \bar{a} a'}{p}\right) = 1 \quad \text{при} \quad 2 \nmid \bar{l}, 2 \nmid l'.$$

Согласно (3.46), (3.43) и (3.45), имеем:

1) при $\bar{a} = a_1$, $a' = a_2$ и при $\bar{a} = a_2$, $a' = a_1$

$$1 = \prod_{\substack{p^l | a_1 a_2 \\ 2 \nmid l_1, 2 | l_2}} \left(\frac{-p^{-l_2} a_2 a_3}{p}\right) = \left(\frac{-H_2 H_3}{\prod_{\substack{p^l \| a_1 a_2 \\ 2 \nmid l_1, 2 | l_2}} p}\right),$$

2) при $\bar{a} = a_2$, $a' = a_3$ и при $\bar{a} = a_3$, $a' = a_2$

$$1 = \prod_{\substack{p^l \| a_2 a_3 \\ 2 \nmid l_2, 2 \nmid l_3}} \left(\frac{-p^{-l} a_2 a_3}{p}\right) = \left(\frac{-H_2 H_3}{\prod_{\substack{p^l \| a_2 a_3 \\ 2 \nmid l_2, 2 \nmid l_3}} p}\right),$$

3) при $\bar{a} = a_1$, $a' = a_3$ и при $\bar{a} = a_3$, $a' = a_1$

$$1 = \prod_{\substack{p^l \| a_1 a_3 \\ 2 \nmid l_1, 2 | l_3}} \left(\frac{-p^{-l_3} a_2 a_3}{p}\right) = \left(\frac{-H_2 H_3}{\prod_{\substack{p^l \| a_1 a_3 \\ 2 \nmid l_1, 2 | l_3}} p}\right).$$

Перемножая полученные шесть равенств, принимая во внимание (3.44), а затем производя циклическую перестановку индексов, получаем

$$\left(\frac{-H_2 H_3}{H_1^*}\right) = \left(\frac{-H_3 H_1}{H_2^*}\right) = \left(\frac{-H_1 H_2}{H_3^*}\right) = 1,$$

где H_k^* обозначает нечетную часть H_k. Следовательно,

$$\left(\frac{-1}{H_1^*}\right) = \left(\frac{H_2}{H_1^*}\right)\left(\frac{H_3}{H_1^*}\right), \quad \left(\frac{-1}{H_2^*}\right) = \left(\frac{H_3}{H_2^*}\right)\left(\frac{H_1}{H_2^*}\right), \quad \left(\frac{-1}{H_3^*}\right) = \left(\frac{H_1}{H_3^*}\right)\left(\frac{H_2}{H_3^*}\right). \tag{3.47}$$

Теперь могут представится следующие четыре случая:

1) Пусть $2|\gamma_1$, $2|\gamma_2$, т.е. или $2^{\gamma_1} \| \eta_3$, $2^{\gamma_2} \| \eta_3'$ или $2^{\gamma_1} \| \xi_1$. В этом случае, согласно (3.44), имеем:

$$H_k^* = H_k \quad (k = 1, 2, 3).$$

Следовательно, из (3.47) получаем:

$$\left(\frac{-1}{H_1}\right)^{(H_2+1)/2} = (-1)^{((H_1-1)/2)((H_2-1)/2)} \cdot (-1)^{((H_1-1)/2)((H_2-1)/2)} \left(\frac{H_1}{H_2}\right)\left(\frac{H_3}{H_1}\right),$$

$$\left(\frac{-1}{H_2}\right)^{(H_3+1)/2} = (-1)^{((H_2-1)/2)((H_3-1)/2)} \cdot (-1)^{((H_2-1)/2)((H_3-1)/2)} \left(\frac{H_2}{H_3}\right)\left(\frac{H_1}{H_2}\right),$$

$$\left(\frac{-1}{H_3}\right)^{(H_1+1)/2} = (-1)^{((H_3-1)/2)((H_1-1)/2)} \cdot (-1)^{((H_3-1)/2)((H_1-1)/2)} \left(\frac{H_3}{H_1}\right)\left(\frac{H_2}{H_3}\right),$$

откуда

$$\left(\frac{-1}{H_1}\right)^{(H_2+1)/2}\left(\frac{-1}{H_2}\right)^{(H_3+1)/2}\left(\frac{-1}{H_3}\right)^{(H_1+1)/2} = 1,$$

что возможно лишь тогда, когда $H_1 \equiv H_2 \equiv H_3 (\mathrm{mod}\, 4)$. Отсюда следует:

$$H_2 H_3 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4) \quad \text{и} \quad H_1 H_2 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4);$$

следовательно, согласно (3.43) и (3.45), получаем:

$$b_2 b_3 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4) \quad \text{и} \quad b_1 b_2 + b_2 b_3 \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 4),$$

т.е.

(3.48) $$b_2 \equiv b_3 (\mathrm{mod}\, 4) \quad \text{и} \quad \tfrac{1}{2}(b_1 b_2 + b_2 b_3) \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2).$$

Из выражений для $X_2(0, 0)$ и (3.48) следует, что $X_2(0, 0) = 0$.

2) Пусть $2 \nmid \gamma_1, 2 | \gamma_2$, т.е. или $2^{\gamma_1} \| \eta_3, 2^{\gamma_2} \| \eta_3'$ или $2^{\gamma_1} \| \xi_1$. В этом случае имеем: $2 \| H_1$, $H_k^* = H_k$ $(k = 2, 3)$. Следовательно, из (3.47), так же, как и выше, получаем

(3.49) $$\left(\frac{-1}{H_1^*}\right)^{(H_2+1)/2}\left(\frac{-1}{H_2}\right)^{(H_3+1)/2}\left(\frac{-1}{H_3}\right)^{(H_1^*+1)/2} = \left(\frac{2}{H_2 H_3}\right) = \pm 1.$$

21) Если в (3.49) получим верхний знак, то с одной стороны

(3.50) $$H_2 H_3 \equiv \pm 1 (\mathrm{mod}\, 8),$$

с другой стороны — $H_1^* \equiv H_2 \equiv H_3 (\mathrm{mod}\, 4)$, т.е.

(3.51) $$H_1^* H_2 \equiv H_2 H_3 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4).$$

Из (3.50) и (3.51) следует: $H_2 H_3 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 8)$; следовательно, согласно (3.43) и (3.45), получаем: $b_2 b_3 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 8)$ и $b_1 b_2 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$, т.е.

(3.52) $$b_2 \equiv b_3 (\mathrm{mod}\, 8) \quad \text{и} \quad \tfrac{1}{4} b_2 (2b_1 + b_2 + b_3) \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2).$$

22) Если в (3.49) получим нижний знак, то с одной стороны

(3.53) $$H_2 H_3 \equiv \pm 3 (\mathrm{mod}\, 8),$$

с другой же стороны H_1^*, H_2 и H_3 не будут принадлежать одному и тому же классу вычетов по модулю 4, допустим: $H_2 \equiv -H_3 (\mathrm{mod}\, 4)$, т.е.

(3.54) $$H_2 H_3 \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 4).$$

Из (3.53) и (3.54) следует: $H_2 H_3 \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 8)$; следовательно, согласно (3.43) и (3.45), получаем: $b_2 b_3 \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 8)$, т.е.

(3.55) $$b_2 \equiv -b_3 (\mathrm{mod}\, 4) \quad \text{и} \quad \tfrac{1}{4} b_2 (b_2 + b_3) \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2).$$

Если же $H_2 \equiv H_3 (\mathrm{mod}\, 4)$, то тогда $H_1^* \equiv -H_2 (\mathrm{mod}\, 4)$ и, в силу (3.53), $H_2 H_3 \equiv 5 (\mathrm{mod}\, 8)$; следовательно, согласно (3.43) и (3.45), получаем: $b_1 b_2 \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 4)$ и $b_2 b_3 \equiv 5 (\mathrm{mod}\, 8)$, т.е.

(3.56) $$\tfrac{1}{4} b_2 (2b_1 + b_2 + b_3) \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2) \quad \text{и} \quad b_2 \equiv b_3 (\mathrm{mod}\, 4).$$

Из выражений для $X_2(0, 0)$, (3.52), (3.55) и (3.56) следует, что $X_2(0, 0) = 0$.

3) Пусть $2 | \gamma_1, 2 \nmid \gamma_2$, т.е. $2^{\gamma_1} \| \eta_3, 2^{\gamma_2} \| \eta_3'$. В этом случае имеем: $2 \| H_2$, $H_k^* = H_k$ $(k = 1, 3)$. Следовательно, при помощи циклической перестановки индексов, из (3.52) и (3.56) получим, что

(3.57) $$b_3 \equiv b_1 (\mathrm{mod}\, 4), \quad \tfrac{1}{4} b_3 (2b_2 + b_3 + b_1) \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2),$$

а из (3.55) получим, что

(3.58) $$b_3 \equiv -b_1 (\mathrm{mod}\, 4), \quad \tfrac{1}{4} b_3 (b_3 + b_1) \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2).$$

Из выражений для $X_2(0, 0)$, (3.57) и (3.58) следует, что $X_2(0, 0) = 0$.

4) Пусть $2 \nmid \gamma_1, 2 \nmid \gamma_2$, т.е. $2^{\gamma_1} \| \eta_3, 2^{\gamma_2} \| \eta_3'$. В этом случае имеем: $2 \| H_3$, $H_k^* = H_k$ $(k = 1, 2)$. Следовательно, при помощи циклической перестановки индексов, из (3.57) и (3.58), соответственно, получим: $b_1 \equiv b_2 (\mathrm{mod}\, 4)$; $\tfrac{1}{4} b_1 (2b_3 + b_1 + b_2) \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2)$ и $b_1 \equiv -b_2 (\mathrm{mod}\, 4)$, $\tfrac{1}{4} b_1 (b_1 + b_2) \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2)$, откуда опять-таки следует, что $X_2(0, 0) = 0$.

Таким образом, из рассмотренных случаев следует, что если $\prod_{p|\Delta, p>2} X_p^*(0, 0) \neq 0$, то $X_2(0, 0) = 0$, т.е. равенство (3.42) всегда имеет место.

Заметим, что если $4a | \mu$, $\mu \neq 0$, $2^a \Big\| \frac{\mu}{4a}$, $p^\beta \Big\| \frac{\mu}{4a}$ $(p > 2)$, то, из полученных выше формул для $A_{2^\lambda}\left(\frac{\mu}{4a}\right)$ и $A_{p^\lambda}\left(\frac{\mu}{4a}\right)$ следует, что

(3.59) $$A_{2^\lambda}\left(\frac{\mu}{4a}\right) = 0 \quad \text{при} \quad \lambda > a + 3,$$

(3.60) $$A_{p^\lambda}\left(\frac{\mu}{4a}\right) = 0 \quad \text{при} \quad \lambda > \beta + 1.$$

Таким образом, при $4a|\mu$, и $\mu \neq 0$, согласно (3.6), функция $X_p\left(\dfrac{\mu}{4a}, z\right)$ будет конечной суммой целых функций.

