We give a few special results. For $a = 2$ we have

$$g_0(n,2) = 2g_0(n-1,2)+g_0(n-2,2),$$
$$g_0(1,2) = 1, \quad g_0(2,2) = 2, \quad g_0(3,2) = 5.$$

It follows that

$$g_0(n,2) = \frac{(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}.$$

For $a = 3$ we have

$$g_0(n,3)-3g_0(n-1,3)+g_0(n-2,3) = 0,$$
$$g_0(1,3) = 1, \quad g_0(2,3) = 2, \quad g_0(3,3) = 5.$$

It follows that

$$g_0(n,3) = F_{2n-1}, \quad g_1(n,3) = F_{2n},$$

where F_n is the nth Fibonacci number.

Finally we have

$$\begin{aligned} g(n,a) &= \sum_{k=0}^{a} g_k(n,a) \\ &= \sum_{k=0}^{a} [g_{k-1}(n-1,a)+g_k(n-1,a)+g_{k+1}(n-1,a)] \\ &= 3g(n-1,a)-2g_0(n-1,a). \end{aligned}$$

It follows that

$$g(n,a) = 3^{n-1}(a+1)-2\sum_{k=1}^{n-1} 3^{n-k-1}g_0(k,a). \tag{6.8}$$

References

[1] W. N. Bailey, *Generalized Hypergeometric Series*, Cambridge 1935.
[2] L. Carlitz, *Solution of certain recurrences*, SIAM Journal on Applied Mathematics, 17 (1969), pp. 251–259.
[3] J. Riordan, *Combinatorial Identities*, New York 1968.

Received on 9. 3. 1970

ACTA ARITHMETICA
XVIII (1971)

Zur Definition der Diskrepanz

von

EDMUND HLAWKA (Wien)

Gewidmet dem Andenken H. Davenports

Es sei I^s der s-dimensionale Einheitswürfel $0 \leqslant \xi_1 < 1, \ldots, 0 \leqslant \xi_s < 1$ und $x_1, \ldots, x_\nu$ Punkte in I^s. Um die Verteilung der Folge $\omega_\nu = (x_1, \ldots, x_\nu)$ zu studieren betrachtet man die sogenannte Diskrepanz $D(\omega_\nu)$. Sie ist so definiert: Ist J ein beliebiges Intervall, so sei $\nu^*(J)$ die Anzahl der Punkte von ω_ν in J, $V(J)$ das Volumen von J, dann ist

$$D(\omega_\nu) = \sup_J \left| \frac{\nu^*(J)}{\nu} - V(J) \right|.$$

Es ist stets $\nu^{-1} \leqslant D \leqslant 1$. Es ist D umso kleiner, je "gleichmäßiger" ω_ν in $I = I^s$ verteilt ist. Bekanntlich ist der Begriff der Diskrepanz aus der Theorie der Gleichverteilung entstanden. Hier werden unendliche Folgen $\omega = (x_i)_{i\in N}$ betrachtet und eine solche Folge ist gleichverteilt, wenn $\lim_{\nu\to\infty} D(\omega_\nu) = 0$, wo ω_ν die Folge der ersten ν Glieder aus ω ist. Genauer gesagt heißt ω gleichverteilt, wenn $\lim_{\nu\to\infty} \frac{\nu^*(J)}{\nu} = V(J)$ für alle J. Man kann dann zeigen, daß daraus $\lim D(\omega_\nu) = 0$ folgt. Die Umkehrung ist trivial. Man kann fragen, ob man nicht die Familie der Intervalle durch andere Familien von Teilmengen von I ersetzen kann. Wir werden zunächst zeigen, daß die Familie $\mathscr{C}$ aller konvexen Körper C das Gewünschte leistet:

(1) $\quad$ Ist $D_C(\omega_\nu) = \sup_{C\in\mathscr{C}} \left| \dfrac{\nu^*(C)}{\nu} - V(C) \right|$ so ist $D_C(\omega) \leqslant 72^s D^{1/s}(\omega)$.

