ACTA ARITHMETICA
XIX (1971)

Normalité de Q^*

par

G. Rauzy (Marseille)

Nous allons démontrer le théorème suivant: *il existe une suite de nombres réels* (v_n) *telle que la suite* (λv_n) *est équirépartie modulo* 1, *si et seulement si* λ *est un nombre rationnel non nul.*

1. Définition de la suite (v_n)**.**

1.1. Soit (u_n) une suite telle que:

(i) quel que soit n, $u_n \in [0, 1]$,

(ii) quel que soit l'entier $q \geqslant 1$ et l'entier $r \geqslant 0$ la suite (u_{qn+r}) est équirépartie sur $[0, 1]$ (une telle suite existe: il suffit de prendre $u_n = n\alpha - [n\alpha]$ où $\alpha \notin Q$).

1.2. Soit A_n (n entier $\geqslant 1$) l'ensemble des couples (m, n) avec $1 \leqslant m \leqslant n$ et $(m, n) = 1$ et soit $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Nous ordonnons A en posant $(m, n) \leqslant (m', n')$ si $n < n'$ ou bien si $n = n'$ et $m \leqslant m'$.

Nous définissons alors une fonction croissante g de A dans $[1, \infty[$ de telle manière que, quel que soit $(m, n) \in A$ si $N \geqslant g(m, n)$ on ait:

$$\text{(i)} \qquad \left| \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2i\pi \frac{p}{n} u_k} - \int_0^1 e^{2i\pi \frac{p}{n} x}\, dx \right| < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

pour tous les p tels que $-n^2 < p < n^2$ par exemple (ce qui est possible puisque la suite (u_k) est équirépartie et que l'inégalité porte sur un nombre fini de p). On supposera $g(1, 1) = 1$ et que $g(m, n) \geqslant 2$ pour $(m, n) > (1, 1)$. On supposera d'autre part que: $g(m, n) \geqslant \sqrt{n}$, de sorte que si on pose

$$G(m, n) = \prod_{(\mu,\nu) \leqslant (m,n)} g(\mu, \nu)$$

on ait:

$$\text{(ii)} \qquad \text{si } (m, n) < (m', n') \qquad G(m, n) < \frac{1}{\sqrt{n}} G(m', n').$$

1.3. Si n est un entier $\geqslant 1$, nous définissons $k(n)$ par la relation $k(n)! \leqslant \sqrt{n} < [k(n)+1]!$ et nous posons $K(n) = k(n)!$. Soit alors H un entier $\geqslant 0$, il existe un entier $\nu(m, n; H)$ tel que

$$0 \leqslant mH + \nu(m, n; H)K(n) < K(n)$$

m étant premier avec n est inversible modulo n, il existe donc un entier $t(m, n; H)$ tel que

$$mt(m, n; H) = \nu(m, n; H) \pmod{n},$$
$$0 \leqslant H + t(m, n; H)K(n) < nK(n).$$

Si on pose $w(m, n; H) = H + t(m, n; H)K(n)$ on a donc

(i) $0 \leqslant w(m, n; H) < nK(n) \leqslant n^{3/2}$,

(ii) $w(m, n; H) \equiv H \pmod{K(n)}$,

(iii) $mw(m, n; H) = mH + \nu(m, n; H)K(n) \pmod{n}$ et en particulier vu la définition de ν, le reste de la division de $mw(m, n; H)$ par n, soit $r(m, n; H)$, est tel que:

$$0 \leqslant r(m, n; H) < K(n) \leqslant n^{1/2}.$$

1.4. La suite (v_N) est alors définie de la manière suivante: $v_0 = 0$, et si $G(m, n) \leqslant N < G(m', n')$ où (m, n) et (m', n') sont deux éléments consécutifs de l'ensemble A,

$$v_N = w\big(m, n; N - G(m, n)\big) + u_{N-G(m,n)}.$$

2. Estimation de sommes de Weyl. Soit p/q un nombre rationnel, tel que $q \geqslant 1$, $p \neq 0$, $(p, q) = 1$. Nous désignons par P l'entier compris entre 1 et q congru à p modulo q, de sorte que $(P, q) \in A_q$ et que $\dfrac{P}{q} - \dfrac{p}{q}$ est entier.