В дальнейшем, ради сокращения, при $4a|\mu$ и $\mu \neq 0$, полагаем:

$$X_p = X_p\left(\frac{\mu}{4a}, 0\right). \tag{3.61}$$

Лемма 8. *Пусть* $\dfrac{\mu}{4a} = 2^{\alpha} m$ $(\alpha \geqslant 0, 2 \nmid m)$, $a_k = 2^{\gamma_k} b_k$ $(k = 1, 2, 3)$, $\gamma_1 \geqslant \gamma_2 \geqslant \gamma_3 = 0$, $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$. *Тогда*

a) *если* $2|\gamma_2, 2|\gamma_1$, *то*

$$X_2 = \left(1+(-1)^{(m-b_3)/4}\right)2^{(\alpha/2)+1} \quad \textit{при } 0 \leqslant \alpha \leqslant \gamma_2-3,\ 2|\alpha,\ m \equiv b_3 \pmod 4;$$

$$= 0 \quad \textit{при } 0 \leqslant \alpha \leqslant \gamma_2-3,\ 2|\alpha,\ m \equiv -b_3 \pmod 4$$
$$\textit{и при } 0 \leqslant \alpha \leqslant \gamma_2-3,\ 2\nmid\alpha \textit{ и при } \alpha = \gamma_2-1;$$

$$= \left(1+(-1)^{(m-b_3)/2}\right)2^{\alpha/2} \quad \textit{при } \alpha = \gamma_2-2;$$

$$= \left(1+(-1)^{(m-b_3)/2}\right)2^{\gamma_2/2} \quad \textit{при } \gamma_2 \leqslant \alpha \leqslant \gamma_1-2,\ 2|\alpha,\ b_2 \equiv b_3 \pmod 4;$$

$$= 2^{\gamma_2/2} \quad \textit{при } \alpha = \gamma_2 \leqslant \gamma_1-2,\ b_2 \equiv -b_3 \pmod 4;$$

$$= \left(1+(-1)^{(b_2+b_3)/4}\right)(\alpha-\gamma_2)2^{(\gamma_2/2)-1}+\left(1-(-1)^{(b_2+b_3)/4}\cdot 2\right)2^{\gamma_2/2}$$
$$\textit{при } \gamma_2 < \alpha \leqslant \gamma_1-2,\ 2|\alpha,\ b_2 \equiv -b_3 \pmod 4;$$

$$= \left(1+(-1)^{(b_2+b_3-2m)/4}\right)2^{\gamma_2/2}$$
$$\textit{при } \gamma_2 < \alpha < \gamma_1-1,\ 2\nmid\alpha,\ b_2 \equiv b_3 \pmod 4;$$

$$= 2^{\gamma_2/2} \quad \textit{при } \gamma_2 < \alpha = \gamma_1-1,\ b_2 \equiv b_3 \pmod 4;$$

$$= \left(1+(-1)^{(b_2+b_3)/4}\right)(\alpha-\gamma_2-1)2^{(\gamma_2/2)-1}$$
$$\textit{при } \gamma_2 < \alpha \leqslant \gamma_1-1,\ 2\nmid\alpha,\ b_2 \equiv -b_3 \pmod 4;$$

$$= \left(1+(-1)^{(b_2+b_3)/4}\right)(\gamma_1-\gamma_2-2)2^{(\gamma_2/2)-1}+$$
$$+2^{\gamma_2/2}\cdot 3+\left((-1)^{(m-\Sigma b_k)/4}-1\right)2^{(-(\alpha-\gamma)/2)-1};$$

$$\textit{при } \alpha \geqslant \gamma_1 \geqslant \gamma_2+2,\ 2|\alpha,\ b_2 \equiv -b_3 \pmod 4,\ m \equiv \sum_{k=1}^{3} b_k \pmod 4;$$

$$= \left(1+(-1)^{(b_2+b_3)/4}\right)(\gamma_1-\gamma_2-2)2^{(\gamma_2/2)-1}+\left(1-2^{-((\alpha-\gamma_1)/2)-1}\right)\cdot 2^{\gamma_2/2}\cdot 3$$

$$\textit{при } \alpha \geqslant \gamma_1 \geqslant \gamma_2+2,\ 2|\alpha,\ b_2 \equiv -b_3 \pmod 4,\ m \equiv -\sum_{k=1}^{3} b_k \pmod 4;$$

$$= \left(1+(-1)^{(b_2+b_3)/4}\right)(\gamma_1-\gamma_2-2)2^{(\gamma_2/2)-1}+\left(1-2^{-(\alpha-\gamma_1+1)/2}\right)2^{\gamma_2/2}\cdot 3$$
$$\textit{при } \alpha \geqslant \gamma_1 \geqslant \gamma_2+2,\ 2\nmid\alpha,\ b_2 \equiv -b_3 \pmod 4;$$

$$X_2 = \left(2^{((\alpha-\gamma_1)/2)+2}+(-1)^{(m-\Sigma b_k)/4}-1\right)2^{\gamma_1-(\alpha/2)-1}$$
$$\textit{при } \alpha \geqslant \gamma_1 = \gamma_2,\ 2|\alpha,\ b_2 \equiv -b_3 \pmod 4,\ m \equiv \sum_{k=1}^{3} b_k \pmod 4;$$

$$= \left(2^{((\alpha-\gamma_1)/2)+2}-3\right)2^{\gamma_1-(\alpha/2)-1}$$

$$\textit{при } \alpha \geqslant \gamma_1 = \gamma_2,\ 2|\alpha,\ b_2 \equiv -b_3 \pmod 4,\ m \equiv -\sum_{k=1}^{3} b_k \pmod 4;$$

$$= \left(2^{(\alpha-\gamma_1+3)/2}-3\right)2^{\gamma_1-(\alpha+1)/2} \quad \textit{при } \alpha \geqslant \gamma_1 = \gamma_2,\ 2\nmid\alpha,\ b_2 \equiv -b_3 \pmod 4;$$

$$= \left\{\left(1+(-1)^{(b_1+b_3)/2}\right)2^{((\alpha-\gamma_1)/2)+1}+(-1)^{(m-\Sigma b_k)/4}-(-1)^{(b_1+b_3)/2}\right\}2^{-((\alpha-\gamma)/2)-1}$$

$$\textit{при } \alpha \geqslant \gamma_1 \geqslant \gamma_2,\ 2|\alpha,\ b_2 \equiv b_3 \pmod 4,\ m \equiv \sum_{k=1}^{3} b_k \pmod 4;$$

$$= \left\{\left(1+(-1)^{(b_1+b_3)/2}\right)2^{((\alpha-\gamma_1)/2)+1}-(-1)^{(b_1+b_3)/2}\cdot 3\right\}2^{-((\alpha-\gamma)/2)-1}$$
$$\textit{при } \alpha \geqslant \gamma_1 \geqslant \gamma_2,\ 2|\alpha,\ b_2 \equiv b_3 \pmod 4,\ m \equiv -\sum_{k=1}^{3} b_k \pmod 4;$$

$$= \left\{\left(1+(-1)^{(b_1+b_3)/2}\right)2^{(\alpha-\gamma_1+1)/2}-(-1)^{(b_1+b_3)/2}\cdot 3\right\}2^{-(\alpha-\gamma+1)/2}$$
$$\textit{при } \alpha \geqslant \gamma_1 \geqslant \gamma_2,\ 2\nmid\alpha,\ b_2 \equiv b_3 \pmod 4;$$

b) *если* $2|\gamma_2, 2\nmid\gamma_1$, *то*

$$X_2 = 2^{\gamma_2/2} \quad \textit{при } \alpha = \gamma_2 = \gamma_1-1 \textit{ и при } \alpha = \gamma_2 < \gamma_1-1,$$
$$b_2 \equiv -b_3 \pmod 4 \textit{ и при } \gamma_2 < \alpha = \gamma_1-1,\ b_2 \equiv b_3 \pmod 4;$$

$$= \left(1+(-1)^{(m-b_3)/2}\right)2^{\gamma_2/2} \quad \textit{при } \gamma_2 \leqslant \alpha < \gamma_1-1,\ 2|\alpha,\ b_2 \equiv b_3 \pmod 4;$$

$$= \left(1+(-1)^{(b_2+b_3)/4}\right)(\alpha-\gamma_2)2^{(\gamma_2/2)-1}+\left(1-(-1)^{(b_2+b_3)/4}\cdot 2\right)2^{\gamma_2/2}$$
$$\textit{при } \gamma_2 < \alpha \leqslant \gamma_1-1,\ 2|\alpha,\ b_2 \equiv -b_3 \pmod 4;$$

$$= \left(1+(-1)^{(b_2+b_3-2m)/4}\right)2^{\gamma_2/2}$$
$$\textit{при } \gamma_2 < \alpha < \gamma_1-1,\ 2\nmid\alpha,\ b_2 \equiv b_3 \pmod 4;$$

$$= \left(1+(-1)^{(b_2+b_3)/4}\right)(\alpha-\gamma_2-1)2^{(\gamma_2/2)-1}$$
$$\textit{при } \gamma_2 < \alpha < \gamma_1-1,\ 2\nmid\alpha,\ b_2 \equiv -b_3 \pmod 4;$$

$$= \left(1+(-1)^{(b_2+b_3)/4}\right)(\gamma_1-\gamma_2+1)2^{(\gamma_2/2)-1}-(-1)^{(b_2+b_3)/4}\cdot 2^{-(\alpha-\gamma+1)/2}\cdot 3$$
$$\textit{при } \alpha \geqslant \gamma_1,\ 2|\alpha,\ b_2 \equiv -b_3 \pmod 4;$$

$$= \left(1+(-1)^{(b_2+b_3)/4}\right)(\gamma_1-\gamma_2+1)2^{(\gamma_2/2)-1}+$$
$$+\left((-1)^{(m-b_1)/4}-(-1)^{(b_2+b_3)/4}\right)2^{-((\alpha-\gamma)/2)-1}$$
$$\textit{при } \alpha \geqslant \gamma_1,\ 2\nmid\alpha,\ b_2 \equiv -b_3 \pmod 4,\ m = b_1 \pmod 4;$$

$$= \left(1+(-1)^{(b_2+b_2)/4}\right)(\gamma_1-\gamma_2+1)2^{(\gamma_2/2)-1}-(-1)^{(b_2+b_3)/4}\cdot 2^{-((\alpha-\gamma)/2)-1}\cdot 3$$
$$\textit{при } \alpha \geqslant \gamma_1,\ 2\nmid\alpha,\ b_2 \equiv -b_3 \pmod 4,\ m \equiv -b_1 \pmod 4;$$

$$X_2 = \{(1+(-1)^{(2b_1+b_2+b_3)/4})2^{(\alpha-\gamma_1+1)/2}-(-1)^{(2b_1+b_2+b_3)/4}\cdot 3\}\cdot 2^{-(\alpha-\gamma+1)/2}$$

$$\text{при } \alpha \geqslant \gamma_1,\ 2|\alpha,\ b_2 \equiv b_3 (\bmod 4);$$

$$= \{(1+(-1)^{(2b_1+b_2+b_3)/4})2^{((\alpha-\gamma_1)/2)+1}-(-1)^{(2b_1+b_2+b_3)/4}\cdot 3\}2^{-((\alpha-\gamma)/2)-1}$$

$$\text{при } \alpha \geqslant \gamma_1,\ 2\nmid\alpha,\ b_2 \equiv b_3 (\bmod 4),\ m \equiv b_1 (\bmod 4);$$

$$= \{(1+(-1)^{(2b_1+b_2+b_3)/4})2^{((\alpha-\gamma_1)/2)+1}+$$
$$+((-1)^{(b_1+2b_3-m)/4}-(-1)^{(2b_1+b_2+b_3)/4})\}2^{-((\alpha-\gamma)/2)-1}$$

$$\text{при } \alpha \geqslant \gamma_1,\ 2\nmid\alpha,\ b_2 \equiv b_3 (\bmod 4),\ m \equiv -b_1 (\bmod 4);$$