Trivialer Weise ist $D(\omega) \leqslant D_C(\omega)$. Aus einem Satz von S. K. Zaremba (1) folgt, daß man den Exponenten $1/s$ in (1) nicht weglassen kann. Es liegt nahe, statt Intervalle Kugeln K zu nehmen, die zugehörige Diskrepanz wollen wir D_K nennen. Dann gilt für $D_K(\omega)$ trivialerweise (1). Schwieriger ist jetzt die Frage einer Abschätzung von D durch D_K wenn $s > 1$. (Im Falle $s = 1$ ist natürlich $D = D_K$.) Wir werden zeigen: Es gibt

(1) Monatshefte für Mathematik 72 (1968), S. 264–269.

positive Zahlen $\gamma_1(s), \gamma_2(s)$, so daß(2)

$$D(\omega_\nu) \leqslant D_C(\omega_\nu) \leqslant \gamma_1(s) \log^{-\gamma_2(s)} \frac{1}{D_K}. \tag{2}$$

Ob sich diese Abschätzung verbessern läßt, müssen wir offen lassen, vor allem ob eine Abschätzung der Gestalt $D(\omega) \leqslant D_K^{\gamma_3}$ existiert. Wahrscheinlich ist dies nicht der Fall. Jedenfalls folgt aus (2): Wenn $\lim D_K(\omega_\nu) = 0$ so folgt $\lim D(\omega_\nu) = 0$.

§ 1. Wir schicken zunächst einen Hilfssatz vorweg:

HILFSSATZ. *Es sei B eine Menge in I und der Rand δB sei endliche Vereinigungsmenge von Rändern δC konvexer Körper C in I. Es sei I in Teilwürfel von der Kantenlänge w zerlegt. Dann gilt für die Anzahl $N(\delta B)$ der Würfel, welche mit δB Punkte gemeinsam haben*

$$N(\delta B) w^s \leqslant 72^s \beta(B) w \tag{3}$$

wenn $\beta(B)$ die Anzahl der δC ist, welche δB überdecken.

Beweis. Es genügt den Fall $\beta = 1$ mit $B = C$ zu betrachten. Da C in I, so ist sein Durchmesser $D(C) \leqslant \sqrt{s}$. Es sei weiters x_0 der Schwerpunkt von C, dann ist für alle $x \in C$ also $|x - x_0| \leqslant \sqrt{s}$. Da C ein konvexer Körper ist, also innere Punkte besitzt, so besitzt er eine Distanzfunktion in bezug auf x_0 und C hat die Gestalt $f(x-x_0) \leqslant 1$. Ist $r = \inf_{x \in C} |x - x_0|$ dann gilt bekanntlich für alle x, y: $f(x-y) \leqslant |x-y|/r$. Es sei weiters H die Stützfunktion in C in bezug auf x_0, dann gilt bekanntlich (Bonnesen–Fenchel, S. 53) da x_0 Schwerpunkt, für alle u mit $|u| = 1$

$$(s+1) H(u) \geqslant H(u) + H(-u).$$

Weiters ist $\operatorname{Min} H(u) = r$ und stets $\langle x - x_0, u \rangle \leqslant f(x-x_0) H(u)$ ($\langle\ \rangle$ Skalarprodukt). Es sei nun u_1 ein Einheitsvektor so gewählt, daß $H(u_1) = r$. Es seien $u_2, \ldots, u_n$ weitere Vektoren, so daß $u_1 \ldots u_n$ ein normiertes Orthogonalsystem bilden. Dann läßt sich jedes x in der Form $x_0 + \xi_1 u_1 + \ldots + \xi_s u_s$ schreiben und es ist $\xi_i = \langle x - x_0, u_i \rangle$. Es sei nun $x \in C$ dann ist

$$\xi_1 \leqslant f(x-x_0) H(u_1) \leqslant H(u_1), \qquad -\xi_1 \leqslant f(x-x_0) H(-u_1)$$

also

$$|\xi_1| \leqslant H(u_1) + H(-u_1) \leqslant (s+1) H(u_1) = (s+1) r.$$

(2) Vgl. zur ganzen Fragestellung E. Hlawka, *Discrepancy and uniform distribution of sequences* (Nuffic International Summer Session in Science, August 1–11 (1962). P. Noordhoff N. V. Groningen — The Netherlands), S. 83–91 insbesondere Formel (12). (Irrtümlich blieb der Exponent bei Log weg.) Über D_K vergleiche auch die bedeutende Arbeit von W. Schmidt, Invent. Math. 7 (1969), S. 55–82.

