THEOREM 6. *Let* $\mathrm{Exp}\big((\log k)^2(\log\log k)^{-1}\big) \leqslant u \leqslant \mathrm{Exp}\big((\log k)^{4+\varepsilon}\big)$, $\varepsilon > 0$ *arbitrarily small but fixed constant and*

$$h = \mathrm{Exp}\left\{(\log u)\left(1 - G\left(\frac{\log\log k}{\log k} + \frac{(\log k)(\log\log k)^{1/2}}{\log u}\right)\right)\right\}$$

with a certain positive constant G.

Then there exists an x *satisfying* $u \leqslant x \leqslant 2u$ *such that for every integer* n *in* $[x, x+h]$ *we have*

$$P(n; k) > (2-\varepsilon_1)k\log k$$

where ε_1 *is an arbitrarily small positive constant (the constant* G *in* h *may depend on* ε_1*, but certainly does not depend on* ε*).*

Remark. We can make slight improvements on this theorem and we do not wish to state them here. We may also remark that in Theorem A of the introduction we can improve the R.H.S. to 2 if we can prove something like (for $k \geqslant 100$)

$$|a\log a_1 - \log a_2| + |a\log a_3 - \log a_4| + |a\log a_5 - \log a_6| > Ce^{-(\log k)^2(\log\log k)^{-1}}$$

where $a_1, a_2, \ldots, a_6$ are multiplicatively independent positive rational numbers with height at most $k^{(\log\log k)^{1/2}}$, a is a positive integer not exceeding $(\log k)^5$ and C is a positive absolute constant.

Added in proof.

A COROLLARY TO THEOREM 2. *Let* $k \geqslant k_0$ *and* $n_1, n_2, \ldots$ *the sequence of all natural numbers whose largest prime factors exceed* k. *Then*

$$n_{i+1} - n_i \leqslant \frac{k}{\log k} + \frac{7k}{(\log k)^2} \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

References

[1] A. Baker, *Linear forms in the logarithms of algebraic numbers I*, Mathematika 13 (1966), pp. 204–216, *IV*, ibid. 15 (1968), pp. 204–216.

[2] P. Erdös, *On consecutive integers*, Nieuw. Arch. Voor. Wiskunde, 3 (1955), pp. 124–128.

[3] H. Halberstam and K. F. Roth, *On the gaps between consecutive k-free integers*, Journ. London Math. Soc. (26) (1951), pp. 268–273.

[4] K. Ramachandra, *A note on Baker's method*, Journ. Austr. Math. Soc. 10 (1969), pp. 197–203.

[5] — *A note on numbers with a large prime factor I*, Journ. London Math. Soc. 2 (1969), pp. 303–306.

[6] — *A note on numbers with a large prime factor II*, Journ. Ind. Math. Soc. (to appear).

[7] A. Schinzel, *On two theorems of Gelfond and some of their applications*, Acta Arith. 13 (1967), pp. 177–236.

TATA INSTITUTE OF FUNDAMENTAL RESEARCH
Bombay, India

Received on 15. 2. 1970 (37)

ACTA ARITHMETICA
XIX (1971)

Quotientbasen und (R)-dichte Mengen

von

TIBOR ŠALÁT (Bratislava)

In der Arbeit [3], an welche die vorliegende Arbeit anknüpft, sind die Quotientmengen $R(A)$ für die Mengen A,

$$A \subset \{1, 2, 3, \ldots\} = N$$

so definiert: $R(A)$ bedeutet die Menge aller rationalen Zahlen der Form c/d, wo $c, d \in A$. Diese Definition kann man in folgender natürlicher Weise verallgemeinern.

DEFINITION 1. Wenn $A, B \subset N$, dann bedeutet $R(A, B)$ die Menge aller rationalen Zahlen der Form a/b, $a \in A$, $b \in B$. $R(A, B)$ nennt man die Quotientmenge der Mengen A, B.

Es gilt im allgemeinen $R(A, B) \neq R(B, A)$. Weiter offensichtlich $R(A, A) = R(A)$.

Es sei für die weiteren Bedürfnisse bemerkt, daß für $A \subset N$ das Symbol $\delta_1(A)$ $(\delta_2(A))$ die Zahl $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n}$ $\Big(\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n}\Big)$ bezeichnet, wo $A(n) = \sum\limits_{a \leqslant n,\, a \in A} 1$ ist. Wenn der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n}$ existiert, dann setzen wir $\delta(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n}$. Die Zahlen $\delta_1(A)$, $\delta_2(A)$ bzw. $\delta(A)$ nennt man die untere, obere asymptotische Dichte von A bzw. die asymptotische Dichte von A.

Es bedeute im weiteren R^+ die Menge aller positiven rationalen Zahlen. Es ergibt sich die Frage, unter welchen Voraussetzungen über die Mengen A, B die Gleichheit $R(A, B) = R^+$ gilt.

SATZ 1. *Die Mengen* $A, B \subset N$ *sollen wenigstens eine der folgenden Bedingungen erfüllen:*

(a) $\delta(A) = 1, \quad \delta_2(B) = 1;$

(b) $\delta_2(A) = 1, \quad \delta(B) = 1.$

Dann existiert zu jedem $r \in R^+$ *eine unendliche Anzahl von Paaren* $(a, b) \in A \times B$, *so daß* $r = a/b$.

FOLGERUNG. *Wenn A, B eine der Bedingungen* (a), (b) *erfüllen, dann ist* $R(A, B) = R^+$.

Beweis des Satzes. Es erfüllen A, B die Bedingung (a). Es existiere eine Zahl $r = p/q \in R^+$, $p, q > 0$, $(p, q) = 1$, so daß nur für eine endliche Anzahl von Paaren $(a, b) \in A \times B$ die Gleichheit $r = a/b$ gilt.

Wenn kein Paar $(a, b) \in A \times B$ mit $r = a/b$ existiert, dann setzen wir im weiteren $s = 1$. Wenn solche Paare existieren und (a_i, b_i) $(i = 1, 2, \ldots, m)$ sind alle solche Paare, dann setzen wir $s = \max(a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_m)$. Setzen wir noch $d = \max(p, q)$, $d' = \min(p, q)$.

Wählen wir ein $n_0 > s$ so daß für alle $n > n_0$

(1) $$\frac{A(n)}{n} > 1 - \frac{1}{3d},$$

(2) $$\frac{c}{n} < \frac{1}{6d}$$

gilt, wo $c = \frac{1}{2}\left[\frac{s}{d'}\right] + \frac{1}{2}$ ist. Ein solches n_0 existiert auf Grund der Bedingung (a).

Zur endlichen Folge

(3) $$s+1, \; s+2, \; \ldots, \; n \qquad (n > n_0)$$

gehören alle solche Vielfachen lp der Zahl p, für welche $s/p < l \leqslant n/p$ und alle solche Vielfachen kq der Zahl q, für welche $s/q < k \leqslant n/q$ gilt. Wenn also eine natürliche Zahl i die Bedingung

(4) $$s/d' < i \leqslant n/d$$

erfüllt, dann gehören die Zahlen ip, iq gleichzeitig zur Folge (3). Da $ip/iq = p/q = r$ ist, infolge der Definition von s entweder $ip \notin A$ oder $iq \notin B$.