при $0 \leqslant \alpha \leqslant \gamma_2-1$, X_2 *принимает те же значения, что и в* a);

c) *если* $2\nmid\gamma_2,\ 2|\gamma_1$, *то*

$$X_2 = (1+(-1)^{(m-b_3)/4})2^{(\alpha/2)+1} \quad \text{при } 0 \leqslant \alpha \leqslant \gamma_2-3,\ 2|\alpha,\ m \equiv b_3 (\bmod 4);$$

$$= 0 \quad \text{при } 0 \leqslant \alpha \leqslant \gamma_2-3,\ 2|\alpha,\ m \equiv -b_3 (\bmod 4)$$
$$\text{и при } 0 \leqslant \alpha \leqslant \gamma_2-3,\ 2\nmid\alpha \text{ и при } \alpha = \gamma_2-2;$$

$$= (1+(-1)^{(m-b_2)/4})2^{(\gamma_2-1)/2} \quad \text{при } \gamma_2 \leqslant \alpha < \gamma_1-2,\ 2\nmid\alpha,\ m \equiv b_2 (\bmod 4)$$
$$\text{и при } \alpha = \gamma_1-1,\ b_1 \equiv -b_3 (\bmod 4),\ m \equiv b_2 (\bmod 4);$$

$$= (1+(-1)^{(b_2+2b_3-m)/4})2^{(\gamma_2-1)/2}$$
$$\text{при } \gamma_2 \leqslant \alpha < \gamma_1-2,\ 2\nmid\alpha,\ m \equiv -b_2 (\bmod 4)$$
$$\text{и при } \alpha = \gamma_1-1,\ b_1 \equiv b_3 (\bmod 4),\ m \equiv -b_2 (\bmod 4);$$

$$= (1+(-1)^{(m-b_3)/4})2^{(\gamma_2-1)/2}$$
$$\text{при } \gamma_2-1 \leqslant \alpha < \gamma_1-2,\ 2|\alpha,\ m \equiv b_3 (\bmod 4);$$

$$= (1+(-1)^{(2b_2+b_3-m)/4})2^{(\gamma_2-1)/2}$$
$$\text{при } \gamma_2-1 \leqslant \alpha < \gamma_1-2,\ 2|\alpha,\ m \equiv -b_3 (\bmod 4);$$

$$= 2^{(\gamma_2-1)/2} \quad \text{при } \gamma_2-1 \leqslant \alpha = \gamma_1-2 \text{ и при } \alpha = \gamma_1-1,$$
$$b_1 \equiv b_3 (\bmod 4),\ m \equiv b_2 (\bmod 4) \text{ и при } \alpha = \gamma_1-1,$$
$$b_1 \equiv -b_3 (\bmod 4),\ m \equiv -b_2 (\bmod 4) \text{ и при } \alpha = \gamma_1;$$

$$= \{1+(-1)^{(b_1+2b_2+b_3)/4}(1-2^{-(\alpha-\gamma_1)/2}\cdot 3)\}2^{(\gamma_2-1)/2}$$
$$\text{при } \alpha > \gamma_1,\ 2|\alpha,\ b_1 \equiv b_3 (\bmod 4);$$

$$= \{1+(-1)^{(b_1+b_3)/4}(1-2^{-(\alpha-\gamma_1)/2}\cdot 3)\}2^{(\gamma_2-1)/2}$$
$$\text{при } \alpha > \gamma_1,\ 2|\alpha,\ b_1 \equiv -b_3 (\bmod 4);$$

$$= \{1+(-1)^{(b_1+b_3)/4}+((-1)^{(m-b_2)/4}-(-1)^{(b_1+b_3)/4})2^{-(\alpha-\gamma_1+1)/2}\}2^{(\gamma_2-1)/2}$$
$$\text{при } \alpha > \gamma_1,\ 2\nmid\alpha,\ b_1 \equiv -b_3 (\bmod 4),\ m \equiv b_2 (\bmod 4);$$

$$X_2 = \{1+(-1)^{(b_1+b_3)/4}(1-2^{-(\alpha-\gamma_1+1)/2}\cdot 3)\}2^{(\gamma_2-1)/2}$$
$$\text{при } \alpha > \gamma_1,\ 2\nmid\alpha,\ b_1 \equiv -b_3 (\bmod 4),\ m \equiv -b_2 (\bmod 4);$$

$$= \{1+(-1)^{(b_1+2b_2+b_3)/4}+$$
$$+((-1)^{(b_2+2b_3-m)/4}-(-1)^{(b_1+2b_2+b_3)/4})2^{-(\alpha-\gamma_1+1)/2}\}2^{(\gamma_2-1)/2}$$
$$\text{при } \alpha > \gamma_1,\ 2\nmid\alpha,\ b_1 \equiv b_3 (\bmod 4),\ m \equiv -b_2 (\bmod 4);$$

$$= \{1+(-1)^{(b_1+2b_2+b_3)/4}(1-2^{-(\alpha-\gamma_1+1)/2}\cdot 3)\}2^{(\gamma_2-1)/2}$$
$$\text{при } \alpha > \gamma_1,\ 2\nmid\alpha,\ b_1 \equiv b_3 (\bmod 4),\ m \equiv b_2 (\bmod 4);$$

d) *если* $2\nmid\gamma_2,\ 2\nmid\gamma_1$, *то*

$$X_2 = (1+(-1)^{(m-b_3)/4})2^{(\gamma_2-1)/2}$$
$$\text{при } \alpha = \gamma_1-1,\ b_1 \equiv -b_2 (\bmod 4),\ m \equiv b_3 (\bmod 4);$$

$$= (1+(-1)^{(2b_2+b_3-m)/4})2^{(\gamma_2-1)/2}$$
$$\text{при } \alpha = \gamma_1-1,\ b_1 \equiv b_2 (\bmod 4),\ m \equiv -b_3 (\bmod 4);$$

$$= 2^{(\gamma_2-1)/2} \quad \text{при } \alpha = \gamma_1-1,\ b_1 \equiv b_2 (\bmod 4),\ m \equiv b_3 (\bmod 4) \text{ и при}$$
$$\alpha = \gamma_1-1,\ b_1 \equiv -b_2 (\bmod 4),\ m \equiv -b_3 (\bmod 4) \text{ и при } \alpha = \gamma_1;$$

$$= \{1+(-1)^{(b_1+b_2+2b_3)/4}(1-2^{-(\alpha-\gamma_1+1)/2}\cdot 3)\}2^{(\gamma_2-1)/2}$$
$$\text{при } \alpha > \gamma_1,\ 2|\alpha,\ b_1 \equiv b_2 (\bmod 4),\ m \equiv b_3 (\bmod 4);$$

$$= \{1+(-1)^{(b_1+b_2+2b_3)/4}+$$
$$+((-1)^{(2b_2+b_3-m)/4}-(-1)^{(b_1+b_2+2b_3)/4})2^{-(\alpha-\gamma_1+1)/2}\}2^{(\gamma_2-1)/2}$$
$$\text{при } \alpha > \gamma_1,\ 2|\alpha,\ b_1 \equiv b_2 (\bmod 4),\ m \equiv -b_3 (\bmod 4);$$

$$= \{1+(-1)^{(b_1+b_2)/4}+((-1)^{(m-b_3)/4}-(-1)^{(b_1+b_2)/4})2^{-(\alpha-\gamma_1+1)/2}\}2^{(\gamma_2-1)/2}$$
$$\text{при } \alpha > \gamma_1,\ 2|\alpha,\ b_1 \equiv -b_2 (\bmod 4),\ m \equiv b_3 (\bmod 4);$$

$$= \{1+(-1)^{(b_1+b_2)/4}(1-2^{-(\alpha-\gamma_1+1)/2}\cdot 3)\}2^{(\gamma_2-1)/2}$$
$$\text{при } \alpha > \gamma_1,\ 2|\alpha,\ b_1 \equiv -b_2 (\bmod 4),\ m \equiv -b_3 (\bmod 4);$$

$$= \{1+(-1)^{(b_1+b_2+2b_3)/4}(1-2^{-(\alpha-\gamma_1)/2}\cdot 3)\}2^{(\gamma_2-1)/2}$$
$$\text{при } \alpha > \gamma_1,\ 2\nmid\alpha,\ b_1 \equiv b_2 (\bmod 4);$$

$$= \{1+(-1)^{(b_1+b_2)/4}(1-2^{-(\alpha-\gamma_1)/2}\cdot 3)\}2^{(\gamma_2-1)/2}$$
$$\text{при } \alpha > \gamma_1,\ 2\nmid\alpha,\ b_1 \equiv -b_2 (\bmod 4);$$

при $0 \leqslant \alpha \leqslant \gamma_2-2$ *и при* $\gamma_2-1 \leqslant \alpha \leqslant \gamma_1-2$,

X_2 *принимает те же значения, что и в* c).