Für Durchsicht und Verbesserung des Manuskripts danke ich herzlichst Dr. R. Mück (Wien).

Es ist $(x-x_0)^2 = \xi_1^2 + \ldots + \xi_s^2 \leqslant s$. Es liegt also C im Körper C_1: $(|\xi_1| \leqslant (s+1)r,\ |\xi_2|^2 + \ldots + |\xi_s|^2 \leqslant s)$ und C_1 in C_2: $(|\xi_1| \leqslant (s+1)r,\ |\xi_2| + \ldots + |\xi_s| \leqslant s)$.

Es ist also

$$V(C) \leqslant V(C_1) \leqslant V(C_2) = \gamma_s r, \quad \text{wo} \quad \gamma_s = 2^s (s+1) s^{s-1}/(s-1)! \leqslant 6^s (s+1),$$

wenn wir benützen $s^{s-1}/(s-1)! \leqslant 3^s$.

Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

1. Fall: $r \leqslant 2\sqrt{s} w$. Es ist $N(\delta C) \leqslant N(C) \leqslant N(C_1)$, wenn $N(L)$ die Anzahl der Würfel W ist mit $L \cap W \neq \emptyset$. Nehmen wir also ein $y \in C_1 \cap W$. Für jedes $x \in W$ gilt $|x-y| \leqslant \sqrt{s} w$. Setzen wir

$$x - x_0 = \sum \xi_i u_i, \qquad y - x_0 = \sum \eta_i u_i,$$

so ist also

$$\sum (\xi_i - \eta_i)^2 \leqslant s w^2, \qquad |\xi_1| \leqslant |\xi_1 - \eta_1| + |\eta_1| \leqslant \sqrt{s} w + (s+1) r \leqslant (2s+3)\sqrt{s} w,$$

$$\Big(\sum_{i=2}^{s} |\xi_i|^2\Big)^{1/2} \leqslant \Big(\sum_{i=2}^{s} |\xi_i - \eta_i|^2\Big)^{1/2} + \Big(\sum \eta_i^2\Big)^{1/2} \leqslant \sqrt{s} w + \sqrt{s} \leqslant 2\sqrt{s}$$

da $w \leqslant 1$, also liegt W ganz im Körper C_3: $(|\xi_1|) \leqslant \sqrt{s}(2s+3) w$, $|\xi_2|^2 + \ldots + |\xi_s|^2 \leqslant 4s$, also in C_4: $(|\xi_1|) \leqslant \sqrt{s}(2s+3) w$, $|\xi_2| + \ldots + |\xi_s| \leqslant 2s$ vom Volumen $\gamma_s \cdot 2^{s-1} \dfrac{(2s+3)\sqrt{s}}{s+1} w \leqslant 36^s w$. Es ist also $N(\delta K) w^s \leqslant 72^s w$ und der Hilfssatz für diesen Fall bewiesen.

2. Fall: $r > 2\sqrt{s} w$, also $\varepsilon = \sqrt{s} w / r < \frac{1}{2}$. Wenn nun $W \cap C \neq \emptyset$, dann liegt $W \subset C(1+\varepsilon)$ und wenn $W \cap C(1-\varepsilon) \neq \emptyset$, dann liegt $W \subset C$. Ist nämlich z. B. $W \cap C \neq \emptyset$, dann existiert ein $y \in W \cap C$ und für alle $x \in W$ gilt wegen $|x-y| \leqslant \sqrt{s} w$

$$|f(x-x_0) - f(y-x_0)| \leqslant \operatorname{Max}\big(f(x-y), f(y-x)\big) \leqslant \frac{|x-y|}{r} < \varepsilon$$

also

$$f(x-x_0) \leqslant f(y-x_0) + \varepsilon < 1 + \varepsilon.$$

Es sei nun S_1 die Menge aller Würfel W mit $W \cap C(1-\varepsilon) \neq \emptyset$, S_2 die Menge W mit $W \subset C$, S_3 jene mit $W \cap C \neq \emptyset$. Es ist $S_1 \subset S_2 \subset S_3$. Da S_1 den Körper $C(1-\varepsilon)$ überdeckt, $S_3 \subset C(1+\varepsilon)$, so ist

$$N(S_1) w^s \geqslant V(C)(1-\varepsilon)^s, \qquad N(S_3) \leqslant V(C)(1+\varepsilon)^s,$$

also

$$N(S_3) \leqslant N(S_1) \left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^s$$

also

$$N(S_3) \leqslant N(S_2)\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^s.$$