Bezeichnen wir mit M_1 (M_2) die Menge aller die Bedingung (4) erfüllenden Zahlen i, für welche $ip \notin A$ $(iq \notin B)$. Auf Grund des vorigen haben wir

$$P(M_1) + P(M_2) \geqslant \left[\frac{n}{d}\right] - \left[\frac{s}{d'}\right],$$

wo $P(M_j)$ $(j = 1, 2)$ die Anzahl der Elemente von M_j bezeichnet.

Daraus folgt, daß wenigstens eine der Zahlen $P(M_j)$ $(j = 1, 2)$ nicht kleiner als $\frac{1}{2}\left(\left[\frac{n}{d}\right] - \left[\frac{s}{d'}\right]\right)$ ist.

Wir zeigen, daß die Beziehung

(5) $$P(M_1) \geqslant \frac{1}{2}\left(\left[\frac{n}{d}\right] - \left[\frac{s}{d'}\right]\right)$$

nicht gelten kann.

Es gelte (5). Dann haben wir

$$A(n) \leqslant n - \frac{1}{2}\left(\left[\frac{n}{d}\right] - \left[\frac{s}{d'}\right]\right)$$

und daraus bekommen wir durch leichte Berechnung

$$\frac{A(n)}{n} < 1 - \frac{1}{2d} + \frac{c}{n}, \qquad c = \frac{1}{2}\left[\frac{s}{d'}\right] + \frac{1}{2}.$$

Auf Grund der Wahl von n_0 (siehe (2)) haben wir $\frac{A(n)}{n} < 1 - \frac{1}{3d}$ und dies ist ein Widerspruch mit (1).

Es muß also

$$P(M_2) \geqslant \frac{1}{2}\left(\left[\frac{n}{d}\right] - \left[\frac{s}{d'}\right]\right)$$

für jedes $n > n_0$ gelten. Daraus

$$\frac{B(n)}{n} \leqslant 1 - \frac{1}{2d} + \frac{c}{n} \qquad (n > n_0)$$

und so

$$\delta_2(B) = \limsup_{n\to\infty} \frac{B(n)}{n} \leqslant 1 - \frac{1}{2d} < 1.$$

Das ist aber ein Widerspruch mit der Bedingung (a).

Wenn also A, B die Bedingung (a) erfüllen, dann gilt die Behauptung des Satzes.

Wenn A, B die Bedingung (b) erfüllen und $r \in R^+$, dann existiert auf Grund des vorhergehenden Teiles des Beweises eine unendliche Anzahl von Paaren $(b, a) \in B \times A$, so daß $b/a = 1/r$. Also es existiert in diesem Falle eine unendliche Anzahl von Paaren $(a, b) \in A \times B$, so daß $r = a/b$ gilt. Damit ist der Beweis des Satzes beendet.

Bemerkung. Mit Hilfe einiger einfacher Beispiele kann man zeigen, daß die Bedingung (a) (oder (b)) im Satz 1 durch die schwächere Bedingung $\delta_2(A) = \delta_2(B) = 1$ nicht ersetzt werden kann. Es genügt A, B so zu wählen, daß $\delta_2(A) = \delta_2(B) = 1$ und $A \cap B = \emptyset$ ist (z.B. $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$,

$$A_k = \{(2k)^{2k}, (2k)^{2k}+1, \ldots, (2k+1)^{2k+1}-1\},$$

$$B_k = \{(2k-1)^{2k-1}, (2k-1)^{2k-1}+1, \ldots, (2k)^{2k}-1\},$$

$(k = 1, 2, \ldots)$).

Offensichtlich $1\notin R(A,B)$, weil $A\cap B=\emptyset$. Also $R(A,B)\neq R^{+}$. Auch die Voraussetzung $\delta_2(B)=1$ kann nicht in der Bedingung (a) des Satzes 1 abgeschwächt werden. Das zeigt der folgende

SATZ 2. *Zu jedem $\varepsilon>0$ existiert ein Paar von Mengen $A, B\subset N$, so daß*

$$\delta(A)=1,\qquad \delta_2(B)>1-\varepsilon\qquad \textit{und}\qquad R(A,B)\neq R^{+}.$$

Beweis. Es sei $\varepsilon>0$. Wählen wir eine Primzahl $p>1/\varepsilon$. Setzen wir $A=N$ und B bedeute die Menge aller durch p nicht teilbaren natürlichen Zahlen. Dann ist

$$\delta(A)=1,\qquad \delta(B)=1-\frac{1}{p}>1-\varepsilon$$

und offensichtlich $1/p\notin R(A,B)$.

Im weiteren werden wir die folgende Frage studieren: Unter welchen Voraussetzungen über die Mengen A, B ist die Menge $R(A,B)$ dicht im Intervall $\langle 0,+\infty)$. Wir beweisen hier Ergebnisse, welche einigen Ergebnissen aus [3] ähnlich sind.

SATZ 3. *A, B seien unendliche Mengen von natürlichen Zahlen. Es bedeute M eine der Mengen A, B. Es sei*

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{M(bn)}{M(an)}>1$$

für alle reellen a, b, $0<a<b$. Dann ist $R(A,B)$ in $\langle 0,+\infty)$ dicht.

Beweis. Es sei $M=A$ und $I=(a,b\rangle$ $(0<a<b)$. Wir zeigen, daß

$$I\cap R(A,B)\neq\emptyset. \tag{6}$$

Aus der Voraussetzung des Satzes folgt die Existenz einer solchen Zahl n_0, daß für jedes $n>n_0$ die Ungleichheit $A(bn)>A(an)$ gilt. Da B eine unendliche Menge ist, existiert ein $d\in B$, $d>n_0$. Nach dem vorhergehenden haben wir dann $A(bd)>A(ad)$. Folglich existiert ein $c\in A$, so daß $ad<c\leqslant bd$, daraus $c/d\in I$ und gleichzeitig $c/d\in R(A,B)$. Also gilt (6).

Wenn $M=B$ ist, dann folgt aus dem vorigen Teil des Beweises, daß $R(B,A)$ in $\langle 0,+\infty)$ dicht ist. Es ist aber ersichtlich, daß die Menge $R(A,B)$ genau dann in $\langle 0,+\infty)$ dicht ist, wenn $R(B,A)$ in $\langle 0,+\infty)$ dicht ist.

SATZ 4. *A, B seien unendliche Mengen von natürlichen Zahlen und M bezeichne eine dieser Mengen. Es sei vorausgesetzt, daß reelle Konstanten $c>0$, $a\geqslant 0$ so existieren, daß*

$$M(x)\sim\frac{cx}{\log^{a}x}\ (^1)$$

ist. Dann ist $R(A,B)$ in $\langle 0,+\infty)$ dicht.

(1) $f(x)\sim g(x)$ bedeutet $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)/g(x))=1$.

Beweis. Durch leichte Berechnung kann man feststellen, daß für $0<a<b$ die Beziehung

$$\lim_{n\to\infty}\frac{M(bn)}{M(an)}>1$$

gilt. Jetzt genügt es den vorigen Satz zu benutzen.

SATZ 5. *A, B seien unendliche Mengen von natürlichen Zahlen und wenigstens eine dieser Mengen habe eine positive asymptotische Dichte. Dann ist $R(A,B)$ in $\langle 0,+\infty)$ dicht.*

Beweis. Wenn $\delta(A)=\delta>0$ ist, dann ist $A(x)\sim\delta x$ und es genügt den vorigen Satz zu benutzen ($c=\delta$, $a=0$). Ähnlich kann man auch im Falle $\delta(B)>0$ den Satz beweisen.