Pour $N \geqslant 1$ nous posons:

$$S(N) = \sum_{k=0}^{N-1} e^{2i\pi \frac{p}{q} v_k}.$$

2.1. Estimation de $S\big(G(P', Q')\big)$ où (P', Q') est le suivant de (P, q) dans A. On a

$$S\big(G(P', Q')\big) = S\big(G(P, q)\big) + \sum_{k=G(P,q)}^{G(P',Q')-1} e^{2i\pi \frac{p}{q} v_k}.$$

Evidemment

$$\big|S\big(G(P, q)\big)\big| \leqslant G(P, q)$$

d'autre part, si $G(P, q) \leqslant k < G(P', Q')$ par définition de v_k,

$$v_k = w\big(P, q; k - G(P, q)\big) + u_{k-G(P,q)}$$

et

$$e^{2i\pi\frac{p}{q}v_k} = e^{2i\pi\frac{p}{q}u_{k-G(P,q)}}\, e^{2i\pi\frac{p}{q}w(P,q;k-G(P,q))}.$$

Le reste de $pw\big(P, q; k - G(P, q)\big)$ par q est le même que celui de $Pw\big(P, q; k - G(P, q)\big)$ par q (par définition de P) et c'est donc la quantité notée $r\big(P, q; k - G(P, q)\big)$ comprise entre 0 et $\sqrt{q}$ d'après (iii) du paragraphe 1.3. En vertu de la majoration $|e^{2i\pi x} - 1| \leqslant 2\pi|x|$ on en déduit:

$$\big|e^{2i\pi\frac{p}{q}v_k} - e^{2i\pi\frac{p}{q}u_{k-G(P,q)}}\big| \leqslant 2\pi\frac{\sqrt{q}}{q}$$

d'où

$$\Big|\sum_{k=G(P,q)}^{G(P',Q')-1} e^{2i\pi\frac{p}{q}v_k} - \sum_{h=0}^{G(P',Q')-G(P,q)-1} e^{2i\pi\frac{p}{q}u_h}\Big| \leqslant G(P', Q')\frac{2\pi}{\sqrt{q}}.$$

Supposons alors que $-q^2 < p < q^2$. En vertu, de l'inégalité (i) du paragraphe 1.2 compte tenu du fait que:

$$G(P', Q') - G(P, q) = \big(g(P', Q') - 1\big)G(P, q) \geqslant g(P, q)$$

on a:

$$\Big|\sum_{h=0}^{G(P',Q')-G(P,q)-1} e^{2i\pi\frac{p}{q}u_h} - [G(P', Q') - G(P, q)]\int_0^1 e^{2i\pi\frac{p}{q}x}\,dx\Big|$$
$$\leqslant [G(P', Q') - G(P, q)]\frac{1}{\sqrt{q}}.$$

D'autre part, d'après l'inégalité (ii) du paragraphe 1.2:

$$G(P, q) < G(P', Q')\frac{1}{\sqrt{q}}$$

d'où finalement:

$$\Big|S\big(G(P', Q')\big) - G(P', Q')\int_0^1 e^{2i\pi\frac{p}{q}x}\,dx\Big| < \frac{(3+2\pi)}{\sqrt{q}}\,G(P', Q').$$

2.2. Estimation de $S(N)$ pour N grand. Nous supposons que $G(m, n) \leqslant N < G(m', n')$, (m, n) et (m', n') étant deux éléments consécutifs de A, et nous supposons N donc n assez grand pour que $k(n) \geqslant q$ (ce qui est possible puisque $k(n) \to \infty$ quand $n \to \infty$). Alors, q divise $K(n)$. Nous supposons que: $Mq \leqslant N - G(m, n) < (M+1)q$ et nous évaluons tout d'abord:

$$S\big(Mq+G(m,n)\big) = S\big(G(m,n)\big)+\sum_{k=G(m,n)}^{Mq+G(m,n)-1} e^{2i\pi\frac{p}{q}v_k}.$$

Pour $G(m,n)\leqslant k<G(m',n')$ $v_k = w\big(m,n;k-G(m,n)\big)+u_{k-G(m,n)}$ or d'après (ii) du paragraphe 1.3 compte tenu du fait que q divise $K(n)$, $w\big(m,n;k-G(m,n)\big)\equiv k-G(m,n)$ (modulo q) de sorte que

$$S\big(Mq+G(m,n)\big) = S\big(G(m,n)\big)+\sum_{h=0}^{Mq-1} e^{2i\pi\frac{p}{q}(h+u_h)}.$$

