ACTA ARITHMETICA
XIX (1971)

Stathmes euclidiens et séries formelles

par

FRANÇOIS DRESS (Talence)

1. Introduction. Rappels. Nous avons démontré ([1], p. 17) que, si A est un anneau euclidien pour un stathme φ, alors l'anneau des séries formelles généralisées $\mathscr{A}_X = S^{-1}A[[X]]$, où S est la partie multiplicativement stable $\{X^n \mid n \geqslant 0\}$, est un anneau euclidien pour le stathme φ_X ainsi défini:

$$\text{si } F(X) = \sum_{n \geqslant h} a_n X^n \quad (h \in \mathbf{Z},\ a_h \neq 0),$$

$$\varphi_X\big(F(X)\big) = \varphi(a_h).$$

Notre propos est de reprendre cette étude pour établir une correspondance entre les stathmes de A et certains stathmes remarquables de $\mathscr{A}_X$, ce qui nous permettra en particulier de démontrer une réciproque du résultat que nous avons rappelé.

Auparavant nous allons redonner brièvement les définitions relatives aux stathmes euclidiens et à la notion de plus petit stathme. Nous y ajouterons l'énoncé du théorème fondamental que nous aurons à utiliser. Ces généralités ont été introduites par T. Motzkin [2], mais nous suivrons ici la présentation qu'en a donné P. Samuel [3], avec parfois des additifs personnels à la terminologie.

DEFINITION. Étant donnés un anneau commutatif intègre A et un ordinal $\mathscr{N}$, on dit qu'une application $\varphi\colon A \to \mathscr{N}$ est un *préstathme euclidien* (sur A) si elle vérifie

E 1) $\varphi(0) = 0$,

E 2) si a, $b \in A$, $b \neq 0$, il existe q, $r \in A$ tels que $a = bq + r$, avec $\varphi(r) < \varphi(b)$.

DEFINITION. On dit que le préstathme $\varphi\colon A \to \mathscr{N}$ est un *stathme euclidien* si de plus il vérifie

E 3) si a, $b \in A$, $a \neq 0$,

$$b \text{ divise } a \text{ entraîne } \varphi(b) \leqslant \varphi(a).$$

On dit qu'un stathme φ est incompressible si $\mathrm{Im}\varphi$ est un segment initial de $\mathcal{N}$ (et alors $\varphi(x) = 1 \Leftrightarrow x$ est inversible).

DEFINITION. Étant donnés deux préstathmes φ et ψ: $A \to \mathcal{N}$, on dit que $\varphi \leqslant \psi$ si on a

$$\varphi(x) \leqslant \psi(x) \quad \text{pour tout } x \in A.$$

On obtient alors les deux résultats suivants (dont on trouvera les démonstrations dans [3]):

1° à partir de tout préstathme euclidien on peut construire un stathme euclidien (stathme qui est plus petit que le préstathme donné);

2° tout anneau euclidien possède un plus petit stathme (manifestement unique et qui est également, d'après le résultat précédent, le plus petit préstathme).

Étant donné un anneau commutatif intègre A, on peut définir par récurrence sur les ordinaux les ensembles suivants:

$$\begin{aligned} S_0 &= \{0\},\\ S'_n &= \bigcup_{k<n} S_k,\\ S_n &= \{b \mid b \in A - S'_n \text{ tel que l'application}\\ &\qquad \text{canonique } S'_n \to A/bA \text{ soit surjective}\}.\end{aligned}$$

On remarquera que la propriété „$S'_n \to A/bA$ est surjective" équivaut à „pour tout $a \in A$, il existe $r \in S'_n$ tel que $a - r \in bA$, i.e. $a = bq + r$".

THÉORÈME FONDAMENTAL (T. Motzkin [2]). *A est un anneau euclidien si et seulement si il existe un ordinal $\mathcal{N}$ tel que*

$$A = \bigcup_{n<\mathcal{N}} S_n.$$

Et dans ces conditions, l'application ψ: $A \to \mathcal{N}$ définie par $\psi(x) = n$ si $x \in S_n$ est le plus petit stathme de A.

2. Stathmes euclidiens sur les anneaux de séries formelles. Le cas des anneaux de séries formelles $\mathcal{A} = A[[X]]$ est trivial. Si A est un corps, l'anneau $\mathcal{A}$ est euclidien car c'est un anneau de valuation discrète, et si A n'est pas un corps, l'anneau $\mathcal{A}$ est non euclidien car il n'est pas principal.

Nous nous intéresserons donc aux anneaux de séries formelles généralisées que nous avons définis dans notre introduction: $\mathcal{A}_X = S^{-1}A[[X]]$.

DEFINITION. Soient A un anneau (commutatif intègre dans ce qui suit), $\mathcal{A}_X$ l'anneau $S^{-1}A[[X]]$, et E un ensemble. Si φ est une application de A dans E, on désignera par φ_X l'application de $\mathcal{A}_X$ dans E définie par

$$\text{si } F(X) = \sum_{n \geqslant h} a_n X^n \quad (h \in \mathbf{Z},\ a_h \neq 0),$$
$$\varphi_X(F(X)) = \varphi(a_h).$$

Inversement, étant donnée une application de $\mathcal{A}_X$ dans E, on dira qu'elle est A-déterminée si elle ne dépend que de la valeur du coefficient initial de la série formelle considérée, et on la notera alors φ_X (φ étant l'application correspondante de A dans E).