Bemerkung. Im Satz 5 kann die Bedingung der Existenz der positiven asymptotischen Dichte einer der Mengen A, B durch die schwächere Bedingung der Positivität der unteren asymptotischen Dichte einer der Mengen A, B nicht ersetzt werden. Setzen wir z.B.

$$A=B=D=\bigcup_{k=1}^{\infty}D_k,$$

$$D_k=\{2^{k+1}+1,\,2^{k+1}+2,\,\ldots,\,2^{k+1}+2^{k-1}\}\qquad (k=1,2,\ldots).$$

Dann kann man leicht feststellen, daß

$$\delta_1(D)=\tfrac{1}{4},\qquad \delta_2(D)=\tfrac{2}{5},\qquad R(D)=R(A,B)\cap(\tfrac{5}{4},\tfrac{8}{5})=\emptyset.$$

In der additiven Zahlentheorie sind die Begriffe der additiven Basis, Differenzbasis und der multiplikativen Basis für die Menge N sehr gut bekannt (siehe [7], [2], S. 24, 177–182). Im Zusammenhang mit diesen Begriffen führen wir jetzt einen ähnlichen Begriff, den Begriff der Quotientbasis für die Menge R^{+} ein.

DEFINITION 2. Die Menge $A\subset N$ heißt eine *Quotientbasis* für R^{+}, wenn $R(A)=R^{+}$ ist. Die Menge $A\subset N$ heißt eine *starke Quotientbasis* für R^{+}, wenn zu jedem $r\in R^{+}$ eine unendliche Anzahl von Paaren $(c,d)\in A\times A$ so existiert, daß $r=c/d$ ist.

DEFINITION 3. Die Menge $A\subset N$ heißt *(R)-dicht*, wenn die Menge $R(A)$ in $\langle 0,+\infty)$ dicht ist.

Bemerkung. Wenn A eine Quotientbasis für R^{+} oder wenn sie (R)-dicht ist, dann ist sie unendlich.

Man kann leicht einsehen, daß jede starke Quotientbasis A für R^{+} eine solche Quotientbasis B für R^{+} enthält, daß B keine starke Quotientbasis für R^{+} ist. Das ergibt sich aus dem folgenden

SATZ 6. *A sei eine starke Quotientbasis für R^{+}. Dann existiert eine Menge $C\subset A$, so daß C eine Quotientbasis für R^{+} ist und für jedes $r\in R^{+}$,*

$r \neq 1$ nur eine endliche Anzahl von Paaren $(c, d) \in C \times C$ mit $r = c/d$ existiert.

Beweis. A sei eine starke Quotientbasis für R^+, $r_1, r_2, r_3, \ldots$ sei die Folge aller von 1 verschiedenen positiven rationalen Zahlen, $r_i \neq r_j$ für $i \neq j$.

Wenn $r = p/q$; $p, q > 0, (p, q) = 1$ ist und gleichzeitig $r = a/b$ (a, b sind natürliche Zahlen), dann ist $a = \lambda p$, $b = \lambda q$, λ ist eine natürliche Zahl. Infolge dieser Tatsache lassen sich alle Darstellungen der Zahl r_i $(= p_i/q_i, p_i, q_i > 0, (p_i, q_i) = 1)$ in der Form $r_i = a/b$, $a, b \in A$ in Gestalt einer Folge

$$r_i = \frac{a_1^{(i)}}{b_1^{(i)}}, \frac{a_2^{(i)}}{b_2^{(i)}}, \ldots, \frac{a_m^{(i)}}{b_m^{(i)}}, \ldots$$

schreiben, wo

$$a_m^{(i)} = \lambda_m p_i, \quad b_m^{(i)} = \lambda_m q_i; \quad \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$$

Also

$$\lim_{m \to \infty} a_m^{(i)} = \lim_{m \to \infty} b_m^{(i)} = +\infty.$$

Jetzt werden wir durch mathematische Induktion eine Folge von Elementen der Menge A definieren.

Zunächst setzen wir $c_1 = a_1^{(1)}$, $c_2 = b_1^{(1)}$. Weiter wählen wir j so groß, daß

$$\frac{c_i}{a_j^{(2)}} < \min(r_1, 1/r_1) \quad (i = 1, 2),$$

$$\frac{c_i}{b_j^{(2)}} < \min(r_1, 1/r_1) \quad (i = 1, 2)$$

gilt. Das ist wegen $a_m^{(2)} \to \infty$, $b_m^{(2)} \to \infty$ möglich. Dann setzen wir $c_3 = a_j^{(2)}$, $c_4 = b_j^{(2)}$. Nach der vorigen Wahl von c_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ haben wir $c_1/c_2 = r_1$, $c_3/c_4 = r_2$ und unter den Quotienten zweier beliebiger Glieder der Folge c_1, c_2, c_3, c_4 gibt nur der Quotient c_1/c_2 die Zahl r_1.

Es sei vorausgesetzt, daß wir schon eine solche Folge

$$c_1, c_2, \ldots, c_{2k-1}, c_{2k} \tag{7}$$

von Elementen der Menge A konstruiert haben, daß

$$\frac{c_{2l-1}}{c_{2l}} = r_l \quad (l = 1, 2, \ldots, k)$$

und wenn r_l $(l \leqslant k-1)$ als ein Quotient zweier Glieder der Folge (7) darstellbar ist, dann gehören diese Glieder schon zur Folge

$$c_1, c_2, \ldots, c_{2l-1}, c_{2l}.$$

Wählen wir jetzt m so groß, daß

$$\frac{c_i}{a_m^{(k+1)}} < \min(r_1, \ldots, r_k, 1/r_1, \ldots, 1/r_k) \quad (i = 1, 2, \ldots, k), \tag{8}$$
$$\frac{c_i}{b_m^{(k+1)}} < \min(r_1, \ldots, r_k, 1/r_1, \ldots, 1/r_k) \quad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

gilt. Das ist wegen $a_n^{(k+1)} \to \infty$, $b_n^{(k+1)} \to \infty$ $(n \to \infty)$ möglich. Setzen wir $c_{2k+1} = a_m^{(k+1)}$, $c_{2k+2} = b_m^{(k+1)}$. Dann hat die Folge

$$c_1, c_2, \ldots, c_{2k-1}, c_{2k}, c_{2k+1}, c_{2k+2}$$

von Elementen der Menge A die Eigenschaft, daß

$$\frac{c_{2i-1}}{c_{2i}} = r_i \quad (i = 1, 2, \ldots, k+1)$$

und wenn r_l $(l \leqslant k)$ als ein Quotient zweier Glieder dieser Folge darstellbar ist, dann befinden sich diese Glieder zufolge (8) schon in der Folge (7).