Daraus folgt:

$$N(\delta C) = N(S_3) - N(S_2) \leqslant N(S_2)\left(\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^s - 1\right), \quad N(S_2)w^s \leqslant V(C) \leqslant V(C_2),$$

so ist also

$$N(\delta C)w^s \leqslant V(C)\left(\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^s - 1\right).$$

Nun ist $\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \leqslant 1+4\varepsilon$, also $\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^s \leqslant 1+\varepsilon 4^s$ also

$$N(\delta C)w^s \leqslant 4^s \varepsilon V(C_2) = 4^s \gamma_s \varepsilon r = 4^s \gamma_s \sqrt{s}\, w$$

also folgt wieder $N(\delta K)w^s \leqslant 72^s w$.

Wir wollen nun (1) zeigen: Es sei C konvexer Körper in I^s. Wir zerlegen I in Würfel mit der Kantenlänge $w = 1/L$ ($L \geqslant 1$ ganz). Es sei U die Menge der Würfel in C, U_1 die Menge der Würfel mit $W \cap C \neq \emptyset$. Wir setzen $C - U = C'$, dann ist $\chi_C = \chi_{C'} + \chi_U$ (χ_M charakteristische Funktion von M). Setzen wir noch

$$\frac{1}{\nu}\sum_{k=1}^{\nu} \chi_M(x_k) = \lambda(M).$$

(Es ist $\nu \cdot \lambda(M)$ die Anzahl der Punkte (x_k) welche in M liegen). Dann ist

$$\lambda(C) - V(C) = \lambda(U) - V(U) + \lambda(C') + V(U) - V(C).$$

Es ist

$$\lambda(U) - V(U) = \sum_{W \in U} \big(\lambda(W) - V(W)\big).$$

Eine erste Abschätzung erhalten wir so: Da die Anzahl der Würfel höchstens L^s ist, so ist nach Definition der Diskrepanz

(4) $$|\lambda(U) - V(U)| \leqslant L^s \cdot D.$$

Eine bessere Abschätzung erhalten wir so: Jeder Würfel W hat die Gestalt

$$\frac{k_i}{L} \leqslant \xi_i < \frac{k_i+1}{L} \quad (i = 1, \ldots, s),$$

wo die k_i ganz und $0 \leqslant k_i \leqslant L-1$. Wir können deutlicher $W(k_1 \ldots k_s)$ schreiben. Dann ist also

$$\lambda(U) - V(U) = \sum_{k_1 \ldots k_s}{}' \Big(\lambda\big(W(k_1 \ldots k_s)\big) - V\big(W(k_1 \ldots k_s)\big)\Big)$$
$$= \sum_{k_1 \ldots k_{s-1}}{}' \Big(\sum_{k_s} \Big(\lambda\big(W(k_1 \ldots k_s)\big) - V\big(W(k_1 \ldots k_s)\big)\Big)\Big).$$

(Die Striche sollen andeuten, daß nur solche $k_1, \ldots, k_s$ zu betrachten sind, für die $W(k_1 \ldots k_s)$ in C liegt.)

