[17] S. Kochen, *Ultraproducts in the theory of models*, Annals of Math. 74 (1961), p. 221–261.
[18] E. Landau, *Additive Zahlentheorie*, Cambridge Tracts (Tract 31), Cambridge 1937.
[19] S. Lang, *Algebraic numbers*, New York 1964.
[20] M. Nagata, *Local Rings*, New York 1962.
[21] O.T. O'Meara, *Introduction to Quadratic Forms*, Berlin 1963.
[22] L.G. Peck, *Diophantine equations in algebraic number fields*, Amer. J. Math. 71 (1949), p. 387–402.
[23] C.P. Ramanujam, *Sums of m-th powers in $\mathfrak{P}$-adic rings*, Mathematika 10 (1963), p. 137–146.
[24] J.P. Serre, *Corps Locaux*, Paris 1962.
[25] R.M. Stemmler, *The easier Waring Problem in algebraic number fields*, Acta Arith. 6 (1961), p. 447–468.
[26] L. Tornheim, *Sums of n-th powers in fields of prime characteristic*, Duke Math. J. 4 (1938), p. 359–362.
[27] G. Whaples, *Galois cohomology of additive polynomials and n-th power mapping of fields*, Duke Math. J. 24 (1957), p. 143–150.
[28] O. Zariski and P. Samuel, *Commutative Algebra*, New York.

Addendum: j'ajoute à cette bibiographie la mention de l'article suivant que vient de une signaler Monsieur Schinzel:

W. J. Ellison, *A "Waring's Problem" for homogeneous forms*, Proc. Comb. Phil. Soc. 65 (1969), p. 663-672.

FACULTÉ DES SCIENCES DE GRENOBLE
INSTITUT DE MATHÉMATIQUES PURES

Reçu le 15.5.1969

ACTA ARITHMETICA
XVII (1970)

Caractérisation des ensembles normaux dans $\boldsymbol{Z}$

par

F. Dress et M. Mendès France (Bordeaux)

"Art is the Tree of Life
Science is the Tree of Death."
William Blake

1. Introduction. On rappelle que si $\Lambda = (\lambda_n)$ est une suite infinie de nombres réels, on dit que $x \in \boldsymbol{R}$ est Λ-normal si la suite $x\Lambda$ est équi-répartie (mod 1). On note $B(\Lambda)$ l'ensemble des nombres Λ-normaux, et l'on dit qu'un ensemble $E \subset \boldsymbol{R}$ est un ensemble normal s'il existe une suite Λ telle que $E = B(\Lambda)$. Une intersection dénombrable d'ensembles normaux s'appelle un ensemble normal au sens large.

Il est clair qu'un ensemble E normal (resp. normal au sens large) satisfait aux conditions suivantes:

(i) $0 \notin E$;

(ii) Pour tout $q \in \boldsymbol{Z}^* = \boldsymbol{Z} - \{0\}$, on a $qE \subset E$;

(iii) E est mesurable au sens de Borel.

Savoir si ces conditions sont suffisantes semble être un problème difficile. Nous l'avons résolu dans le cas où E est un sous-ensemble de $\boldsymbol{Z}^*$ (il en existe!) grâce à une idée de D. Cantor (communication privée).

2. Résultat obtenu. Soit $m \in \boldsymbol{Z}$. On désigne par $D(m)$ l'ensemble des diviseurs de m ($m \neq 0$), et on pose $D(0) = \emptyset$. On démontre alors le théorème suivant:

Théorème. *Soit B un sous-ensemble de $\boldsymbol{Z}^*$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(1) *B est normal au sens large;*

(2) *B est normal;*

(3) *Pour tout $q \in \boldsymbol{Z}^*$, on a $qB \subset B$;*

(4) *Il existe une suite infinie (m_n) de nombres entiers, telle que*

$$B = \bigcap_{n=1}^{\infty} \big(\boldsymbol{Z}^* - D(m_n)\big)$$

(cette intersection pouvant être éventuellement une intersection finie non vide si presque tous les m_n sont égaux).

Ce résultat conduit à deux corollaires:

COROLLAIRE 1. *Dans $\mathbf{Z}^*$, tout ensemble normal au sens large est un ensemble normal.*

C'est tout simplement l'équivalence entre les conditions (1) et (2).

COROLLAIRE 2. *Si $(B_i)_{i\in I}$ est une famille d'ensembles normaux dans $\mathbf{Z}^*$, la réunion $\bigcup_{i\in I} B_i$ est un ensemble normal.*

Cela provient de l'équivalence entre les conditions (2) et (3), la propriété $qB \subset B$ se conservant par réunion.

On démontrera le théorème selon le schéma logique suivant:

$$\begin{tikzcd} & (1) \arrow[dd] & \\ (4) \arrow[rr] & & (2) \arrow[ul] \\ & (3) \arrow[ul] & \end{tikzcd}$$

Les implications (2) $\Rightarrow$ (1) et (1) $\Rightarrow$ (3) sont triviales.