Wählen wir für C die Menge von Gliedern der so durch Induktion konstruierten Folge

$$c_1, c_2, \ldots, c_{2k-1}, c_{2k}, \ldots$$

C ist eine Quotientbasis für R^+, weil $c_{2k-1}/c_{2k} = r_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ nach der Konstruktion und $c_l/c_l = 1$ $(l = 1, 2, \ldots)$. Wenn $r \in R^+, r \neq 1$, ist, dann ist $r = r_k$ für ein geeignetes k. Sei $r = c_p/c_s$. Nach der Konstruktion der Folge $\{c_j\}_{j=1}^{\infty}$ (siehe (7)) ist dann $p, s \leqslant 2k$ und da es nur eine endliche Anzahl der Quotienten der Zahlen $c_1, c_2, \ldots, c_{2k}$ gibt, existiert zum r nur eine endliche Anzahl von Paaren $(c, d) \in C \times C$, so daß $r = c/d$. Damit ist der Beweis des Satzes beendet.

Der folgende Satz ist einer Bemerkung von A. Stöhr über die Differenzbasen ähnlich (siehe [7]). Nach der Stöhrschen Bemerkung existieren solche Differenzbasen $A \subset N$ für die Menge N, daß $A(n)$ beliebig langsam für $n \to \infty$ wächst. Es sei noch bemerkt, daß die Menge $A \subset N \cup \{0\}$ eine Differenzbasis für N heißt, wenn jede Zahl $n \in N$ als eine Differenz zweier Zahlen aus A darstellbar ist (siehe [7]).

Satz 7. *Es sei $B = \{b_1 < b_2 < \ldots\}$ eine beliebige unendliche Menge von natürlichen Zahlen. Dann existiert eine solche starke Quotientbasis $A \subset N$ für R^+, daß für jedes $n = 1, 2, \ldots$ die Ungleichheit $A(n) \leqslant 2B(n)$ gilt.*

Beweis. Es sei $r_1, r_2, r_3, \ldots$ die Folge aller Zahlen aus R^+, sei $r_i \neq r_j$ für $i \neq j$. Bezeichnen wir mit N_1 die Menge, welche aus der Zahl 1 und aus allen Primzahlen besteht, N_k $(k > 1)$ sei die Menge aller solchen natürlichen $m > 1$, $m = q_1^{a_1} q_2^{a_2} \ldots q_s^{a_s}$ (q_i sind Primzahlen, $q_i \neq q_j$ für

$i \neq j$, a_i sind natürliche Zahlen), für welche $a_1 + \ldots + a_s = k$ ist. Ersichtlich ist jede der Mengen N_k $(k = 1, 2, \ldots)$ unendlich, $N = \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$ und $N_i \cap N_j = \emptyset$ für $i \neq j$.

Es sei m eine beliebige natürliche Zahl. Wenn $m \in N_k$, dann wählen wir zwei natürliche Zahlen a_m, a'_m, so daß $a_m, a'_m > b_m$ und gleichzeitig $a_m/a'_m = r_k$ ist. Bezeichnen wir mit A die Menge aller so gewählten Zahlen a_m, a'_m $(m = 1, 2, \ldots)$. Dann ist A offensichtlich eine starke Quotientbasis für R^+ und für jedes n gilt $A(n) \leqslant 2B(n)$.

Der folgende Satz zeigt einen Zusammenhang zwischen den Differenzbasen und Quotientbasen.

SATZ 8. *A sei eine Quotientbasis fur R^+, p sei eine Primzahl. Bezeichnen wir mit E_p die Menge aller solchen ganzen Zahlen $a \geqslant 0$, welche die folgende Eigenschaft haben: es existiert eine natürliche Zahl p', $(p, p') = 1$ so, daß $p' . p^a \in A$. Dann ist E_p eine Differenzbasis für N.*

Beweis. A sei eine Quotientbasis für R^+, es sei $k \geqslant 1$, k ganz. Dann ist $p^k \in R(A)$ und so

$$p^k = a/b; \quad a, b \in A. \tag{9}$$

Die Zahlen a, b kann man in der Form $a = p^{a_1}p'$, $b = p^{a_2}p''$ darstellen, dabei ist a_i $(i = 1, 2)$ ganz, $a_i \geqslant 0$ $(i = 1, 2)$ und $(p, p') = (p, p'') = 1$.

Aus (9) bekommen wir $p^{a_1}p' = p^{a_2+k}p''$. Daraus folgt unmittelbar $a_1 = a_2 + k$, also $k = a_1 - a_2$. Da $a_1, a_2 \in E_p$ und da k beliebig war, ist E_p eine Differenzbasis für N.

Aus den Ergebnissen der Arbeit [3] folgt, daß $A \subset N$ eine starke Quotientbasis für R^+ ist, wenn $\delta_2(A) = 1$ und A eine (R)-dichte Menge ist, wenn $\delta(A) > 0$ ist. Dabei zeigt das Beispiel, welches nach dem Satz 5 konstruiert wurde, daß die Positivität der Zahl $\delta_1(A)$ keine hinreichende Bedingung zur (R)-dichtigkeit ist.

Aus dem Satz 7 folgt die Existenz der starken Quotientbasen für R^+ mit $\delta(A) = 0$. Ein konkretes Beispiel einer solchen Quotientbasis ist die Menge aller Funktionenwerte der Eulerschen Funktion (siehe [6], S. 233, 235).

Es sei hier bemerkt, daß aus der sogenannten Hypothese H von Schinzel die Aussage folgt: Jede der Mengen: $\{p+1\}$, $\{p-1\}$ (p läuft alle Primzahlen durch), $\{\sigma(n)\}$ (die Menge aller Werte der Funktion σ, $\sigma(n)$ bedeutet die Summe aller natürlichen Teiler von n) ist eine starke Quotientbasis für R^+ (siehe [5]).

Bezeichnen wir im weiteren mit $\mathfrak{T}_B, \mathfrak{T}_{B_0}$ bzw. $\mathfrak{T}_R$ das System aller Quotientbasen, aller starken Quotientbasen für R^+ bzw. aller (R)-dichten Mengen $A \subset N$. Aus den erwähnten Ergebnissen der Arbeit [3] folgt, daß $\mathfrak{T}_{B_0}$ ein unabzählbares System von Mengen ist. Außerdem ist offensichtlich $\mathfrak{T}_{B_0} \subset \mathfrak{T}_B \subset \mathfrak{T}_R$.

Wenn A eine unendliche Menge von natürlichen Zahlen ist, dann setzen wir

$$\varrho(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i 2^{-i},$$

wo $\varepsilon_i = 1$ für $i \in A$ und $\varepsilon_i = 0$ für $i \notin A$ ist. $\varrho(A)$ heißt der Dualwert von A (siehe [2], S. 17–18, [9]). $\mathfrak{U}$ sei das System aller unendlichen Untermengen von N. Wenn für jede Menge $A \in \mathfrak{U}$ die Zahl $\varrho(A)$ nach dem vorhergehenden definieren, dann ist ϱ eine eineindeutige Abbildung von $\mathfrak{U}$ auf das Intervall $(0, 1\rangle$. Wenn $\mathfrak{W} \subset \mathfrak{U}$ ist, dann bezeichnet $\varrho(\mathfrak{W})$ die Menge aller Zahlen $\varrho(A), A \in \mathfrak{W}$. Wenn wir die Eigenschaften von $\varrho(\mathfrak{W})$ studieren, bekommen wir ein gewisses Bild über die Struktur und die Eigenschaften des Systems $\mathfrak{W}$.

Im weiteren beschreiben wir einige grundlegende Eigenschaften der Mengen $\varrho(\mathfrak{T}_{B_0})$, $\varrho(\mathfrak{T}_B)$ und $\varrho(\mathfrak{T}_R)$.