Betrachten wir nun bei festem $k_1, \ldots, k_{s-1}$ die Menge W' aller Würfel $W(k_1, \ldots, k_s) \subset C$ und es sei $k' = \operatorname{Min} k_s$, $k'' = \operatorname{Max} k_s$. Dann liegt das Intervall

$$J(k_1, \ldots, k_{s-1}): \frac{k_i}{L} \leqslant \xi_i < \frac{k_i+1}{L} \quad (i = 1, \ldots, s-1), \qquad \frac{k'}{L} \leqslant \xi_s < \frac{k''+1}{L}$$

ganz in C und ist gerade die Vereinigung aller W aus W'. Dies ist geometrisch evident und sieht man so ein: Nach Definition liegen die Würfel $W(k_1, \ldots, k_{s-1}, k')$ und $W(k_1, \ldots, k_{s-1}, k'')$ in C. Es sei nun $\xi' = (\xi'_1, \ldots, \xi'_s)$ ein Punkt in J, dann gibt es eine natürliche Zahl k mit $k' \leqslant k \leqslant k''$, so daß $\frac{k}{L} \leqslant \xi_s < \frac{k+1}{L}$. Wir müssen nun zeigen, daß $W_k = W(k_1, \ldots, k_{s-1}, k)$ zu W' gehört. Es kann o.B.d.A. $k' < k < k''$ vorausgesetzt werden. Nun liegen die Punkte

$$x^* = \left(\xi'_1, \ldots, \xi'_{s-1}, \frac{k'}{L}\right), \qquad x^{**} = \left(\xi'_1, \ldots, \xi'_{s-1}, \frac{k''}{L}\right)$$

in $W(k_1, \ldots, k_{s-1}, k')$ bzw. $W(k_1, \ldots, k_{s-1}, k'')$, also in C. Da C konvex, so liegt auch für jedes t mit $0 \leqslant t \leqslant 1$ der Punkt $(1-t)x' + tx''$ in C, also auch für $t = \frac{L\xi'_s - k'}{k'' - k'}$, und dann erhalten wir gerade ξ', also liegt W_k in C und gehört damit zu W'. Es ist also

$$\lambda(U) - V(U) = \sum_{k_1, \ldots, k_{s-1}}{}' \Big(\lambda\big(J(k_1 \ldots k_{s-1})\big) - V\big(J(k_1 \ldots k_{s-1})\big)\Big).$$

Nach Definition der Diskrepanz erhalten wir

(5) $$|\lambda(U) - V(U)| \leqslant L^{s-1} D.$$

Wir müssen nun $R = \lambda(C') - V(C')$ abschätzen. Es wird C' gerade durch die Menge U' der Würfel überdeckt, für die $W \cap \delta C \neq \emptyset$. Es ist $\chi_{C'} \leqslant \chi_{U'}$. Es ist $R \leqslant \lambda(U') - V(U') + V(U') - V(C')$ also $R \leqslant N(U')D + V(U')$. Andererseits ist $R \geqslant -V(C') \geqslant -V(U')$ also erhalten wir

$$|R| \leqslant N(U')D + V(U') \leqslant N(U')D + N(U')L^{-s}$$

($N(U')$ = Anzahl der Würfel in U'). Zusammenfassend erhalten wir

(6) $$S = |\lambda(C) - V(C)| \leqslant (1+72^s)DL^{s-1} + 72^s L^{-1} \leqslant 80^s(DL^{-1} + L^{-1}).$$

Dabei haben wir den Hilfssatz benützt.

Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

1) $D \leqslant 1/2^s$. Dann nehmen wir für L die nächstkleinere ganze Zahl zu $D^{-1/s}$ und erhalten

$$S \leqslant 80^s \cdot 3 D^{1/s} \tag{7}$$

da ja $L \geqslant D^{-1/s} - 1 \geqslant \frac{1}{2} D^{-1/s}$. Ist aber (2. Fall) $D \geqslant 1/2^s$, so ist ja $S \leqslant 1 \leqslant 2^s D$, damit ist (1) gezeigt.

Bemerkung 1. Hätten wir nur (4) benützt, dann hätten wir statt (6) gehabt

$$S \leqslant 80^s (D \cdot L^s + L^{-1}). \tag{8}$$

Dabei hätten wir nur Würfel benützt. Definieren wir als "Würfeldiskrepanz" D_W durch (1), wo jetzt J nur Würfel durchläuft, dann gilt tatsächlich (8) mit D_W. Nimmt man dann L als nächstkleinere ganze Zahl an $D_W^{-1/(s+1)}$, dann erhält man aus (8) eine Abschätzung

$$D_C \leqslant \gamma D_W^{1/(s+1)}. \tag{9}$$

Insbesondere ist auch $D \leqslant \gamma_1 D_W^{1/(s+1)}$. Frage: Läßt sich der Exponent $1/(s+1)$ verbessern, insbesondere im Spezialfall D?