Доказательство. a) Пусть γ_1 и γ_2 четные. Из (3.6) и (3.10)–(3.16) получаем:

1) если $0 \leqslant \alpha \leqslant \gamma_2 - 3$, то

$$X_2 = 1 + \sum_{2|\lambda,\, \lambda=2}^{\alpha} 2^{(\lambda/2)-1} + 2^{\alpha/2} + (-1)^{(m-b_3)/4} \cdot 2^{(\alpha/2)+1} \quad \text{при} \quad 2|\alpha,\ m \equiv b_3,$$ [3]

$$= 1 + \sum_{2|\lambda,\, \lambda=2}^{\alpha} 2^{(\lambda/2)-1} - 2^{\alpha/2} \quad \text{при} \quad 2|\alpha,\ m \equiv -b_3,$$

$$= 1 + \sum_{2|\lambda,\, \lambda=2}^{\alpha-1} 2^{(\lambda/2)-1} - 2^{(\alpha-1)/2} \quad \text{при} \quad 2 \nmid \alpha;$$

2) если $\alpha = \gamma_2 - 2$, то

$$X_2 = 1 + \sum_{2|\lambda,\, \lambda=2}^{\alpha} 2^{(\lambda/2)-1} + (-1)^{(m-b_3)/2} \cdot 2^{\alpha/2};$$

3) если $\alpha = \gamma_2 - 1$, то

$$X_2 = 1 + \sum_{2|\lambda,\, \lambda=2}^{\alpha-1} 2^{(\lambda/2)-1} - 2^{(\alpha-1)/2};$$

4) если $\alpha = \gamma_2 \leqslant \gamma_1 - 2$, то

$$X_2 = 1 + \sum_{2|\lambda,\, \lambda=2}^{\gamma_2} 2^{(\lambda/2)-1} + (-1)^{(m-b_3)/2} \cdot 2^{\gamma_2/2} \quad \text{при} \quad b_2 \equiv b_3,$$

$$= 1 + \sum_{2|\lambda,\, \lambda=2}^{\gamma_2} 2^{(\lambda/2)-1} \quad \text{при} \quad b_2 \equiv -b_3;$$

5) если $\gamma_2 < \alpha \leqslant \gamma_1 - 2,\ 2|\alpha$, то

$$X_2 = 1 + \sum_{2|\lambda,\, \lambda=2}^{\gamma_2} 2^{(\lambda/2)-1} + (-1)^{(m-b_3)/2} \cdot 2^{\gamma_2/2} \quad \text{при} \quad b_2 \equiv b_3,$$

$$= 1 + \sum_{2|\lambda,\, \lambda=2}^{\gamma_2} 2^{(\lambda/2)-1} + \sum_{2|\lambda,\, \lambda=\gamma_2+2}^{\alpha} 2^{\gamma_2/2} + \sum_{2\nmid\lambda,\, \lambda=\gamma_2+3}^{\alpha-1} (-1)^{(b_2+b_3)/4} \cdot 2^{\gamma_2/2} -$$
$$- (-1)^{(b_2+b_3)/4} \cdot 2^{\gamma_2/2} \quad \text{при} \quad b_2 \equiv -b_3;$$

6) если $\gamma_2 < \alpha < \gamma_1 - 1,\ 2 \nmid \alpha,\ b_2 \equiv b_3 \pmod 4$, то

$$X_2 = 1 + \sum_{2|\lambda,\, \lambda=2}^{\gamma_2} 2^{(\lambda/2)-1} + (-1)^{(b_2+b_3-2m)/4}\ 2^{\gamma_2/2};$$

7) если $\gamma_2 < \alpha = \gamma_1 - 1,\ b_2 \equiv b_3 \pmod 4$, то

$$X_2 = 1 + \sum_{2|\lambda,\, \lambda=2}^{\gamma_2} 2^{(\lambda/2)-1};$$

[3] Здесь все сравнения имеют место по модулю 4.

8) если $\gamma_2 < \alpha \leqslant \gamma_1 - 1,\ 2 \nmid \alpha,\ b_2 \equiv -b_3 \pmod 4$, то

$$X_2 = 1 + \sum_{2|\lambda,\, \lambda=2}^{\gamma_2} 2^{(\lambda/2)-1} + \sum_{2|\lambda,\, \lambda=\gamma_2+2}^{\alpha-1} 2^{\gamma_2/2} - 2^{\gamma_2/2} + \sum_{2\nmid\lambda,\, \lambda=\gamma_2+3}^{\alpha} (-1)^{(b_2+b_3)/4}\ 2^{\gamma_2/2};$$

9) если $\alpha \geqslant \gamma_1 \geqslant \gamma_2,\ b_2 \equiv b_3 \pmod 4$, то

$$X_2 = 1 + \sum_{2|\lambda,\, \lambda=2}^{\gamma_2} 2^{(\lambda/2)-1} + \sum_{2|\lambda,\, \lambda=\gamma_1+2}^{\alpha} (-1)^{(b_1+b_3)/2} \cdot 2^{-(\lambda/2)+(\gamma_1+\gamma_2)/2} +$$
$$+ (-1)^{(b_1+b_3)/2} \cdot 2^{-(\alpha/2)+((\gamma_1+\gamma_2)/2)-1} + (-1)^{(m-\Sigma b_k)/4} \cdot 2^{-(\alpha/2)+((\gamma_1+\gamma_2)/2)-1}$$
$$\text{при } 2|\alpha,\ m \equiv \sum_{k=1}^{3} b_k,$$

$$X_2 = 1 + \sum_{2|\lambda,\, \lambda=2}^{\gamma_2} 2^{(\lambda/2)-1} + \sum_{2|\lambda,\, \lambda=\gamma_1+2}^{\alpha} (-1)^{(b_1+b_3)/2} \cdot 2^{-(\lambda/2)+(\gamma_1+\gamma_2)/2} -$$
$$- (-1)^{(b_1+b_3)/2} \cdot 2^{-(\alpha/2)+((\gamma_1+\gamma_2)/2)-1} \quad \text{при} \quad 2|\alpha,\ m \equiv -\sum_{k=1}^{3} b_k,$$

$$X_2 = 1 + \sum_{2|\lambda,\, \lambda=2}^{\gamma_2} 2^{(\lambda/2)-1} + \sum_{2|\lambda,\, \lambda=\gamma_1+2}^{\alpha-1} (-1)^{(b_1+b_3)/2} \cdot 2^{-(\lambda/2)+(\gamma_1+\gamma_2)/2} -$$
$$- (-1)^{(b_1+b_3)/2} \cdot 2^{-((\alpha+1)/2)+(\gamma_1+\gamma_2)/2} \quad \text{при} \quad 2 \nmid \alpha;$$

10) если $\alpha \geqslant \gamma_1 = \gamma_2,\ b_2 \equiv -b_3 \pmod 4$, то

$$X_2 = 1 + \sum_{2|\lambda,\, \lambda=2}^{\gamma_2} 2^{(\lambda/2)-1} + \sum_{2|\lambda,\, \lambda=\gamma_1+2}^{\alpha} 2^{-(\lambda/2)+\gamma_1} + 2^{-(\alpha/2)+\gamma_1-1} +$$
$$+ (-1)^{(m-\Sigma b_k)/4} \cdot 2^{-(\alpha/2)+\gamma_1-1} \quad \text{при} \quad 2|\alpha,\ m \equiv \sum_{k=1}^{3} b_k,$$

$$X_2 = 1 + \sum_{2|\lambda,\, \lambda=2}^{\gamma_2} 2^{(\lambda/2)-1} + \sum_{2|\lambda,\, \lambda=\gamma_1+2}^{\alpha} 2^{-(\lambda/2)+\gamma_1} - 2^{-(\alpha/2)+\gamma_1-1}$$
$$\text{при} \quad 2|\alpha,\ m \equiv -\sum_{k=1}^{3} b_k,$$

$$X_2 = 1 + \sum_{2|\lambda,\, \lambda=2}^{\gamma_2} 2^{(\lambda/2)-1} + \sum_{2|\lambda,\, \lambda=\gamma_1+2}^{\alpha-1} 2^{-(\lambda/2)+\gamma_1} - 2^{-((\alpha+1)/2)+\gamma_1} \quad \text{при} \quad 2 \nmid \alpha;$$

11) если $\alpha \geqslant \gamma_1 \geqslant \gamma_2 + 2,\ b_2 \equiv -b_3 \pmod 4$, то

$$X_2 = 1 + \sum_{2|\lambda,\, \lambda=2}^{\gamma_2} 2^{(\lambda/2)-1} + \sum_{2|\lambda,\, \lambda=\gamma_2+2}^{\gamma_1} 2^{\gamma_2/2} + \sum_{2\nmid\lambda,\, \lambda=\gamma_2+3}^{\gamma_1-1} (-1)^{(b_2+b_3)/4} \cdot 2^{\gamma_2/2} +$$
$$+ \sum_{2|\lambda,\, \lambda=\gamma_1+2}^{\alpha} 2^{-(\lambda/2)+(\gamma_1+\gamma_2)/2} + 2^{-(\alpha/2)+((\gamma_1+\gamma_2)/2)-1} +$$
$$+ (-1)^{(m-\Sigma b_k)/4} \cdot 2^{-(\alpha/2)+((\gamma_1+\gamma_2)/2)-1} \quad \text{при} \quad 2|\alpha,\ m \equiv \sum_{k=1}^{3} b_k,$$

$$X_2=1+\sum_{2|\lambda,\,\lambda=2}^{\gamma_2}2^{(\lambda/2)-1}+\sum_{2|\lambda,\,\lambda=\gamma_2+2}^{\gamma_1}2^{\gamma_2/2}+\sum_{2\nmid\lambda,\,\lambda=\gamma_2+3}^{\gamma_1-1}(-1)^{(b_2+b_3)/4}\cdot 2^{\gamma_2/2}+$$
$$+\sum_{2|\lambda,\,\lambda=\gamma_1+2}^{\alpha}2^{-(\lambda/2)+(\gamma_1+\gamma_2)/2}-2^{-(\alpha/2)+((\gamma_1+\gamma_2)/2)-1}\quad \text{при } 2|\alpha,\ m\equiv-\sum_{k=1}^{3}b_k,$$
$$X_2=1+\sum_{2|\lambda,\,\lambda=2}^{\gamma_2}2^{(\lambda/2)-1}+\sum_{2|\lambda,\,\lambda=\gamma_2+2}^{\gamma_1}2^{\gamma_2/2}+\sum_{2\nmid\lambda,\,\lambda=\gamma_2+3}^{\gamma_1-1}(-1)^{(b_2+b_3)/4}\cdot 2^{\gamma_2/2}+$$
$$+\sum_{2|\lambda,\,\lambda=\gamma_1+2}^{\alpha-1}2^{-(\lambda/2)+(\gamma_1+\gamma_2)/2}-2^{-((\alpha+1)/2)+(\gamma_1+\gamma_2)/2}\qquad \text{при}\quad 2\nmid\alpha.$$

Вычислив суммы во всех приведенных выше равенствах, получим утверждаемое.

Аналогично получаются и формулы из b), c), d).