THÉORÈME 1. *La fonction $\varphi \mapsto \varphi_X$ est une bijection entre les stathmes euclidiens de A et les stathmes euclidiens A-déterminés de $\mathcal{A}_X$.*

1. Soit φ un stathme sur A. Alors φ_X est un préstathme sur $\mathcal{A}_X$. Il faut donc établir l'existence d'une division euclidienne dans $\mathcal{A}_X$. Nous en avons déjà donné la démonstration dans [1], nous allons la rappeler brièvement.

On se place dans le corps $K((X))$, K étant le corps des fractions de A. Étant données deux séries $F(X)$ et $G(X)$ de $\mathcal{A}_X$, ou bien leur quotient est dans $\mathcal{A}_X$, i.e. $F(X)$ est divisible par $G(X)$, ou bien il existe un indice λ tel que

$$\frac{F(X)}{G(X)} = c_s X^s + c_{s+1} X^{s+1} + \ldots + c_\lambda X^\lambda + \ldots,$$

avec

$$c_s, \ldots, c_{\lambda-1} \in A, \qquad c_\lambda \notin A.$$

Si q est le coefficient initial de $G(X)$, on vérifie alors sans difficulté que $qc_\lambda \in A$. Cela conduit à poser

$$c_\lambda = c'_\lambda + \frac{q'}{q}, \qquad \text{avec} \qquad c'_\lambda \in A \qquad \text{et} \qquad \varphi(q') < \varphi(q).$$

En définissant ensuite le polynôme généralisé

$$P(X) = c_s X^s + \ldots + c_{\lambda-1} X^{\lambda-1} + c'_\lambda X^\lambda,$$

on montre que la série $R(X) = F(X) - G(X)P(X) \in \mathcal{A}_X$ vérifie

$$\varphi_X(R) < \varphi_X(F)$$

car son coefficient initial est q'.

On termine alors la démonstration en remarquant que φ_X est non seulement un préstathme mais aussi un stathme sur $\mathcal{A}_X$, ce qui découle immédiatement du fait que φ est un stathme: si G divise F, le coefficient initial de G divise le coefficient initial de F.

2. Soit φ_X un stathme A-déterminé sur $\mathcal{A}_X$. Si φ est un préstathme sur A, il sera là aussi trivial de constater que c'est un stathme. Il suffit donc d'établir l'existence d'une division euclidienne dans A.

Étant donnés a, $b \in A$, $a \neq 0$, on divise a par b dans $\mathcal{A}_X$:

$$a = b(q_s X^s + q_{s+1} X^{s+1} + \ldots) + (r_t X^t + r_{t+1} X^{t+1} + \ldots)$$

avec

$$\varphi_X(r_t X^t + \ldots) < \varphi_X(b), \qquad \text{i.e.} \qquad \varphi(r_t) < \varphi(b).$$

Deux cas sont alors possibles:

— ou $s \leqslant -1$, et alors $s = t$, $r_t = -bq_s$, d'où une contradiction avec la propriété E 3) des stathmes euclidiens car

$$\varphi_X(r_t X^t + \ldots) = \varphi_X(r_t) < \varphi_X(b);$$

— ou $s \geqslant 0$, et alors $t \geqslant 0$, ce qui donne la division euclidienne cherchée: $a = bq_0 + r_0$ (q_0 pouvant éventuellement être nul), avec

$$\varphi(r_0) < \varphi(b) \quad \text{ou} \quad r_0 = 0.$$

THÉORÈME 2. *Si $\mathscr{A}_X$ est un anneau euclidien, alors son plus petit stathme ψ est A-déterminé.*

Nous allons montrer, par récurrence sur les ordinaux n, la propriété suivante: si une série $b_k X^k + b_{k+1} X^{k+1} + \ldots$ ($b_k \neq 0$) appartient à l'ensemble S_n (défini au paragraphe 1), alors toute autre série de coefficient initial b_k appartient à S_n.