Bemerkung 2. Es sei $\mathfrak{B}(\beta)$ die Menge aller Bereiche B, wie sie im Hilfssatz definiert werden mit $\beta(B) \leqslant \beta$, dann folgt analog

$$D_{\mathfrak{B}(\beta)} \leqslant \gamma_2 \beta D_W^{1/(s+1)}.$$

Wir gehen nun zum Beweis von (2) über.

Es sei B eine Menge wie im Hilfssatz definiert. Wir denken uns wieder I^s $(s \geqslant 2)$ durch Würfel W mit der Kantenlänge $w = 1/M$ $(M \geqslant 1)$ ganz überdeckt. Die Anzahl der Würfel, welche ganz in B liegen, sei $N'(B)$. Es ist $N'(B) w^s \leqslant V(B)$, andererseits ist

$$V(B) \leqslant \big(N'(B) + N(\delta B)\big) w^s$$

also

$$N'(B) w^s \geqslant V(B) - N(\delta B) w^s \geqslant V(B) - 72^s \beta(B) w.$$

In jedem Würfel W welcher ganz in B liegt, wird eine Kugel K vom Radius $\frac{1}{2} w$ eingelagert. Ist ϱ_s das Volumen der Einheitskugel, so ist

$$V(K) = \left(\frac{w}{2}\right)^s \varrho_s = V(W)\gamma_1, \qquad \gamma_1 = \frac{1}{2^s}\varrho_s < 1.$$

Es sei nun $L(B)$ die Menge aller eingelagerten Kugeln, welche wir so erhalten, dann ist

$$V\big(L(B)\big) = N'(B) V(K) = \gamma_1 N'(B) V(W) \geqslant \gamma_1 \big(V(B) - 72^s \beta(B) w\big).$$

Wir setzen nun $B' = B - L(B)$, dann ist $V(B') = V(B) - V\big(L(B)\big)$, also

$$V(B') \leqslant (1-\gamma_1) V(B) + 72^s \beta(B) \gamma_1 w. \tag{10}$$

Es ist B' wieder eine Menge wie B und es ist $\beta(B') = \beta(B) + \beta(L)$, da $L = L(B)$ zu δB disjunkt ist.

Nun ist $\beta(L) = N'(B)$ und $N'(B) w^s \leqslant V(B)$, also ist

$$\beta(B') \leqslant \beta(B) + \frac{V(B)}{w^s}. \tag{11}$$

Wir setzen nun $B_0 = B$, $L_0 = L$, $B_1 = B_0 - L_0$, $L_1 = L(B_1)$, allgemein $B_{i+1} = B_i - L_i(B)$, $L_i(B) = L(B_i)$, für $i = 0, 1, 2, \ldots$, dann ist also

$$\beta(B_{i+1}) \leqslant \beta(B_i) + \frac{V(B_i)}{w^s(B_i)} \leqslant \beta(B_i) + \frac{1}{w^s(B_i)}, \tag{11'}$$

$$V(B_{i+1}) \leqslant (1-\gamma_1) V(B_i) + 72^s \gamma_1 \cdot \beta(B_i) w(B_i). \tag{10'}$$

Es sei nun N_i die nächstgrößere ganze Zahl an $72^s \beta(B_i) \left(\frac{1-\gamma_1}{2}\right)^{-(i+1)}$ und $w(B_i) = N_i^{-1}$.