Лемма 9. *Пусть* $p>2$, $p^{\beta}\Big\|\dfrac{\mu}{4a}$ $(\beta\geqslant 0)$, $p^{l}\|\Delta$. *Далее, пусть* $\bar a$, a', $\underline{a}$ *и* $\bar l$, l', $\underline{l}$ *определены так же, как и в лемме* 7.II. *Тогда*

$$X_p=\left(1+\left(\frac{p^{-\beta}\frac{\mu}{4a}\underline{a}}{p}\right)\right)p^{\beta/2}\qquad \textit{при}\quad l'\geqslant\beta+1,\ 2|\beta;$$
$$=0\qquad \textit{при}\quad l'\geqslant\beta+1,\ 2\nmid\beta;$$
$$=\left\{1-\left(\frac{-p^{-l'}a'\underline{a}}{p}\right)p^{-1}+\left(1+\left(\frac{-p^{-l'}a'\underline{a}}{p}\right)\right)\frac{\beta-l'}{2}(1-p^{-1})\right\}p^{l'/2}$$
$$\textit{при}\quad l'\leqslant\beta<\bar l,\ 2|\beta,\ 2l';$$
$$=\left(1+\left(\frac{p^{-\beta}\frac{\mu}{4a}\underline{a}}{p}\right)\right)p^{(l'-1)/2}\qquad \textit{при}\quad l'\leqslant\beta<\bar l,\ 2|\beta,\ 2\nmid l';$$
$$=\left(1+\left(\frac{p^{-(\beta+l')}\frac{\mu}{4a}a'}{p}\right)\right)p^{(l'-1)/2}\qquad \textit{при}\quad l'\leqslant\beta<\bar l,\ 2\nmid\beta,\ 2\nmid l';$$
$$=\left(1+\left(\frac{-p^{-l'}a'\underline{a}}{p}\right)\right)\frac{\beta-l'+1}{2}(1-p^{-1})p^{l'/2}$$
$$\textit{при}\quad l'\leqslant\beta<\bar l,\ 2\nmid\beta,\ 2|l';$$
$$=\left\{1+p^{-1}+\left(1+\left(\frac{-p^{-l'}a'\underline{a}}{p}\right)\right)\frac{\bar l-l'}{2}(1-p^{-1})\right\}p^{l'/2}+$$
$$+\left(\left(\frac{-p^{-(\beta+l)}\frac{\mu}{4a}\Delta}{p}\right)-1\right)p^{((l-\beta)/2)-1}\quad \textit{при}\quad \beta\geqslant\bar l,\ 2|\beta,\ 2|\bar l,\ 2|l';$$

$$X_p=\left(1+\left(\frac{-p^{-\bar l}\bar a\underline{a}}{p}\right)\right)p^{(l'-1)/2}-\left(\frac{-p^{-\bar l}\bar a\underline{a}}{p}\right)(1+p^{-1})p^{(l-\beta-1)/2}$$
$$\textit{при}\quad \beta\geqslant\bar l,\ 2|\beta,\ 2|\bar l,\ 2\nmid l';$$
$$=\left(1+\left(\frac{-p^{-l'}a'\underline{a}}{p}\right)\right)\left(1+(1-p^{-1})\frac{\bar l-l'-1}{2}\right)p^{l'/2}$$
$$-\left(\frac{-p^{-l'}a'\underline{a}}{p}\right)(1+p^{-1})p^{(l-\beta-1)/2}\quad \textit{при}\quad \beta\geqslant\bar l,\ 2|\beta,\ 2|l',\ 2\nmid\bar l;$$
$$=\left(1+\left(\frac{-p^{-l}\bar a a'}{p}\right)\right)p^{(l'-1)/2}+\left(\left(\frac{p^{-\beta}\frac{\mu}{4a}\underline{a}}{p}\right)-\left(\frac{-p^{-l}\bar a a'}{p}\right)\right)p^{((l-\beta)/2)-1}$$
$$\textit{при}\quad \beta\geqslant\bar l,\ 2|\beta,\ 2\nmid\bar l,\ 2\nmid l';$$
$$=\left(1+\left(\frac{-p^{-l}\bar a a'}{p}\right)\right)p^{(l'-1)/2}-\left(\frac{-p^{-l}\bar a a'}{p}\right)(1+p^{-1})p^{(l-\beta-1)/2}$$
$$\textit{при}\quad \beta\geqslant\bar l,\ 2\nmid\beta,\ 2\nmid\bar l,\ 2\nmid l';$$
$$=\left(1+\left(\frac{-p^{-l'}a'\underline{a}}{p}\right)\right)\left(1+(1-p^{-1})\frac{\bar l-l'-1}{2}\right)p^{l'/2}+$$
$$+\left(\left(\frac{p^{-(\beta+\bar l)}\frac{\mu}{4a}\bar a}{p}\right)-\left(\frac{-p^{-l'}a'\underline{a}}{p}\right)\right)p^{((l-\beta)/2)-1}$$
$$\textit{при}\quad \beta\geqslant\bar l,\ 2\nmid\beta,\ 2\nmid\bar l,\ 2|l';$$
$$=\left(1+\left(\frac{-p^{-\bar l}\bar a\underline{a}}{p}\right)\right)p^{(l'-1)/2}+$$
$$+\left(\left(\frac{-p^{-(\beta+l')}\frac{\mu}{4a}a'}{p}\right)-\left(\frac{-p^{-\bar l}\bar a\underline{a}}{p}\right)\right)p^{((l-\beta)/2)-1}$$
$$\textit{при}\quad \beta\geqslant\bar l,\ 2\nmid\beta,\ 2\nmid l',\ 2|\bar l;$$
$$=\left\{(1+p^{-1})(1-p^{-(\beta-\bar l+1)/2})+\left(1+\left(\frac{-p^{-l'}a'\underline{a}}{p}\right)\right)\frac{\bar l-l'}{2}(1-p^{-1})\right\}p^{l'/2}$$
$$\textit{при}\quad \beta\geqslant\bar l,\ 2\nmid\beta,\ 2|l',\ 2|\bar l.$$

Доказательство. Рассуждая так же, как и при доказательстве леммы 8 и принимая во внимание формулы (3.6) и (3.26)–(3.39), получаем утверждаемое (см. также [4], лемма 24).

Лемма 10. *Пусть* $4a|\mu$ *и* $\mu\neq 0$. *Тогда функция* $V\left(\frac{\mu}{4a},z\right)$, *определенная при* $\operatorname{Re}z>\frac{1}{2}$ *формулами* (3.5) *и* (3.2), *аналитически продолжаема в полуплоскость* $\operatorname{Re}z>-\frac{1}{2}$ *и регулярна в этой полуплоскости. Далее, в произвольной фиксированной ограниченной области этой полуплоскости*

$$\left|V\left(\frac{\mu}{4a},z\right)\right|<K\mu^2,$$

где K *не зависит ни от* μ, *ни от* z.

Доказательство. I. В силу леммы 5 при $\operatorname{Re}z>\frac{1}{2}$ имеем

$$V\left(\frac{\mu}{4a},z\right)=X_2\left(\frac{\mu}{4a},z\right)\prod_{p|\Delta\frac{\mu}{4a},\,p>2}X_p\left(\frac{\mu}{4a},z\right)\prod_{p\nmid 2\Delta\frac{\mu}{4a}}X_p\left(\frac{\mu}{4a},z\right). \tag{3.62}$$

При $4a|\mu$ и $\mu\neq 0$, согласно (3.6), (3.59) и (3.60), произведение

$$X_2\left(\frac{\mu}{4a},z\right)\prod_{p|\Delta\frac{\mu}{4a},\,p>2}X_p\left(\frac{\mu}{4a},z\right)$$

является целой функцией.

Если $p>2$, $p\nmid\Delta\frac{\mu}{4a}$, т.е. $l=\beta=0$, то, согласно (3.33), получим

$$A_{p^2}\left(\frac{\mu}{4a}\right)=\left(\frac{-\Delta\frac{\mu}{4a}}{p}\right)\frac{1}{p}\quad\text{при}\quad\lambda=1. \tag{3.63}$$

Если $-\Delta\frac{\mu}{4a}$ не является полным квадратом, то, согласно (3.6), (3.63) и (3.60), при $\operatorname{Re}z>0$, получим

$$\prod_{p\nmid 2\Delta\frac{\mu}{4a}}X_p\left(\frac{\mu}{4a},z\right)=\prod_p\left(1+\left(\frac{-4\Delta\frac{\mu}{4a}}{p}\right)p^{-1-z}\right)=\sum_{q=1}^{\infty}\mu^2(q)\chi(q)q^{-1-z}, \tag{3.64}$$

где $\mu(q)$ — функция Мебиусса, а $\chi(q)=\left(\frac{-4\Delta\frac{\mu}{4a}}{q}\right)$ — символ Кронекера, т.е. неглавный характер по модулю $\Delta\frac{|\mu|}{4a}$.

Таким образом, если $-\Delta\frac{\mu}{4a}$ не является полным квадратом, то, согласно (3.62), (3.64) и лемме 12 работы [4], функция $V\left(\frac{\mu}{4a},z\right)$ аналитически продолжаема в полуплоскость $\operatorname{Re}z>-\frac{1}{2}$, регулярна в этой полуплоскости и

$$V\left(\frac{\mu}{4a},z\right)=X_2\left(\frac{\mu}{4a},z\right)\prod_{p|\Delta\frac{\mu}{4a},\,p>2}X_p\left(\frac{\mu}{4a},z\right)L(1+z,\chi)\prod_p\left(1-\chi(p^2)p^{-2(1+z)}\right). \tag{3.65}$$

Если $-\Delta\frac{\mu}{4a}$ есть полный квадрат, то, согласно (3.6), (3.63) и (3.60), при $\operatorname{Re}z>0$, получим:

$$\prod_{p\nmid 2\Delta\frac{\mu}{4a}}X_p\left(\frac{\mu}{4a},z\right)=\prod_{p\nmid 2\Delta\frac{\mu}{4a}}(1+p^{-1-z})=\zeta(1+z)\prod_{p|2\Delta\frac{\mu}{4a}}(1-p^{-1-z})\prod_{p\nmid 2\Delta\frac{\mu}{4a}}(1-p^{-2(1+z)}). \tag{3.66}$$

Первый множитель в правой части этого равенства имеет простой полюс в точке $z=0$; первое произведение является целой функцией, а второе — определяет регулярную функцию в полуплоскости $\operatorname{Re}z>\frac{1}{2}$.

Далее, заметим, что если $-\Delta\frac{\mu}{4a}$ является полным квадратом, то

$$2|\gamma_1+\gamma_2+\alpha,\quad 2|\bar{l}+l'+\beta. \tag{3.67}$$

Следовательно, для того чтобы доказать, что функция $V\left(\frac{\mu}{4a},z\right)$ аналитически продолжаема в полуплоскость $\operatorname{Re}z>-\frac{1}{2}$ и регулярна в этой полуплоскости и в том случае, когда $-\Delta\frac{\mu}{4a}$ является полным квадратом, согласно (3.62) и (3.66), надо показать, что всегда имеет место равенство

$$X_2^*\left(\frac{\mu}{4a},0\right)\prod_{p|\Delta(\mu/4a),\,p>2}X_p^*\left(\frac{\mu}{4a},0\right)=0. \tag{3.68}$$

Здесь, согласно (3.67), звездочки обозначают, что среди чисел γ_1,γ_2 и α или ровно одно четное или все три четные и что p пробегает лишь те нечетные простые делители $\Delta\frac{\mu}{4a}$, для которых $p^{\bar{l}+l'+\beta}\|\Delta\frac{\mu}{4a}$, причем ровно одно из чисел $\bar{l}$, l' и β четное.