Soit encore:

$$S\big(Mq+G(m,n)\big)-S\big(G(m,n)\big) = \sum_{r=0}^{q-1} e^{2i\pi\frac{pr}{q}}\sum_{l=0}^{M-1} e^{2i\pi\frac{p}{q}u_{r+ql}}.$$

La suite (u_{r+ql}) étant équirépartie:

$$\sum_{l=0}^{M-1} e^{2i\pi\frac{p}{q}u_{r+ql}} = M\int_0^1 e^{2i\pi\frac{p}{q}x}\,dx+o(M).$$

Si $q=1$ l'intégrale est nulle, si $q\neq 1$ $p/q\neq 1$ et

$$\sum_{r=0}^{q-1} e^{2i\pi\frac{pr}{q}} = 0.$$

Donc

$$S\big(Mq+G(m,n)\big) = S\big(G(m,n)\big)+o(M)$$

comme

$$\big|S(N)-S\big(Mq+G(m,n)\big)\big|\leqslant q$$

et que $M\leqslant N-G(m,n)$ on en déduit

$$S(N) = S\big(G(m,n)\big)+o\big(N-G(m,n)\big).$$

(Le o étant uniforme en (m,n).)

En particulier:

$$S\big(G(m',n')\big) = S\big(G(m,n)\big)+o\big(G(m',n')-G(m,n)\big) = o\big(G(m',n')\big).$$

Donc quand n est assez grand

$$S\big(G(m,n)\big) = o\big(G(m,n)\big).$$

Maintenant:

$$\begin{aligned} S(N) &= S\big(G(m,n)\big)+o\big(N-G(m,n)\big)\\ &= o\big(G(m,n)\big)+o\big(N-G(m,n)\big) = o(N)\end{aligned}$$

le raisonnement pouvant être fait en remplaçant p/q par ph/q pour $h\neq 0$ (quitte à prendre la fraction irréductible).

Il en résulte que $\left(\frac{p}{q}v_n\right)$ est équirépartie modulo 1, c'est à dire que tout rationnel non nul est un nombre v_n normal.

3. Fin de la démonstration. Soit λ un nombre réel, non rationnel. On sait qu'il existe une infinité de fractions irréductibles p/q telles que: $|\lambda-p/q|<1/q^2$. Posons:

$$T(N) = \sum_{k=0}^{N-1} e^{2i\pi\lambda v_k}$$

nous allons montrer que $T(N)$ n'est pas $o(N)$. Pour l'une des fractions p/q considérons avec les notations du paragraphe précédent la somme $T\big(G(P',Q')\big)$

$$\big|T\big(G(P',Q')\big)-S\big(G(P',Q')\big)\big|\leqslant\sum_{k=0}^{G(P',Q')-1}\frac{2\pi|v_k|}{q^2}.$$

Or si $k<G(P',Q')$, $w\big(m,n;k-G(m,n)\big)\leqslant n^{3/2}$ d'après l'inégalité (i) du paragraphe 1.3.

On a donc

$$\big|T\big(G(P',Q')\big)-S\big(G(P',Q')\big)\big|\leqslant\frac{2\pi(1+q^{3/2})}{q^2}\,G(P',Q').$$

Tenant compte de l'estimation obtenue au paragraphe 2.1, on voit que lorsque $q\to\infty$

$$T\big(G(P',Q')\big) = G(P',Q')\int_0^1 e^{2i\pi\lambda x}\,dx+o\big(G(P',Q')\big)$$

et $\int_0^1 e^{2i\pi\lambda x}\,dx$ étant différent de 0, il en résulte que la suite $\frac{1}{N}T(N)$ ne converge pas vers 0, c'est à dire que (λv_n) n'est pas équirépartie modulo 1 ce qui achève la démonstration.

Remarque. Dès que q est assez grand

$$\left|\lambda-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2}\Rightarrow|p|<q^2$$

on peut donc bien appliquer l'estimation obtenue au 2.1.

Depuis l'envoi de cet article, j'ai donné (Bulletin Soc. Math. France, 98 (1970), p. 401 à 414) une caracterisation des ensembles normaux, qui montre en particulier que tout ensemble dénombrable E tel que $0\notin E$ et $\mathbf{Z}^*E\subset E$ est normal.

Reçu le 10. 2. 1970 (36)