Es ist $N_i \geqslant 72^s$ und

$$72^s \gamma_1 \cdot \beta(B_i) w(B_i) \leqslant \left(\frac{1-\gamma_1}{2}\right)^{i+1}.$$

Bei dieser Wahl ist stets

$$V(B_i) \leqslant (1-\gamma_1)^i \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^i}\right)$$

wie durch vollständige Induktion aus (10′) folgt (für $i = 0$ ist es richtig), denn dann erhalten wir

$$V(B_{i+1}) \leqslant (1-\gamma_1)^{i+1} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{i+1}}\right).$$

Es ist also

$$V(B_i) \leqslant 2(1-\gamma_1)^i. \tag{12}$$

Weiters haben wir nach (11′)

$$\beta(B_{i+1}) \leqslant \beta(B_i) + N_i^s < \gamma_2^{is} \beta^s(B_i),$$

wenn gesetzt wird

$$\gamma_2 = 2^{s+1} 72^{s^2} \big(2(1-\gamma_1)^{-1}\big)^{s+1} \geqslant 72^s.$$

Setzen wir $\log \beta(B_i) = u_i$, $\log \gamma_2 = \gamma_3$, so haben wir also

$$u_{i+1} \leqslant i s \gamma_3 + s u_i.$$

Daraus folgt durch vollständige Induktion

$$u_i \leqslant \big(s^{i+1} - 2(i+1)\big)\gamma_3 + s^{i+1} u_0$$

denn für $i = 0$ ist es richtig (es ist ja $s \geqslant 2$) und dann folgt aus der Rekursionsformel

$$u_{i+1} \leqslant \gamma_3(s^{i+2} - is - 2s) + s^{i+2}u_0 \leqslant \gamma_3\big(s^{i+2} - 2(i+2)\big) + s^{i+2}u_0$$

(wieder wegen $s \geqslant 2$). Es ist also $u_i \leqslant s^{i+1}(u_0 + \gamma_3)$ also

$$\beta(B_i) \leqslant \big(\gamma_2\beta(B)\big)^{s^{i+1}}. \tag{13}$$

Wir überdecken nun $B_i = \bar{B}$ wieder durch Würfel W mit der Kantenlänge $w = \hat{N}_i^{-1}$: Die Anzahl dieser Würfel sei $\bar{N}_i$. Es ist

$$\bar{N}_i w^s \leqslant V(\bar{B}) + 72^s \beta(\bar{B}) w.$$

Wir wählen nun w so, daß $72^s\beta(\bar{B})w \leqslant 2(1-\gamma_1)^i$. Wir nehmen daher für N_i die nächstgrößere ganze Zahl an $72^s\beta(\bar{B})\big(2(1-\gamma_1)^i\big)^{-1}$, dann ist diese Bedingung erfüllt und wir haben

$$\bar{N}_i w^s \leqslant 4(1-\gamma_1)^i, \quad \text{also} \quad \bar{N}_i \leqslant 4(1-\gamma_1)^i \hat{N}_i^s \leqslant 4\hat{N}_i^s.$$

Es ist, da $\bar{B} = B_i$, $\bar{N}_i \leqslant N_i$.

Jeden dieser Würfel mit der Kantenlänge $\hat{N}^{-1}$ überdecken wir durch eine Kugel vom gleichen Radius. Wir nennen die Vereinigungsmenge dieser Kugeln L_i'' und die Anzahl der Kugeln ist $\leqslant \bar{N}_i$. Wir betrachten nun die Vereinigungsmenge L_i' der Kugeln, welche in B liegen, d.h. $L_i' = \bigcup\limits_{j=0}^{i-1} L_j$ und es sind die Kugeln in L_i' alle disjunkt. Die Anzahl dieser Kugeln sei $N(L_i')$. Es ist

$$N(L_i') = N(L_0) + \ldots + N(L_{i-1}) = \sum_{j=0}^{i-1}\big(\beta(B_{j+1}) - \beta(B_j)\big) + \beta(L_0) = \beta(B_i).$$

Es ist $B = B_0 = B_i \cup L_i'$, da ja

$$B_0 = B_1 \cup L_0 = B_2 \cup L_0 \cup L_1 = \ldots = B_i \cup L_0 \cup L_1 \cup \ldots \cup L_{i-1}.$$

Es ist also $\chi_B = \chi_{B_i} + \chi_{L_i'}$, also

$$\lambda(B) - V(B) = \lambda(L_i') - V(L_i') + \lambda(B_i) - V(B_i).$$

Es ist

$$|\lambda(L_i') - V(L_i')| = \Big|\sum_{K \in L_i'}\big(\lambda(K) - V(K)\big)\Big| \leqslant N(L_i')D_K$$

also

$$|\lambda(L_i') - V(L_i')| \leqslant \beta(B_i)D_K.$$

Es ist $\chi_{B_i} \leqslant \chi_{L_i''}$, also

$$\lambda(B_i) - V(B_i) \leqslant \lambda(L_i'') - V(L_i'') + V(L_i'') - V(B_i) \leqslant \bar{N}_i D_K + V(L_i'').$$