II. Переходим к доказательству равенства (3.68).

Если $-\Delta\frac{\mu}{4a}$ есть полный квадрат, то

$$-b_1b_2b_3m\equiv 1\pmod 8. \tag{3.69}$$

Далее, из сравнения $(b_1+b_2+b_3)^2 \equiv 2(b_1b_2+b_1b_3+b_2b_3)+3 \pmod 8$ следует: $b_1b_2b_3(b_1+b_2+b_3) \equiv -1 \pmod 4$, откуда, в силу (3.69), получаем

$$m \equiv b_1+b_2+b_3 \pmod 4. \tag{3.70}$$

Очевидно

$$b_1b_2b_3(b_1+b_2+b_3) \equiv b_2b_3+b_1b_3+b_1b_2 \pmod 8. \tag{3.71}$$

Из леммы 9, согласно (3.61), следует, что $X_p^*\left(\frac{\mu}{4a}, 0\right) = 0$ тогда и только тогда, когда

$$\left(\frac{p^{-\beta}\frac{\mu}{4a}\underline{a}}{p}\right) = -1 \quad \text{при} \quad l' \geqslant \beta+1,\ 2|\beta,\ 2\nmid \bar{l},\ 2\nmid l'$$
$$\text{или при} \quad l' \leqslant \beta < \bar{l},\ 2|\beta,\ 2\nmid \bar{l},\ 2\nmid l';$$

$$\left(\frac{p^{-(\beta+l)}\frac{\mu}{4a}a'}{p}\right) = -1 \quad \text{при} \quad l' \leqslant \beta < \bar{l},\ 2\nmid\beta,\ 2|\bar{l},\ 2\nmid l';$$

$$\left(\frac{-p^{-l'}a'\underline{a}}{p}\right) = -1 \quad \text{при} \quad l' \leqslant \beta < \bar{l},\ 2\nmid\beta,\ 2\nmid\bar{l},\ 2|l';$$

$$\left(\frac{p^{-\beta}\frac{\mu}{4a}\underline{a}}{p}\right) = \left(\frac{-p^{-l}\bar{a}a'}{p}\right) = -1 \quad \text{при} \quad \beta \geqslant \bar{l},\ 2|\beta,\ 2\nmid\bar{l},\ 2\nmid l'; \tag{3.72}$$

$$\left(\frac{p^{-(\beta+l)}\frac{\mu}{4a}\bar{a}}{p}\right) = \left(\frac{-p^{-l'}a'\underline{a}}{p}\right) = -1 \quad \text{при} \quad \beta \geqslant \bar{l},\ 2\nmid\beta,\ 2\nmid\bar{l},\ 2|l';$$

$$\left(\frac{p^{-(\beta+l)}\frac{\mu}{4a}a'}{p}\right) = \left(\frac{-p^{-\bar{l}}\bar{a}\underline{a}}{p}\right) = -1 \quad \text{при} \quad \beta \geqslant \bar{l},\ 2\nmid\beta,\ 2|\bar{l},\ 2\nmid l';$$

$$X_p^*\left(\frac{\mu}{4a}, 0\right) = 0 \quad \text{всегда при } l' \geqslant \beta+1,\ 2\nmid\beta,\ 2\nmid\bar{l}+l'.$$

Из леммы 8, согласно (3.61), следует, что $X_2^*\left(\frac{\mu}{4a}, 0\right) = 0$ тогда и только тогда, когда

$$(-1)^{(m-b_3)/4} = -1$$
$$\text{при } \gamma_1 \equiv \gamma_2 \pmod 2,\ 0 \leqslant \alpha \leqslant \gamma_2-3,\ 2|\alpha,\ m \equiv b_3\ (^4),$$
$$\text{или при } 2\nmid\gamma_2,\ 2\nmid\gamma_1,\ \alpha = \gamma_1-1,\ b_1 \equiv -b_2,\ m \equiv b_3;$$

(4) Здесь все сравнения имеют место по модулю 4.

$$(-1)^{(m-b_3)/2} = -1 \quad \text{при } 2|\gamma_2,\ 2|\gamma_1,\ \alpha = \gamma_2-2$$
$$\text{или при } 2|\gamma_2,\ 2|\gamma_1,\ \gamma_2 \leqslant \alpha \leqslant \gamma_1-2,\ 2|\alpha,\ b_2 \equiv b_3;$$

$$(-1)^{(m-\Sigma b_k)/4} = (-1)^{(b_1+b_3)/2} = -1$$
$$\text{при } 2|\gamma_2,\ 2|\gamma_1,\ \alpha \geqslant \gamma_1 \geqslant \gamma_2,\ 2|\alpha,\ b_2 \equiv b_3,\ m \equiv \sum_{k=1}^{3} b_k;$$

$$(-1)^{(b_2+b_3-2m)/4} = -1$$
$$\text{при } 2|\gamma_2,\ 2\nmid\gamma_1,\ \gamma_2 < \alpha < \gamma_1-1,\ 2\nmid\alpha,\ b_2 \equiv b_3;$$

$$(-1)^{(b_2+b_3)/4} = -1$$
$$\text{при } 2|\gamma_2,\ 2\nmid\gamma_1,\ \gamma_2 < \alpha < \gamma_1-1,\ 2\nmid\alpha,\ b_2 \equiv -b_3;$$

$$(-1)^{(b_1+2b_3-m)/4} = (-1)^{(2b_1+b_2+b_3)/4} = -1$$
$$\text{при } 2|\gamma_2,\ 2\nmid\gamma_1,\ \alpha \geqslant \gamma_1,\ 2\nmid\alpha,\ b_2 \equiv b_3,\ m \equiv -b_1;$$

$$(-1)^{(m-b_1)/4} = (-1)^{(b_2+b_3)/4} = -1$$
$$\text{при } 2|\gamma_2,\ 2\nmid\gamma_1,\ \alpha \geqslant \gamma_1,\ 2\nmid\alpha,\ b_2 \equiv -b_3,\ m \equiv b_1;$$

$$(-1)^{(m-b_2)/4} = -1$$
$$\text{при } 2\nmid\gamma_2,\ 2|\gamma_1,\ \gamma_2 \leqslant \alpha < \gamma_1-2,\ 2\nmid\alpha,\ m_1 \equiv b_2 \tag{3.73}$$
$$\text{или при } 2\nmid\gamma_2,\ 2|\gamma_1,\ \alpha = \gamma_1-1,\ b_1 \equiv -b_3,\ m \equiv b_2;$$

$$(-1)^{(b_2+2b_3-m)/4} = -1$$
$$\text{при } 2\nmid\gamma_2,\ 2|\gamma_1,\ \gamma_2 \leqslant \alpha < \gamma_1-2,\ 2\nmid\alpha,\ m \equiv -b_2$$
$$\text{или при } 2\nmid\gamma_2,\ 2|\gamma_1,\ \alpha = \gamma_1-1,\ b_1 \equiv b_3,\ m \equiv -b_2;$$

$$(-1)^{(b_2+2b_3-m)/4} = (-1)^{(b_1+2b_2+b_3)/4} = -1$$
$$\text{при } 2\nmid\gamma_2,\ 2|\gamma_1,\ \alpha > \gamma_1,\ 2\nmid\alpha,\ b_1 \equiv b_3,\ m \equiv -b_2;$$

$$(-1)^{(m-b_2)/4} = (-1)^{(b_1+b_3)/4} = -1$$
$$\text{при } 2\nmid\gamma_2,\ 2|\gamma_1,\ \alpha > \gamma_1,\ 2\nmid\alpha,\ b_1 \equiv -b_3,\ m \equiv b_2;$$

$$(-1)^{(2b_2+b_3-m)/4} = -1$$
$$\text{при } 2\nmid\gamma_2,\ 2\nmid\gamma_1,\ \alpha = \gamma_1-1,\ b_1 \equiv b_2,\ m \equiv -b_3;$$

$$(-1)^{(2b_2+b_3-m)/4} = (-1)^{(b_1+b_2+2b_3)/4} = -1$$
$$\text{при } 2\nmid\gamma_2,\ 2\nmid\gamma_1,\ \alpha > \gamma_1,\ 2|\alpha,\ b_1 \equiv b_2,\ m \equiv -b_3;$$

$$(-1)^{(m-b_3)/4} = (-1)^{(b_1+b_2)/4} = -1$$
$$\text{при } 2\nmid\gamma_2,\ 2\nmid\gamma_1,\ \alpha > \gamma_1,\ 2|\alpha,\ b_1 \equiv -b_2,\ m \equiv b_3;$$

$$X_2^*\left(\frac{\mu}{4a}, 0\right) = 0$$

всегда при $2|\gamma_2+\gamma_1,\ 0 \leqslant \alpha \leqslant \gamma_2-3,\ 2|\alpha,\ m \equiv -b_3$ и при $2\nmid\gamma_2+\gamma_1,\ 0 \leqslant \alpha \leqslant \gamma_2-1,\ 2\nmid\alpha$.

Теперь покажем, что равенство (3.68) выполняется, если выполняется равенство (3.42), т.е. всегда.

Действительно, если для надлежащего $p>2$ имеем $X_p^*(0,0)=0$, то, из полученных в лемме 7 выражений для $X_p(0,0)$ следует:

1) $\left(\frac{-p^{-\bar{l}}\bar{a}a}{p}\right)=-1$ при $2|\bar{l}, 2\nmid l'$; но так как $-\Delta\frac{\mu}{4a}$ есть полный квадрат, то

$$\left(\frac{p^{-(\beta+l')}\frac{\mu}{4a}a'}{p}\right)\left(\frac{-p^{-\bar{l}}\bar{a}a}{p}\right)=\left(\frac{-p^{-(\beta+\bar{l})}\Delta\frac{\mu}{4a}}{p}\right)=1,$$

т. е. и $$\left(\frac{p^{-(\beta+l')}\frac{\mu}{4a}a'}{p}\right)=-1;$$

2) $\left(\frac{-p^{-l'}a'a}{p}\right)=-1$ при $2\nmid\bar{l}, 2|l'$, т.е. как и выше и

$$\left(\frac{p^{-(\beta+\bar{l})}\frac{\mu}{4a}\bar{a}}{p}\right)=-1;$$

3) $\left(\frac{-p^{-l'}\bar{a}a'}{p}\right)=-1$ при $2\nmid\bar{l}, 2\nmid l'$, т.е. и

$$\left(\frac{p^{-\beta}\frac{\mu}{4a}a}{p}\right)=-1.$$

Таким образом, согласно (3.72), и $X_p^*\left(\frac{\mu}{4a},0\right)=0$, т.е. равенство (3.68) выполнено.