Supposons donc que cette propriété soit vraie pour tous les ordinaux inférieurs à n. Si on considère un élément $a \in A$, $a \neq 0$, on peut le diviser dans $\mathscr{A}_X$ par la série $b_k + b_{k+1} X + \ldots = X^{-k}(b_k X^k + b_{k+1} X^{k+1} + \ldots)$ qui est également le plus petit stathme n (ceci pour simplifier les écritures):

$$a = (b_k + b_{k+1} X + \ldots)(q_s X^s + \ldots) + (r_t X^t + \ldots)$$

avec

$$\psi(r_t X^t + \ldots) < \psi(b_k + \ldots) = n.$$

Deux cas sont alors possibles:

— ou $s \leqslant -1$, et alors $s = t$, $r_t = -b_k q_s$. Mais alors $\psi(r_t X^t + \ldots) < \psi(b_k + \ldots) = n$ entraîne, d'après l'hypothèse de récurrence, $\psi(r_t) = \psi(r_t X^t + \ldots) < n$. Comme b_k divise r_t, on en déduit $\psi(b_k) \leqslant \psi(r_t) < n$ et, en appliquant une seconde fois l'hypothèse de récurrence, on aboutit à une contradiction:

$$\psi(b_k) = \psi(b_k + b_{k+1} X + \ldots) < n;$$

— ou $s \geqslant 0$, et alors $t \geqslant 0$, ce qui donne une division euclidienne dans A de a par b_k: $a = b_k q_0 + r_0$ (q_0 pouvant éventuellement être nul), avec

$$\psi(r_0) = \psi(r_0 + r_1 X + \ldots) < n \quad \text{ou} \quad r_0 = 0.$$

Ayant ainsi montré que tout $a \in A$, $a \neq 0$, peut être divisé euclidiennement dans A par b_k, avec le plus petit stathme ψ de $\mathscr{A}_X$, on applique alors la méthode utilisée au 1 de la démonstration du théorème 1; on montre de cette manière que, si $F(X)$ est une série quelconque de $\mathscr{A}_X$ et $G(X)$ une série de coefficient initial b_k, on peut toujours écrire une division

$$F(X) = G(X)P(X) + R(X), \quad \text{avec} \quad \psi(R(X)) < n.$$

Cela montre que, pour toute série $G(X) \in \mathscr{A}_X$ de coefficient initial b_k, on a $\psi(G(X)) = n$. En effet, si $\psi(G(X))$ était supérieur à n, on pourrait, d'après ce qui précède, poser $\psi_1(G(X)) = n$ et $\psi_1(F(X)) = \psi(F(X))$ pour tout $F(X) \neq G(X)$, et obtenir ainsi un préstathme ψ_1 inférieur au plus petit stathme ψ, ce qui est impossible; par ailleurs, l'hypothèse de récurrence interdit que l'on ait $\psi(G(X)) < n$, ce qui entraînerait $\psi(b_k + b_{k+1} X + \ldots) < n$ également.

THÉORÈME 3. *Pour que $\mathscr{A}_X = S^{-1}A[[X]]$ soit euclidien, il faut et il suffit que A soit euclidien. Dans ce cas, leurs plus petits stathmes respectifs sont en correspondance dans la bijection $\varphi \to \varphi_X$ (précédemment définie).*

Démonstration par simple conjonction des théorèmes 1 et 2.

Nous terminerons ce paragraphe en indiquant une remarque qui nous a été suggérée par T. Motzkin: il est bien connu que l'intersection de deux sous-anneaux principaux n'est pas en général un sous-anneau principal; on peut même énoncer que l'intersection de deux sous-anneaux euclidiens n'est pas en général un sous-anneau principal. Un contre-exemple peut être fourni par $\boldsymbol{Z}_X = S^{-1}\boldsymbol{Z}[[X]]$ et $\boldsymbol{Q}[X]$, sous-anneaux euclidiens de $\boldsymbol{Q}((X))$ et dont l'intersection $\boldsymbol{Z}[X]$ n'est pas principale.

3. Stathmes et topologies. Étant donné un anneau B muni d'une topologie $\mathscr{T}$ et d'un stathme euclidien φ, on peut définir la compatibilité de φ avec $\mathscr{T}$ par la propriété suivante:

tout $x \in B$, $x \neq 0$, possède un voisinage $V(x)$ tel que, quel que soit $y \in V(x)$, $\varphi(y) = \varphi(x)$.

(Ce qui revient à exprimer que les ensembles $\{x \in B \mid \varphi(x) = n\}$ — à l'exception de $\{0\}$ si la topologie n'est pas discrète — sont ouverts dans $\mathscr{T}$).

On peut alors faire les deux remarques suivantes:

— pour les anneaux euclidiens $\mathscr{A}_X$ étudiés précédemment, les stathmes A-déterminés sont compatibles avec la topologie définie par la famille fondamentale $X^n A[[X]]$ de voisinages de 0;

— si le groupe des unités d'un anneau euclidien B est fini, aucun stathme sur B n'est compatible avec une topologie autre que la topologie discrète (un ensemble fini ne pouvant être ouvert dans un groupe topologique que si la topologie est discrète).

Bibliographie

[1] F. Dress, *Familles de séries formelles et ensembles de nombres algébriques*, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 4e série, 1 (1968), pp. 1–44.

[2] T. S. Motzkin, *The euclidean algorithm*, Bull. Amer. Math. Soc. 55 (1949), pp. 1142–1146.

[3] P. Samuel, *Anneaux euclidiens* (rédigé par Mme Rhin). Séminaire Algèbre et Théorie des Nombres, Fac. Sc. Caen, 1968.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
FACULTÉ DES SCIENCES DE BORDEAUX
33 — Talence, France

Reçu le 12. 5. 1970 (86)