Bemerken wir noch, daß eine Menge $M \subset (0, 1\rangle$ homogen heißt, wenn ihre Dichte in jedem Intervall $I \subset (0, 1\rangle$ dieselbe ist, d.h. wenn ein d, $0 \leqslant d \leqslant 1$, so existiert, daß für jedes Intervall $I \subset (0, 1\rangle$ das äußere Maß von $I \cap M$ der Zahl $d|I|$ gleich ist, wo $|I|$ die Länge von I bezeichnet. Man kann zeigen, daß $d = 0$ oder $d = 1$ sein muß (siehe [1]).

SATZ 9. *Jede der Mengen $\varrho(\mathfrak{T}_{B_0})$, $\varrho(\mathfrak{T}_B)$, $\varrho(\mathfrak{T}_R)$ ist eine Borelsche $F_{\sigma\delta}$-Menge, residual in $(0, 1\rangle$. Jede der Mengen $\varrho(\mathfrak{T}_{B_0})$, $\varrho(\mathfrak{T}_R)$ ist homogen.*

Beweis. Wir führen den Beweis des Satzes in mehreren Schritten durch:

1) Wir zeigen zunächst, das $\varrho(\mathfrak{T}_B)$ eine $F_{\sigma\delta}$-Menge ist.

Bei festem n ist das Intervall $(0, 1\rangle$ gleich der Vereinigungsmenge der Grundintervalle „n-ter Ordnung"

$$i_n^{(s)} = \left(\frac{s}{2^n}, \frac{s+1}{2^n}\right\rangle \quad (s = 0, 1, \ldots, 2^n - 1).$$

Wir stellen die Zahlen $x \in (0, 1\rangle$ durch ihre unendlichen dyadischen Entwicklungen dar, also $x = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k(x) 2^{-k}$, $\varepsilon_k(x) = 0$ oder 1 $(k = 1, 2, \ldots)$ und für unendlich viele k ist $\varepsilon_k(x) = 1$. Zu jedem Grundintervall $i_n^{(s)}$ der n-ten Ordnung gehört eine solche endliche Folge $\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0, \ldots, \varepsilon_n^0$ von Zahlen 0 und 1, daß für jedes $x \in i_n^{(s)}$ die Gleichheiten $\varepsilon_k(x) = \varepsilon_k^0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ gelten. Wir sagen kurz, daß das Intervall $i_n^{(s)}$ zur Folge $\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0, \ldots, \varepsilon_n^0$ gehört.

Es sei $r = p/q \in R^+$; $p, q > 0$, $(p, q) = 1$. Setzen wir $v = \max(p, q)$. Bezeichnen wir bei natürlichem m mit M_{mv} die Vereinigungsmenge aller derjenigen Grundintervalle der mv-ten Ordnung, welche zu solchen Folgen

$\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0, \ldots, \varepsilon_{mv}^0$ gehören, daß die Zahlen $\varepsilon_{ip}, \varepsilon_{iq}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ gleichzeitig nicht gleich 1 sind. Dann ist offensichtlich

$$\varrho(\mathfrak{W}_{p,q}) = \bigcap_{m=1}^{\infty} M_{mv}, \tag{10}$$

wo $\mathfrak{W}_{p,q}$ das System aller derjenigen Mengen $A \subset N$ ist, für welche $r \notin R(A)$ ist. Setzen wir weiter

$$\mathfrak{W} = \bigcup_{p,q;(p,q)=1} \mathfrak{W}_{p,q}$$

(rechts summiert man über alle Paare (p, q) von natürlichen Zahlen mit $(p, q) = 1$).

Für $\mathfrak{Z} \subset \mathfrak{U}$ setzen wir $\mathfrak{Z}^C = \mathfrak{U} - \mathfrak{Z}$. Dann kann man leicht einsehen, daß $\mathfrak{W} = \mathfrak{T}_B^C$.

Da die Menge M_{mv} bei festem m und v eine G_δ-Menge ist, ist auch $\varrho(\mathfrak{W}_{p,q})$ eine G_δ-Menge (siehe (10)) und so ist

$$\varrho(\mathfrak{W}) = \varrho(\mathfrak{T}_B^C) = \bigcup_{p,q;(p,q)=1} \varrho(\mathfrak{W}_{p,q})$$

eine $G_{\delta\sigma}$-Menge.

Da ϱ eine eineindeutige Abbildung ist, haben wir

$$\varrho(\mathfrak{T}_B) = (0, 1\rangle - \varrho(\mathfrak{T}_B^C)$$

und so ist $\varrho(\mathfrak{T}_B)$ eine $F_{\sigma\delta}$-Menge.

2) Man kann auf eine ähnliche Weise einsehen, daß auch $\varrho(\mathfrak{T}_{B_0})$ eine $F_{\sigma\delta}$-Menge ist.

3) Wir zeigen, daß $\varrho(\mathfrak{T}_R)$ eine $F_{\sigma\delta}$-Menge ist.

Eine Menge A gehört zu $\mathfrak{T}_R$ genau dann, wenn die folgende Aussage

$$\underset{r\in R+}{\forall}\ \underset{k\in N}{\forall}\ \underset{a,b\in A}{\exists} \left|\frac{a}{b} - r\right| < \frac{1}{k}$$

gilt. Daraus folgt, daß $\varrho(\mathfrak{T}_R)$ in der Form

$$\varrho(\mathfrak{T}_R) = \bigcap_{r\in R+} \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i,j=1}^{\infty} H(i, j, r, k) \tag{11}$$

dargestellt werden kann, wo

$$H(i, j, r, k) = \left\{x \in (0, 1\rangle;\ \varepsilon_i(x) = 1 = \varepsilon_j(x), \left|\frac{i}{j} - r\right| < \frac{1}{k}\right\}$$

ist.

Die Menge $H(i, j, r, k)$ als Vereinigungsmenge einiger Intervalle der v-ten Ordnung, $v = \max(i, j)$, ist eine F_σ-Menge. Aus (11) folgt dann leicht, daß $\varrho(\mathfrak{T}_R)$ eine $F_{\sigma\delta}$-Menge ist.

4) Da $\mathfrak{T}_{B_0} \subset \mathfrak{T}_B \subset \mathfrak{T}_R$ ist, haben wir

$$\varrho(\mathfrak{T}_{B_0}) \subset \varrho(\mathfrak{T}_B) \subset \varrho(\mathfrak{T}_R).$$

Um zu beweisen, daß jede der vorigen Mengen residual in $(0, 1\rangle$ ist, genügt es zu beweisen, daß $\varrho(\mathfrak{T}_{B_0})$ residual in $(0, 1\rangle$ ist.