Es ist

$$V(L_i'') \leqslant \bar{N}_i \varrho_s w^s \leqslant 4\varrho(1-\gamma_1)^i;$$

andererseits ist

$$\lambda(B_i) - V(B_i) \geqslant -V(B_i) \geqslant -V(L_i''),$$

also

$$|\lambda(B_i) - V(B_i)| \leqslant \bar{N}_i D_K + 4\varrho(1-\gamma_1)^i,$$

also haben wir

$$|\lambda(B) - V(B)| \leqslant \big(\beta(B_i) + \bar{N}_i\big)D_K + 4\varrho(1-\gamma_1)^i.$$

Nun ist $\bar{N}_i \leqslant 4\hat{N}_i^s$, also

$$\beta(B_i) + \bar{N}_i \leqslant 4\big(\gamma_2^2\beta(B)\big)^{s^{i+2}}.$$

Wenn wir jetzt B als konvex annehmen, also $\beta(B) = 1$, so ist mit $\gamma_3 = \gamma_2^2$

$$D_C \leqslant 4\big(\gamma_3^{s^2}\gamma_3^{s^i}D_K + (1-\gamma_1)^i\big) \leqslant \gamma_4\big(\gamma_3^{s^i}D_K + (1-\gamma_1)^i\big), \quad \text{wo} \quad \gamma_4 = 4\gamma_3^{s^2}.$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

1. Fall: $D_K \geqslant \gamma_3^{-2s}$. Dann ist $D_C \leqslant 1 \leqslant \gamma_3^{2s}D_K$.

2. Fall: $D_K \leqslant \gamma_3^{-2s}$, also $D_K^{-1} \geqslant \gamma_3^{2s} \geqslant 72^{2s}$. Es ist also $\lg D_K^{-1} < D_K^{-1/2}$ also ist $D_K^{-1}/\lg D_K^{-1} \geqslant \gamma_3^s$, also

$$\lg(D_K^{-1}/\lg D_K^{-1}) > s\lg\gamma_3.$$

Wir nehmen nun i = nächstkleinere Zahl an

$$v = (\lg s)^{-1}\Big(\lg\big(\lg(D_K^{-1}/\log D_K^{-1})/\lg\gamma_3\big)\Big)$$

welche $\geqslant 1$ ist. Dann ist $s^i \leqslant \lg(D_K^{-1}\lg D_K^{-1})/\lg\gamma_3$, also

$$\lg(\gamma_3^{s^i}D_K) \leqslant \lg(D_K^{-1}\lg D_K^{-1}) - \lg D_K^{-1} \leqslant \lg\lg D_K^{-1},$$

also $\gamma_3^{s^i}D_K \leqslant (\lg D_K^{-1})^{-1}$. Andererseits ist

$$(1-\gamma_1)^i = e^{-i\lg\frac{1}{1-\gamma_1}} \leqslant e^{-(v-1)\lg\frac{1}{1-\gamma_1}}.$$

Nun ist $\lg(x - \lg x) \geqslant \frac{1}{2}\lg x$, wenn $x + \lg x \geqslant 2$. Wir nehmen $x = D_K^{-1}$, dann ist $\lg(D_K^{-1}/\lg D_K^{-1}) \geqslant \frac{1}{2}\lg D_K^{-1}$, also ist

$$v \geqslant (\lg s)^{-1}\lg(\tfrac{1}{2}\lg D_K^{-1}/\lg\gamma_3),$$

also

$$D_C \leqslant \left(\lg\frac{1}{D_K}\right)^{-1} + \gamma_4(\lg D_K^{-1})^{\gamma_5} \leqslant 2\gamma_4(\lg D_k^{-1})^{\gamma_5},$$

wo γ_4 und γ_5 von s abhängen.

Eingegangen 11. 3. 1970