Если же $\prod_{p|\Delta, p>2} X_p^*(0,0)\neq 0$, то, согласно (3.42), $X_2(0,0)=0$.

Но как следует из полученных в лемме 7 выражений для $X_2(0,0)$, это возможно лишь в одном из следующих 7 случаев:

1) Пусть $2|\gamma_2, 2|\gamma_1, b_2\equiv b_3 \pmod 4$, $(-1)^{(b_1+b_3)/2}=-1$. Тогда

$$b_1\equiv b_2\equiv b_3\equiv 1 \pmod 4 \quad \text{или} \quad b_1\equiv b_2\equiv b_3\equiv 3 \pmod 4. \tag{3.74}$$

Из (3.70) и (3.74) следует: $m-b_3\equiv b_1+b_2\equiv 2 \pmod 4$ (итак сравнение $m\equiv b_3 \pmod 4$ невозможно), т.е. $(-1)^{(m-b_3)/2}=-1$. Из (3.74) также следует:

$b_1, b_2, b_3\equiv 1$ или $5 \pmod 8$ или $b_1, b_2, b_3\equiv 3$ или $7 \pmod 8$, т.е.

$$b_1b_2+b_1b_3+b_2b_3\equiv 3 \pmod 8; \tag{3.75}$$

Из (3.69), (3.71) и (3.75) получаем, что

$$m\equiv -3\sum_{k=1}^{3} b_k \pmod 8,\quad \text{т.е.}\quad (-1)^{(m-\Sigma b_k)/4}=-1.$$

2) Пусть $2|\gamma_2, 2\nmid\gamma_1, b_2\equiv b_3 \pmod 4$, $(-1)^{(2b_1+b_2+b_3)/4}=-1$, т.е.

$$2b_1+b_2+b_3\equiv 4 \pmod 8. \tag{3.76}$$

Из (3.69) следует: $-m\equiv b_1b_2b_3\equiv b_1 \pmod 4$, следовательно

$$b_2+b_3-2m\equiv b_2+b_3+2b_1\equiv 4 \pmod 8,\quad \text{т.е.}\quad (-1)^{(b_2+b_3-2m)/4}=-1.$$

Кроме того

$$b_2b_3\equiv 1 \text{ или } 5 \pmod 8 \text{ и, соответственно,} \quad b_2\equiv b_3 \text{ или } b_3+4 \pmod 8. \tag{3.77}$$

Из (3.69) и (3.77) следует: $-m\equiv b_1$ или $5b_1 \pmod 8$, откуда, согласно (3.77) и (3.76), или

$$b_1+2b_3-m\equiv 2b_1+2b_3\equiv 2b_1+b_2+b_3\equiv 4 \pmod 8$$

или

$$b_1+2b_3-m\equiv 6b_1+2b_3\equiv 6b_1+b_2-4+b_3\equiv 4b_1 \pmod 8,$$

т.е. всегда

$$(-1)^{(b_1+2b_3-m)/4}=-1.$$

3) Пусть $2|\gamma_2, 2\nmid\gamma_1, b_2\equiv -b_3 \pmod 4$, $(-1)^{(b_2+b_3)/4}=-1$. Тогда

$$b_2+b_3\equiv 4 \pmod 8,$$

следовательно

$$b_2b_3+1\equiv 4b_3 \pmod 8.$$

Таким образом, согласно (3.69),

$$m-b_1\equiv -b_1(b_2b_3+1)\equiv -4b_1b_3 \pmod 8,\quad \text{т.е.}\quad (-1)^{(m-b_1)/4}=-1.$$

4) Пусть $2\nmid\gamma_2, 2|\gamma_1, b_1\equiv b_3 \pmod 4$, $(-1)^{(b_1+2b_2+b_3)/4}=-1$, т.е.

$$b_1+2b_2+b_3\equiv 4 \pmod 8. \tag{3.78}$$

В этом случае также имеем:

$$b_1b_3\equiv 1 \text{ или } 5 \pmod 8 \text{ и, соответственно,} \quad b_1\equiv b_3 \text{ или } b_3+4 \pmod 8. \tag{3.79}$$

Из (3.69) и (3.79) следует: $-m\equiv b_2$ или $5b_2 \pmod 8$ (итак сравнение $m\equiv b_2 \pmod 4$ невозможно), отсюда, согласно (3.79) и (3.78), или

$$b_2+2b_3-m\equiv 4 \pmod 8$$

или

$$b_2+2b_3-m \equiv 4b_2 \pmod 8,$$

т.е. всегда

$$(-1)^{(b_2+2b_3-m)/4} = -1.$$

5) Пусть $2\nmid\gamma_2, 2|\gamma_1, b_1 \equiv -b_3 \pmod 4)$, $(-1)^{(b_1+b_3)/4} = -1$. Тогда $b_1+b_3 \equiv 4 \pmod 8$, следовательно $b_1b_3+1 \equiv 4b_3 \pmod 8$. Таким образом, согласно (3.69),

$$m-b_2 \equiv -b_2(b_1b_3+1) \equiv -4b_2b_3 \pmod 8$$

(итак сравнение $m \equiv -b_2 \pmod 4$ невозможно), т.е.

$$(-1)^{(m-b_2)/4} = -1.$$

6) Пусть $2\nmid\gamma_2, 2\nmid\gamma_1, b_1 \equiv b_2 \pmod 4$, $(-1)^{(b_1+b_2+2b_3)/4} = -1$, т.е.

(3.80) $$b_1+b_2+2b_3 \equiv 4 \pmod 8.$$

В этом случае также имеем

(3.81) $b_1b_2 \equiv 1$ или $5 \pmod 8$ и, соответственно,

$$b_1 \equiv b_2 \text{ или } b_2+4 \pmod 8.$$

Из (3.69) и (3.81) следует: $-m \equiv b_3$ или $5b_3 \pmod 8$, откуда, согласно (3.81) и (3.80), или

$$2b_2+b_3-m \equiv 4 \pmod 8$$

или

$$2b_2+b_3-m \equiv 4b_3 \pmod 8,$$

т.е. всегда

$$(-1)^{(2b_2+b_3-m)/4} = -1.$$

7) Пусть $2\nmid\gamma_2, 2\nmid\gamma_1, b_1 \equiv -b_2 \pmod 4$, $(-1)^{(b_1+b_2)/4} = -1$. Тогда $b_1+b_2 \equiv 4 \pmod 8$, следовательно $b_1b_2+1 \equiv 4b_2 \pmod 8$. Таким образом, согласно (3.69),

$$m-b_3 \equiv -b_3(b_1b_2+1) \equiv -4b_2b_3 \pmod 8; \quad \text{т.е.} \quad (-1)^{(m-b_3)/4} = -1.$$

Из всего сказанного, согласно (3.73), следует, что и $X_2^*\left(\frac{\mu}{4a}, 0\right) = 0$, т.е. равенство (3.68) опять — таки выполнено.

III. Из (3.10)–(3.24) следует, что

$$\left|X_2\left(\frac{\mu}{4a}, z\right)\right| < 1+\sum_{\lambda=2}^{a+3} 2^{-\lambda/2}\cdot 2^{\gamma_1+1}\cdot 2^{-\lambda\mathrm{Re}z};$$

следовательно, при $\mathrm{Re}z > -\frac{1}{2}$ получим

(3.82) $$\left|X_2\left(\frac{\mu}{4a}, z\right)\right| < 1+(a+2)\cdot 2^{\gamma_1+1} < K\cdot 2^{a+\gamma_1},$$

где K не зависит ни от μ, ни от z.

При $p>2$ из (3.26)–(3.39) следует, что

$$\left|X_p\left(\frac{\mu}{4a}, z\right)\right| < 1+\sum_{\lambda=1}^{\beta+1} p^{\bar{l}}\cdot p^{-\lambda/2}\cdot p^{-\lambda\mathrm{Re}z};$$

следовательно, при $\mathrm{Re}z > -\frac{1}{2}$ имеем

(3.83)
$$\prod_{p|\Delta(\mu/4a),\,p>2}\left|X_p\left(\frac{\mu}{4a}, z\right)\right| < \prod_{p|\Delta(\mu/4a),\,p>2}\left(1+(\beta+1)p^{\bar{l}}\right) < K\prod_{p|\Delta(\mu/4a),\,p>2} p^{\beta+\bar{l}},$$

где K не зависит ни от μ, ни от z.

Если $-\Delta\frac{\mu}{4a}$ не является полным квадратом, то, согласно лемме 10 работы [4], при $\mathrm{Re}z > -\frac{1}{2}$ получим

(3.84) $$|L(1+z, \chi)| < K|\mu|\left(|\mathrm{Im}(1+z)|+1\right);$$

очевидно, что в произвольной ограниченной области

(3.85) $$|\mathrm{Im}(1+z)| < K.$$

Далее, в произвольной ограниченной области полуплоскости $\mathrm{Re}z > -\frac{1}{2}$ имеем

(3.86) $$\left|\prod_p \left(1-\chi(p)p^{-2(1+z)}\right)\right| < K.$$

Таким образом, если $-\Delta\frac{\mu}{4a}$ не является полным квадратом, то, согласно (3.65) и (3.82)–(3.86), в произвольной фиксированной ограниченной области полуплоскости $\mathrm{Re}z > -\frac{1}{2}$ будем иметь:

(3.87) $$\left|V\left(\frac{\mu}{4a}, z\right)\right| < K\mu^2,$$

где K не зависит ни от μ, ни от z.

Теперь пусть $-\Delta\frac{\mu}{4a}$ есть полный квадрат. Из (3.82), (3.83) и (3.68) следует, что в произвольной фиксированной ограниченной области полуплоскости $\mathrm{Re}z > -\frac{1}{2}$ имеем

(3.88) $$\left|X_2\left(\frac{\mu}{4a}, z\right)\prod_{p|\Delta(\mu/4a),\,p>2} X_p\left(\frac{\mu}{4a}, z\right)\zeta(1+z)\right| < K|\mu|,$$

где K не зависит ни от μ, ни от z. Далее, при $\operatorname{Re} z > -\frac{1}{2}$ имеем

$$\Big|\prod_{p|2\Delta(\mu/4a)} (1-p^{-1-z})\Big| \leqslant \prod_{p|2\Delta(\mu/4a)} (1+p^{-(1+\operatorname{Re} z)}) < \prod_{p|2\Delta(\mu/4a)} p < K|\mu|,$$

(3.89)

$$\Big|\prod_{p\nmid 2\Delta(\mu/4a)} (1-p^{-2(1+z)})\Big| < \prod_{p} (1+p^{-2(1+\operatorname{Re} z)}) < K.$$

Таким образом, если $-\Delta\frac{\mu}{4a}$ есть полный квадрат, то, согласно (3.62), (3.66), (3.88) и (3.89), в произвольной фиксированной ограниченной области полуплоскости $\operatorname{Re} z > -\frac{1}{2}$ также будет иметь место неравенство (3.87).