Es sei $p, q > 0$, $(p, q) = 1$, $v = \max(p, q)$, s sei natürlich. Bezeichnen wir mit M_{sv}^* die Vereinigungsmenge aller Intervalle der sv-ten Ordnung, welche zu solchen Folgen $\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0, \ldots, \varepsilon_{sv}^0$ gehören, in welchen ε_{sp}^0 und ε_{sq}^0 gleichzeitig der Zahl 1 nicht gleich sind. Setzen wir

$$Q_{l,p,q} = \bigcap_{s=l}^{\infty} M_{sv}^*, \qquad H_{p,q} = \bigcup_{l=1}^{\infty} Q_{l,p,q}, \qquad H = \bigcup_{p,q;(p,q)=1} H_{p,q}.$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, daß $H = \varrho(\mathfrak{T}_{B_0}^C)$ ist. Da

$$\varrho(\mathfrak{T}_{B_0}) = (0, 1\rangle - \varrho(\mathfrak{T}_{B_0}^C) = (0, 1\rangle - H$$

ist, genügt es zu beweisen, daß jede der Mengen $Q_{l,p,q}$ nirgendsdicht in $(0, 1\rangle$ ist.

Es seien l, p, q natürliche Zahlen, $(p, q) = 1$. Wir zeigen, daß $Q_{l,p,q}$ nirgendsdicht in $(0, 1\rangle$ ist. Es sei I ein beliebiges Intervall, $I \subset (0, 1\rangle$. Wählen wir m so groß, daß I schon ein Grundintervall $i_m^{(t)}$ der m-ten Ordnung enthält. Es gehöre $i_m^{(t)}$ zur Folge $\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0, \ldots, \varepsilon_m^0$. Wählen wir eine so große natürliche Zahl k, daß $k \geq l$, $k\min(p, q) > m$ ist. Setzen wir $v = \max(p, q)$. Bilden wir das Grundintervall $i_{kv}^{(d)}$ der kv-ten Ordnung, welches zur Folge $\varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon_{kv}'$ gehört, wo $\varepsilon_i' = \varepsilon_i^0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, $\varepsilon_{kp}' = \varepsilon_{kq}' = 1$ und $\varepsilon_j' = 0$ für jedes $j \leq kv$, $j \neq 1, 2, \ldots, m, kp, kq$. Offensichtlich ist dann $i_{kv}^{(d)} \subset i_m^{(t)} \subset I$ und $i_{kv}^{(d)} \cap Q_{l,p,q} = \emptyset$. Also $Q_{l,p,q}$ ist nirgendsdicht in $(0, 1\rangle$.

5) Die Homogenität der Mengen $\varrho(\mathfrak{T}_{B_0})$, $\varrho(\mathfrak{T}_R)$ kann man leicht mit Hilfe des folgenden Kriteriums beweisen: Eine Menge $M \subset (0, 1\rangle$ ist homogen in $(0, 1\rangle$, falls sie mit jeder Zahl $x = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k(x) 2^{-k}$ auch jede solche Zahl $y = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k(y) 2^{-k}$ enthält, daß die Ungleichheit $\varepsilon_k(x) \neq \varepsilon_k(y)$ nur für eine endliche Anzahl von Zahlen k eintritt (siehe [8]). Es sei jetzt $x = \varrho(A)$, $A \in \mathfrak{T}_{B_0}$, $x = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k(x) 2^{-k}$. Sei

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k(y) 2^{-k} \in (0, 1\rangle \quad \text{und} \quad A' = \{k;\ \varepsilon_k(y) = 1\}.$$

Also $y = \varrho(A')$. Wenn jetzt die Ungleichheit $\varepsilon_k(x) \neq \varepsilon_k(y)$ nur für eine endliche Anzahl von k gilt, dann ist die Menge $(A' - A) \cup (A - A')$ endlich und darum gilt offensichtlich $A' \in \mathfrak{T}_{B_0}$. Also $y \in \varrho(\mathfrak{T}_{B_0})$. Ähnlicherweise kann man auch die Homogenität von $\varrho(\mathfrak{T}_R)$ beweisen.

Damit ist der Beweis des Satzes beendet.

Die Mengen $\varrho(\mathfrak{T}_{B_0})$, $\varrho(\mathfrak{T}_B)$, $\varrho(\mathfrak{T}_R)$ sind also nach dem Satz 9 vom topologischen Standpunkt aus reich. Wir zeigen jetzt, daß dasselbe auch vom metrischen Standpunkt gilt.

Im folgenden bezeichnet das Symbol $|M|$ das Lebesguesche Mass von M.

SATZ 10. $|\varrho(\mathfrak{T}_{B_0})| = |\varrho(\mathfrak{T}_B)| = |\varrho(\mathfrak{T}_R)| = 1$.

Beweis. Es genügt $|\varrho(\mathfrak{T}_{B_0})| = 1$ zu beweisen.

Bei der Bezeichnung, welche wir im vierten Teil des Beweises des Satzes 9 benutzten, haben wir

$$|\varrho(\mathfrak{T}_{B_0})| = 1-|H|, \qquad |H| \leqslant \sum_{p,q;(p,q)=1} \sum_{l=1}^{\infty} |Q_{l,p,q}|.$$

Es genügt also zu beweisen, daß für jedes $l \geqslant 1$ und $(p, q) = 1$ die Gleichheit $|Q_{l,p,q}| = 0$ gilt.

Es seien also l, p, q natürliche Zahlen, $(p, q) = 1$. Aus der Definition von M_{sv}^* (siehe den Beweis des Satzes 9) folgt, daß die Menge $\bigcap_{s=l}^{l+m} M_{sv}^*$ in der Vereinigungsmenge aller derjenigen Grundintervalle der $(l+m)v$-ten Ordnung enthalten ist, welche zu solchen Folgen $\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0, \ldots, \varepsilon_{(l+m)v}^0$ gehören, daß ε_j^0 beliebig (also gleich 0 oder 1) für $j \neq ip, iq$ $(i = l, l+1, \ldots, l+m)$ ist und die Zahlen $\varepsilon_{ip}, \varepsilon_{iq}$ $(i = l, l+1, \ldots, l+m)$ nicht gleichzeitig gleich 1 sind. Die Anzahl aller solchen Folgen ist $2^{(l+m)v-2(m+1)}3^{m+1}$. Für jedes Paar $\varepsilon_{ip}, \varepsilon_{iq}$; $l \leqslant i \leqslant l+m$, haben wir nämlich drei Möglichkeiten $(0, 0;\ 0, 1;\ 1, 0)$. Daher ist

$$|Q_{l,p,q}| \leqslant \Big|\bigcap_{s=l}^{l+m} M_{sv}^*\Big| = \frac{2^{(l+m)v-2(m+1)}3^{m+1}}{2^{(l+m)v}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{m+1} \to 0, \qquad \text{wenn } m \to \infty.$$

Daraus folgt $|Q_{l,p,q}| = 0$. Damit ist der Beweis des Satzes beendet.

Betrachten wir jetzt die Struktur derjenigen $A \subset N$, welche (R)-dicht, aber keine Quotientbasen sind. Im weiteren bezeichnet $\dim M$ die Hausdorffsche Dimension der Menge M (siehe z.B. [4]).

SATZ 11. *Das System $\mathfrak{T}_R - \mathfrak{T}_B$ ist unabzählbar der Mächtigkeit des Kontinuums. Die Menge $\varrho(\mathfrak{T}_R - \mathfrak{T}_B)$ hat die folgenden Eigenschaften:*

(i) *$\varrho(\mathfrak{T}_R - \mathfrak{T}_B)$ ist eine Borelsche $F_{\sigma\delta\sigma}$-Menge;*

(ii) *$\varrho(\mathfrak{T}_R - \mathfrak{T}_B)$ ist eine Menge von erster Bairescher Kategorie in $(0, 1\rangle$;*

(iii) $|\varrho(\mathfrak{T}_R - \mathfrak{T}_B)| = 0$;

(iv) $\dim \varrho(\mathfrak{T}_R - \mathfrak{T}_B) = 1$.