3. Démonstration de l'implication (3) $\Rightarrow$ (4). Soit $B \subset \mathbf{Z}^*$ un ensemble vérifiant la condition (3). Si $m \notin B$, et si $d|m$, alors $d \notin B$. Ainsi

$$m \in \mathbf{Z}^* - B \quad \text{entraîne} \quad D(m) \subset \mathbf{Z}^* - B.$$

Il s'ensuit que l'on a

$$\bigcup_{m \in \mathbf{Z}^* - B} D(m) = \mathbf{Z}^* - B,$$

et, par complémentarité,

$$\bigcap_{m \in \mathbf{Z}^* - B} \big(\mathbf{Z}^* - D(m)\big) = B,$$

ce qui est la condition (4) cherchée.

4. Démonstration de l'implication (4) $\Rightarrow$ (2). Etant donnée une suite (m_n) d'entiers, il faut montrer que l'ensemble

$$B = \bigcap_{n=1}^{\infty} \big(\mathbf{Z}^* - D(m_n)\big)$$

est un ensemble normal. L'idée de la démonstration est suggérée dans une lettre adressée par D. Cantor à l'un des auteurs (mai 1968).

On se donne une suite (a_n) de nombres réels vérifiant $a_n \geqslant 0$ et $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < 1$. Puis on considère la fonction f continue, monotone croissante,

définie par

$$f(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\sin(2\pi n x)}{2\pi n}.$$

Si (δ_n) est une suite équirépartie sur $[0, 1[$ $(0 \leqslant \delta_n < 1)$, on définit alors la suite $\Lambda = (\lambda_n)$ par

$$\lambda_n = f^{-1}(\delta_n).$$

Comme $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, on a $0 \leqslant \lambda_n < 1$. On veut montrer que, pour un choix convenable de la suite (a_n), $B(\Lambda) = B$.

Si g est une fonction continue définie sur $\mathbf{R}$, à valeurs dans $\mathbf{C}$ et de période 1, le critère d'équirépartition de Weyl montre que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} g(x\lambda_k) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} g\big(xf^{-1}(\delta_k)\big)$$
$$= \int_0^1 g\big(xf^{-1}(u)\big)du = \int_0^1 g(xv)\, f'(v)\, dv.$$

En particulier, étant donné $q \in \mathbf{Z}^*$, on choisit $g(x) = \exp 2i\pi q x$. La moyenne de Weyl s'écrit alors

$$M(qx) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \exp 2i\pi q x \lambda_k = \int_0^1 \exp 2i\pi q x v \Big[1 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos 2\pi j v\Big]\, dv.$$

L'uniforme convergence de la série $\sum_j a_j \cos 2\pi j v$ permet d'intervertir les opérateurs $\int$ et $\sum$:

$$M(qx) = \int_0^1 \exp 2i\pi q x v\, dv + \sum_j a_j \int_0^1 \exp 2i\pi q x v \cdot \cos 2\pi j v\, dv.$$

La suite (m_n) ayant été donnée, il s'agit maintenant de préciser les conditions auxquelles doit satisfaire la suite (a_j) pour que l'on ait $B(\Lambda) = B$.

Pour cela, on calculera $M(qx)$ en distinguant deux cas, selon que x est entier ou non. Dans les deux cas, on pourra se restreindre à ne considérer que les valeurs positives de x.

Premier cas: $x \in \mathbf{Z}$. Le calcul est très simple et on constate que $M(qx) = \frac{1}{2} a_{qx}$. On choisit alors une suite (a_j) vérifiant la condition supplémentaire $\{j \mid a_j \neq 0\} = \{m_n\}$ (un tel choix est toujours possible).

On voit alors que, si pour tout entier $q > 0$ et pour tout m_n, on a $qx \neq m_n$, les moyennes $M(qx)$ sont toutes nulles. Ainsi

$$B = \bigcap_n \big(\mathbf{Z}^* - D(m_n)\big) \subset B(\Lambda) \cap \mathbf{Z}.$$

Si au contraire, il existe un entier q et un indice m_n tels que $qx = m_n$, alors

$$M(qx) = \tfrac{1}{2}a_{m_n} > 0,$$

et on a donc

$$\bigcup_n D(m_n) \subset \boldsymbol{Z}^* - B(\Lambda),$$

ce qui montre que $B(\Lambda)$ coïncide avec B sur les entiers.

Second cas: $x \in \boldsymbol{R} - \boldsymbol{Z}$. Il faut montrer que, pour un choix convenable de la suite (a_j), aucun x non entier n'appartient à $B(\Lambda)$.