Лемма 11. *Функция $\Psi(\tau, z)$, определенная при $\operatorname{Re} z > \frac{1}{2}$ формулой* (3.1), *аналитически продолжаема в полуплоскость $\operatorname{Re} z > -\frac{1}{2}$ и регулярна в этой полуплоскости.*

Доказательство. Пусть D — произвольная фиксированная ограниченная область полуплоскости $\operatorname{Re} z > -\frac{1}{2}$, содержащая точку $z = 0$. Согласно леммам 3, 7 и 10, функции $T(\mu, z)$ и $V\left(\frac{\mu}{4a}, z\right)$ регулярны в области D и в этой области

$$|T(0, z)V(0, z)| < K, \qquad \left|T(\mu, z)V\left(\frac{\mu}{4a}, z\right)\right| < K\mu^2 e^{-K'|\mu|}$$

при $4a|\mu$, $\mu \neq 0$; здесь K не зависит ни от μ, ни от z.

Таким образом, ряд $\sum\limits_{4a|\mu,\, \mu=-\infty}^{\infty} T(\mu, z)V\left(\frac{\mu}{4a}, z\right)$ абсолютно и равномерно сходится в D, и представляет в этой области регулярную функцию от z. Следовательно, согласно (3.3),

$$1+\frac{e(3/8)}{2^{(5/2)+2z}\Delta^{1/2}a^{(1/2)+z}} \sum_{4a|\mu,\, \mu=-\infty}^{\infty} T(\mu, z)V\left(\frac{\mu}{4a}, z\right) \tag{3.90}$$

является искомым аналитическим продолжением функции $\Psi(\tau, z)$ в полуплоскость $\operatorname{Re} z > -\frac{1}{2}$.

Так как функция $\Psi(\tau, z)$ регулярна в точке $z = 0$, то, принимая во внимание (3.90), полагаем

$$\Theta(\tau) = \Psi(\tau, z)|_{z=0} = 1+\frac{e(3/8)}{2^{5/2}\Delta^{1/2}a^{1/2}} \sum_{\mu,\, \mu=-\infty}^{\infty} T(\mu, z)V\left(\frac{\mu}{4a}, z\right)\Big|_{z=0}. \tag{3.91}$$

Лемма 12. *Функция $\Theta(\tau)$ удовлетворяет условиям 1) и 3) определения 2 и определению 3. Далее, для каждой подстановки группы $\Gamma_0(4a)$ имеет место соотношение*

$$\Theta\left(\frac{a\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) = i^{(3/2)\eta(\gamma)(\operatorname{sgn}\delta-1)}i^{(3/4)(|\delta|-1)^2}\left(\frac{\Delta\beta\operatorname{sgn}\delta}{|\delta|}\right)(\gamma\tau+\delta)^{3/2}\Theta(\tau),$$

где $\eta(\gamma)$ определено в лемме 6.

Доказательство. Согласно лемме 3, 4), из (3.91) следует:

$$\Theta(\tau) = 1+\frac{\pi}{\Delta^{1/2}a^{1/2}} \sum_{4a|\mu,\, \mu=1}^{\infty} \mu^{1/2} V\left(\frac{\mu}{4a}, z\right)\Big|_{z=0} e\left(\frac{\tau\mu}{4a}\right). \tag{3.92}$$

Первая часть утверждаемого следует из (3.92) и (3.87).

В силу лемм 6, 11 и принципа аналитического продолжения, тождество (3.8) имеет место также и в области D, т.е., в частности, и при $z = 0$. Следовательно, согласно (3.91), справедлива и вторая часть утверждаемого.

Лемма 13. *Положим*

$$\psi(\tau) = \prod_{k=1}^{3}\vartheta_{00}(\tau; 0, 2a_k) - \Theta(\tau) - A\prod_{k=1}^{3}\vartheta_{g_k h_k}(\tau; 0, 2N_k),$$

где A произвольная постоянная. Пусть

$$2|g_k, \quad N_k|N \quad (k = 1, 2, 3), \quad a|N, \quad 4|N\sum_{k=1}^{3}\frac{h_k^2}{N_k}, \tag{3.93}$$

$$4N_1N_2N_3\left|\left(\frac{g_1}{2}\right)^2 N_2N_3+\left(\frac{g_2}{2}\right)^2 N_3N_1+\left(\frac{g_3}{2}\right)^2 N_1N_2.\right. \tag{3.94}$$

Далее, пусть для всех a и δ, удовлетворяющих условию $a\delta \equiv 1 \pmod{4N}$, выполняется равенство

$$\prod_{k=1}^{3}\left\{\left(\frac{N_k}{|\delta|}\right)\vartheta_{ag_k, h_k}(\tau; 0, 2N_k)\right\} = \left(\frac{\Delta}{|\delta|}\right)\prod_{k=1}^{3}\vartheta_{g_k h_k}(\tau; 0, 2N_k). \tag{3.95}$$

Тогда функция $\psi^4(\tau)$ будет ц.м.ф. размерности — 6, принадлежащей подгруппе $\Gamma_0(4N)$, и делителя $4N$.

Доказательство. Согласно (2.3) и лемме 12, функция $\psi(\tau)$, а следовательно и $\psi^4(\tau)$, удовлетворяет условиям 1) и 3) определения 2.

Для каждой подстановки группы $\Gamma_0(4N)$ имеет место (см. [6], стр. 21, формула (5.9) при $s=3$) соотношение

$$\prod_{k=1}^{3} \vartheta_{g_k h_k}\left(\frac{a\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}; 0, 2N_k\right) = e\left(-\frac{a\gamma\delta^2}{16}\sum_{k=1}^{3}\frac{h_k^2}{N_k}\right) e\left(\frac{\beta\delta}{4}\sum_{k=1}^{3}\delta^{2\varphi(2N_k)-2}\frac{g_k^2}{4N_k}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{2\beta\operatorname{sgn}\delta}{|\delta|}\right) i^{(3/2)\eta(\gamma)(\operatorname{sgn}\delta-1)}\cdot i^{(3/2)(1-|\delta|)}\prod_{k=1}^{3}\left(\frac{N_k}{|\delta|}\right)(\gamma\tau+\delta)^{3/2}\prod_{k=1}^{3}\vartheta_{a g_k h_k}(\tau; 0, 2N_k),$$

откуда, в силу (3.94) и (3.95), получаем

$$\prod_{k=1}^{3} \vartheta_{g_k h_k}\left(\frac{a\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}; 0, 2N_k\right) = \tag{3.96}$$

$$= i^{(3/2)\eta(\gamma)(\operatorname{sgn}\delta-1)}\cdot i^{(3/4)(|\delta|-1)^2}\left(\frac{\Delta\beta\operatorname{sgn}\delta}{|\delta|}\right)(\gamma\tau+\delta)^{3/2}\prod_{k=1}^{3}\vartheta_{g_k h_k}(\tau; 0, 2N_k).$$

Согласно лемме 12, получаем, что для каждой подстановки группы $\Gamma_0(4N)$ имеет место соотношение

$$\psi\left(\frac{a\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) = i^{(3/2)\eta(\gamma)(\operatorname{sgn}\delta-1)}\cdot i^{(3/4)(|\delta|-1)^2}\left(\frac{\Delta\beta\operatorname{sgn}\delta}{|\delta|}\right)(\gamma\tau+\delta)^{3/2}\psi(\tau),$$

т.е.

$$\psi^4\left(\frac{a\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) = (\gamma\tau+\delta)^6\psi^4(\tau). \tag{3.97}$$

Таким образом, функция $\psi^4(\tau)$ удовлетворяет также и условию 2) определения 2.

Тождество (3.97), следуя Гекке, запишем в виде: $\psi^4|V=\psi^4$, где V — произвольная матрица группы $\Gamma_0(4N)$. Далее, дословно повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве лемм 20 и 21 работы [4] (стр. 244–246 и 248), лишь с той разницей, что вместо матриц группы $\Gamma(4a)$ следует рассматривать матрицы группы $\Gamma(4N)$, получаем, что, в окрестности $\tau=-\frac{\delta}{\gamma}$ ($\gamma\neq 0$, $(\gamma,\delta)=1$, $a\delta-\beta\gamma=1$) имеет место разложение

$$(\gamma\tau+\delta)^6\psi^4(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m e\left(\frac{m}{4N}\cdot\frac{a\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right).$$

Следовательно, функция $\psi^4(\tau)$ удовлетворяет и условию 4) определения 2.

Так же, как и в лемме 18 работы [6] (стр. 21, 22), при помощи условия (3.94), можно показать, что функция $\prod_{k=1}^{3}\vartheta_{g_k h_k}(\tau; 0, 2N_k)$, а следовательно, согласно лемме 12, и функция $\psi^4(\tau)$, удовлетворяет определению 3.

Цитированная литература

[1] E. Hecke, *Analytische Funktionen und algebraische Zahlen*, Mathematische Werke, Göttingen 1959, стр. 336–360, 381–404.

[2] — *Über Dirichlet-Reihen mit Funktionalgleichung und ihre Nullstellen auf den Mittelgeraden*, ibid. стр. 708–730.

[3] — *Analytische Arithmetik der positiven quadratischen Formen*, ibid., стр. 789–918.

[4] G. Lomadse, *Über die Darstellung der Zahlen durch einige ternäre quadratische Formen*, Acta Arith. 6 (1961), стр. 225–275.

[5] Г. А. Ломадзе, *О представлении чисел положительными бинарными диагональными квадратичными формами*, Мат. сб. 68. 2 (1965), стр. 282–312.

[6] — *О представлении чисел некоторыми квадратичными формами с шестью переменными*, I. Т. руды Тбилисск. Универс. 117 (1966), стр. 7–43.

[7] H. Maass, *Konstruktion ganzer Modulformen halbzahliger Dimension mit ϑ-Multiplikatoren in einer und zwei Variabeln*, Abhandl. Math. Sem. Univ. Hamburg 12 (1938), стр. 133–162.

[8] H. Streefkerk, *Over het aantal oplossingen der diophantische vergelijking* $U=\sum_{i=1}^{s}(Ax_i+Bx_i+C)$, Dissertation, Amsterdam 1943.

[9] Е. Титчмарш, *Теория функций* (перевод с английского), Москва-Ленинград 1951.

[10] J. V. Uspensky, *On the number of representations of integers by certain ternary quadratic forms*, Amer. J. Math. 51 (1929), стр. 51–60.

Получено 10. 6. 1970 99