Beweis. Wenn P die Menge aller Primzahlen bedeutet, dann ist $P \in \mathfrak{T}_R$ (siehe [6], S. 155), aber offenbar $P \notin \mathfrak{T}_B$, also $P \in \mathfrak{T}_R - \mathfrak{T}_B$. Daraus folgt leicht, daß jede Menge der Form

$$P \cup B, \tag{12}$$

wo $B \subset \{2, 2^2, \ldots, 2^n, \ldots\}$ ist, zum System $\mathfrak{T}_R - \mathfrak{T}_B$ gehört. Da die Mächtigkeit des Systems aller Mengen der Form (12) gleich der Mächtigkeit des Kontinuums ist, folgt daraus schon unmittelbar, daß $\mathfrak{T}_R - \mathfrak{T}_B$ die Mächtigkeit des Kontinuums hat.

Da ϱ eine eineindeutige Abbildung von $\mathfrak{U}$ auf $(0, 1\rangle$ ist und $\mathfrak{T}_B \subset \mathfrak{T}_R$ ist, haben wir $\varrho(\mathfrak{T}_R - \mathfrak{T}_B) = \varrho(\mathfrak{T}_R) - \varrho(\mathfrak{T}_B)$. Daraus folgt auf Grund von Satz 9 die Behauptung (i).

Ferner haben wir

$$(\mathfrak{T}_R - \mathfrak{T}_B)^C = \mathfrak{U} - (\mathfrak{T}_R - \mathfrak{T}_B) = \mathfrak{T}_R^C \cup \mathfrak{T}_B,$$

daraus

$$\varrho\big((\mathfrak{T}_R - \mathfrak{T}_B)^C\big) = \varrho(\mathfrak{T}_R^C) \cup \varrho(\mathfrak{T}_B). \tag{13}$$

Da die Menge $\varrho(\mathfrak{T}_B)$ auf Grund von Satz 9 residual in $(0, 1\rangle$ ist, folgt aus (13) die Behauptung (ii).

Die Behauptung (iii) ist eine leichte Folgerung des Satzes 10.

Wir beweisen (iv). Es sei $\varepsilon > 0$, wählen wir eine Primzahl p mit $p > 1/\varepsilon$. Bezeichnen wir mit C die Menge aller natürlichen Zahlen, welche durch p nicht teilbar sind. P' sei die Menge aller von p verschiedenen Primzahlen, setzen wir noch $C' = C - P'$. Mit $\mathfrak{W}$ bezeichnen wir das System aller Mengen D der Form $D = P' \cup E$, wo $E \subset C'$ ist.

Jede der Mengen $D \in \mathfrak{W}$ ist eine Obermenge von P' und da $P' \in \mathfrak{T}_R$ (siehe [6], S. 155) ist, ist auch $D \in \mathfrak{T}_R$. Weiter ist jede der Mengen $D \in \mathfrak{W}$ eine Untermenge von C und da C offenbar keine Quotientbasis für R^+ ist, ist auch D keine Quotientbasis für R^+. Also

$$\mathfrak{W} \subset \mathfrak{T}_R - \mathfrak{T}_B. \tag{14}$$

Die Menge $\varrho(\mathfrak{W})$ ist mit der Menge aller derjenigen $x = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k(x) 2^{-k}$ identisch, für welche $\varepsilon_k(x) = 1$ falls $k \in P'$ und $\varepsilon_k(x) = 0$ falls k durch p teilbar ist.

Zur Bestimmung der Hausdorffschen Dimension dieser Menge benutzen wir ein Ergebnis aus [4]. Aus dem Satz 2,7 dieser Arbeit folgt als ein spezieller Fall das folgende Resultat:

Es sei $A \subset N$ und es sei jedem $k \in A$ eine feste Zahl ε_k (gleich 0 oder 1) zugeordnet. Bezeichnen wir mit $Z = Z(A; \{\varepsilon_k\}, k \in A)$ die Menge aller derjenigen $x = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k(x) 2^{-k} \in (0, 1\rangle$, für welche $\varepsilon_k(x) = \varepsilon_k$ $(k \in A)$ ist. Dann ist

$$\dim Z = \liminf_{n\to\infty} \frac{\log \prod_{k\leqslant n, k\in N-A} 2}{n \log 2}. \tag{*}$$

Setzen wir $A = P' \cup F$, wo F die Menge aller durch p teilbaren natürlichen Zahlen ist. Weiter sei $\varepsilon_k = 1$ für $k \in P'$ und $\varepsilon_k = 0$ für $k \in F$.

Dann ist $\delta(A) = 1/p$ und (siehe (*))

$$\dim\varrho(\mathfrak{W}) = \dim Z(A;\ \{\varepsilon_k\},\ k\in A)$$
$$= \liminf_{n\to\infty} \frac{(N-A)(n)}{n} = 1 - \lim_{n\to\infty}\frac{A(n)}{n} = 1-\frac{1}{p} > 1-\varepsilon.$$

Also $\dim\varrho(\mathfrak{W}) > 1-\varepsilon$ und so ist auch $\dim\varrho(\mathfrak{T}_R - \mathfrak{T}_B) > 1-\varepsilon$ (siehe (14)). Daraus bekommen wir $\dim\varrho(\mathfrak{T}_R-\mathfrak{T}_B) = 1$, weil $\varepsilon > 0$ beliebig war.

Infolge des Satzes 10 hat jede der Mengen $\varrho(\mathfrak{T}_{B_0}^C)$, $\varrho(\mathfrak{T}_B^C)$, $\varrho(\mathfrak{T}_R^C)$ das Maß 0. Daher ergibt sich die Frage über die Größe der Hausdorffschen Dimension jeder dieser Mengen. Der folgende Satz gibt die genauen Werte der Hausdorffschen Dimensionen der ersten zwei Mengen und eine positive untere Abschätzung für die Hausdorffsche Dimension der dritten dieser Mengen. Aus dem folgenden Satz ergibt sich speziell die Unabzählbarkeit jedes der Systeme $\mathfrak{T}_{B_0}^C, \mathfrak{T}_B^C, \mathfrak{T}_R^C$.

Satz 12. (i) $\dim\varrho(\mathfrak{T}_{B_0}^C) = \dim\varrho(\mathfrak{T}_B^C) = 1$;

(ii) $\dim\varrho(\mathfrak{T}_R^C) \geqslant \frac{1}{2}$.

Beweis. (i) Da $\mathfrak{T}_{B_0} \subset \mathfrak{T}_B$ ist, haben wir $\mathfrak{T}_{B_0}^C \supset \mathfrak{T}_B^C$ und so genügt es zu beweisen, daß $\dim\varrho(\mathfrak{T}_B^C) = 1$ ist. Das ist aber eine leichte Folgerung des Satzes 11 (iv).

(ii) Es seien α, ϑ zwei reelle Zahlen, $1 < \vartheta < 2$, $1 < \alpha < \sqrt{\vartheta}$. Setzen wir $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$, wo

$$B_k = \{[\vartheta^k]+1, [\vartheta^k]+2, \ldots, [\alpha\vartheta^k]\} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

ist.

Zunächst zeigen wir, daß $B \in \mathfrak{T}_R^C$. Es seien $a, b \in B$, $a > b$. Wir zeigen, daß $a/b \notin (\alpha, \vartheta/\alpha) = I_\alpha$, so daß

$$I_\alpha \cap R(B) = \emptyset \tag{15}$$

ist.

Wenn $a, b \in B$, $a > b$ ist, dann tritt einer der folgenden Fälle ein:

1) es existiert ein k, so daß $a, b \in B_k$;

2) es gilt $a \in B_k$, $b \in B_s$ und $k \neq s$.

Im Falle 1) haben wir

$$\frac{a}{b} \leqslant \frac{[\alpha\vartheta^k]}{[\vartheta^k]+1} < \alpha.$$

Im Falle 2) ist offensichtlich $s \leqslant k-1$ und so

$$\frac{a}{b} \geqslant \frac{[\vartheta^k]+1}{[\alpha\vartheta^{k-1}]} > \frac{\vartheta^k}{\alpha\vartheta^{k-1}} = \frac{\vartheta}{\alpha}.$$

Es gilt also (15).

Weiter zeigen wir für die weiteren Bedürfnisse, daß

$$\delta_1(B) \geqslant \frac{\alpha-1}{(\vartheta-1)\vartheta} \tag{16}$$

ist. Wenn m eine natürliche Zahl ist, dann bestimmen wir ein $n = n(m)$, so daß $[\vartheta^n] \leqslant m \leqslant [\vartheta^{n+1}]$ ist. Dann ist offenbar

$$\frac{B(m)}{m} \geqslant \frac{B([\vartheta^n])}{[\vartheta^{n+1}]} = \frac{\sum_{k=1}^{n-1}([\alpha\vartheta^k]-[\vartheta^k])}{[\vartheta^{n+1}]} = V_n.$$

Durch eine einfache Abschätzung bekommt man

$$V_n \geqslant \frac{\alpha-1}{(\vartheta-1)\vartheta}\cdot\frac{\vartheta^n-\vartheta}{\vartheta^n} - \frac{n-1}{\vartheta^{n+1}}.$$

Daraus ist die Gültigkeit von (16) ersichtlich.

Wenn $C \subset B$, dann ist $R(C) \subset R(B)$ und $I_\alpha \cap R(C) = \emptyset$ wegen (15). Bezeichnen wir mit $\mathfrak{W}$ das System aller unendlichen Untermengen von B. Dann ist $\mathfrak{W} \subset \mathfrak{T}_R^C$ und so

$$\dim\varrho(\mathfrak{T}_R^C) \geqslant \dim\varrho(\mathfrak{W}). \tag{17}$$

Zur Bestimmung von $\dim\varrho(\mathfrak{W})$ benutzen wir wieder das schon erwähnte Ergebnis der Arbeit [4]. Bei der in der Arbeit [4] benutzten Bezeichnung (siehe Satz 2,7 aus [4]) setzen wir $A = N - B$ und $\varepsilon_k = 0$ für $k \in A$. Dann ist $\varrho(\mathfrak{W}) = Z(A;\ \{\varepsilon_k\},\ k\in A)$ und so haben wir wegen (*)

$$\dim\varrho(\mathfrak{W}) = \liminf_{n\to\infty}\frac{B(n)}{n} = \delta_1(B) \geqslant \frac{\alpha-1}{\vartheta(\vartheta-1)}.$$

Infolge von (17) bekommt man daraus

$$\dim\varrho(\mathfrak{T}_R^C) \geqslant \frac{\alpha-1}{\vartheta(\vartheta-1)}$$

für jedes α, $1 < \alpha < \sqrt{\vartheta}$. Falls $\alpha \to \sqrt{\vartheta}$, bekommen wir

$$\dim\varrho(\mathfrak{T}_R^C) \geqslant \frac{1}{\vartheta(\sqrt{\vartheta}+1)}.$$

Da die letzte Ungleichheit für jedes $\vartheta > 1$ gilt, folgt daraus bei $\vartheta \to 1+$ die Ungleichheit $\dim\varrho(\mathfrak{T}_R^C) \geqslant \frac{1}{2}$.

Literaturverzeichnis

[1] K. Knopp, *Mengentheoretische Behandlung einiger Probleme der diophantischen Approximationen und der transfiniten Wahrscheinlichkeiten*, Math. Ann. 95 (1925), S. 409–426.

[2] H. H. Ostmann, *Additive Zahlentheorie I*, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1956.

[3] T. Šalát, *On ratio sets of sets of natural numbers*, Acta Arith. 15 (1969), S. 273–278.

[4] — *Über die Cantorschen Reihen*, Czechosl. Math. J. 18 (93) (1968), S. 25–56.

[5] A. Schinzel et W. Sierpiński, *Sur certaines hypothèses concernant les nombres premiers*, Acta Arith. 4 (1958), S. 185–208.

[6] W. Sierpiński, *Elementary theory of numbers*, Warszawa 1964.

[7] A. Stöhr, *Gelöste und ungelöste Fragen über Basen der natürlichen Zahlenreihe I, II*, Journ. Reine Angew. Math. 194 (1955), S. 40–65, 111–140.

[8] C. Visser, *The law of nought-or-one*, Studia Math. 7 (1938), S. 143–159.

[9] B. Volkmann, *Zwei Bemerkungen über pseudorationale Mengen*, Journ. Reine Angew. Math. 193 (1954), S. 126–128.

Eingegangen 23. 2. 1970 (42)

ACTA ARITHMETICA
XIX (1971)

On the Diophantine equation $f(y)-x=0$

by

Michael Fried (Stony Brook, N. Y.)

The author has made several investigations into problems related to the genus zero curve $f(y)-x=0$ for $f(y)\in K[y]$ where K is a field. The progression of events can be best seen by a quick perusal of the sequence of papers [4], [5], [6], [7], [8], whereby the very particular problems of [4], [5], [6] have launched the general problems about the fields of definition of arbitrary models of Riemann surfaces in [7] and [8]. This latter work is just barely started, but it has already shown the need for the development of arithmetic tools that far transcend the simple techniques the author has so far mustered to attack the problems of [6] and [7]. Oftentimes it turns out, the most powerful tools are those of group theory. Especially when a precise formulation of the problem can be made in terms of the branching of certain Riemann surfaces. See Lemma 2 for example. However, the context of the problem is often much too difficult (or complicated) for the present state of group theory. See [5], Section 3, for a discussion of the general type of group theory question that needs to be answered. Also, even with complete knowledge of the group theory aspect of the problem, the arithmetic question may still remain unanswered for the very reason that we are often reduced to asking questions about the field of definition of curves which are apriori defined only over C. See [7], Section 1, for the precise formulation of general problems in this area.

In this paper, we will return to some of the particular problems related to the curve $f(y)-x=0$, and in so doing we will concentrate almost entirely on questions that can be answered by arithmetic; albeit simple arithmetic. A slight historical digression seems in order. We give a chronology of the author's work related to the problems to be discussed in this paper. Our comments on the other mathematicians who have made contributions to related problems is not meant to be complete. See [6] and [7] for references to these works.

We need some notation which will be used throughout this paper. Let K^* be a fixed algebraic closure of a field K. A polynomial $f(y)\in K[y]$