On commence par éliminer le cas où il existe un entier q et un indice m_n tels que $qx = m_n$. On a comme précédemment $M(qx) = \frac{1}{2}a_{m_n}$ et $x \notin B(\Lambda)$.

Supposons maintenant que, pour tout entier $q > 0$ et pour tout m_n, on ait $qx \neq m_n$. Alors $M(qx)$ s'écrit sous la forme

$$M(qx) = \frac{\exp 2i\pi qx - 1}{2i\pi}\,\varphi_a(qx)$$

où

$$\varphi_a(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_{m_n}\left(\frac{1}{z+m_n} + \frac{1}{z-m_n}\right).$$

Et on termine la démonstration en montrant qu'il existe un entier $q > 0$ tel que $M(qx) \neq 0$, ce qui découle du lemme suivant:

LEMME. *Soit (m_n) une suite infinie strictement croissante d'entiers. Alors il existe une suite $a = (a_{m_n})$ de nombres réels positifs et de somme inférieure à 1 telle que, si φ_a est la fonction définie précédemment et si x est un réel non entier, il existe un entier q avec $\varphi_a(qx) \neq 0$.*

Avant d'effectuer la démonstration de ce lemme, il faut remarquer qu'il règle seulement le cas où $\{m_n\}$ est infini. Le cas d'une suite finie se traite sans aucune difficulté.

5. Démonstration du lemme sur la fonction φ_a. Cette démonstration est assez fastidieuse mais son idée est très simple. Une étude sommaire de la fonction $\varphi_a(z)$ pour z réel positif montre qu'elle est décroissante par morceaux, de $+\infty$ à $-\infty$, sur chaque intervalle $]m_{n-1}, m_n[$ (en posant $m_0 = 0$). On voit de plus que le zéro compris dans un intervalle $]m_{n-1}, m_n[$ est d'autant plus voisin de m_n que le terme a_{m_n} de la suite a est petit.

On va alors montrer que, si l'on se donne une suite (ε_n) tendant vers 0, il est possible de prendre une suite $a = (a_{m_n})$ tendant assez rapidement vers 0 pour que les zéros de la fonction φ_a soient dans les intervalles $]m_n - \varepsilon_n, m_n[$.

Lorsque ce point sera acquis, la conclusion du lemme s'en déduira immédiatement: si x est tel que $\varphi_a(qx) = 0$ pour tout entier $q > 0$, le nombre x, différence entre $(q+1)x$ et qx, est ainsi différence entre deux

zéros tendant vers l'infini de la fonction φ_a; et donc $x = \text{entier} + \varepsilon$, ε tendant vers 0 lorsque q tend vers l'infini, i.e. $x = $ entier, éventualité exclue.

Pour qu'il y ait un zéro de la fonction φ_a dans l'intervalle $]m_n - \varepsilon_n, m_n[$, il suffit que l'on ait $\varphi_a(m_n - \varepsilon_n) > 0$. On va expliciter cette condition en découpant, pour chaque m_n, la fonction φ_a en trois morceaux:

$$\varphi_a(z) = f_n(z) + g_n(z) + h_n(z),$$

avec

$$f_n(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} a_{m_k}\left(\frac{1}{z+m_k} + \frac{1}{z-m_k}\right),$$

$$g_n(z) = \frac{1}{2}\,a_{m_n}\left(\frac{1}{z+m_n} + \frac{1}{z-m_n}\right),$$

$$h_n(z) = \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{\infty} a_{m_k}\left(\frac{1}{z+m_k} + \frac{1}{z-m_k}\right).$$

Tous les termes dont f_n est la somme sont positifs en $z = m_n - \varepsilon_n$, de sorte que $f_n(m_n - \varepsilon_n)$ est un nombre positif qui ne dépend que des m_k et des a_{m_k} jusqu'à $k = n-1$. On a ensuite

$$g_n(m_n - \varepsilon_n) = -a_{m_n}\frac{m_n - \varepsilon_n}{(2m_n - \varepsilon_n)\varepsilon_n}.$$

Et $h_n(m_n - \varepsilon_n)$ est une somme dont tous les termes sont négatifs. Si on pose

$$A_n = \sup_{k>n} a_{m_k},$$

on a la suite de majorations:

$$|h_n(m_n - \varepsilon_n)| = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_{m_k}\frac{m_n - \varepsilon_n}{m_k^2 - (m_n - \varepsilon_n)^2} < \sum_{k=n+1}^{\infty} a_{m_k}\frac{m_n}{m_k^2 - m_n^2}$$
$$\leqslant A_n \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{m_n}{m_k^2 - m_n^2} \leqslant A_n \sum_{j=m_n+1}^{\infty}\frac{m_n}{j^2 - m_n^2}.$$

On obtient enfin une dernière majoration de $|h_n(m_n - \varepsilon_n)|$ en comparant l'expression finale du calcul précédent avec une intégrale. Le calcul, classique et non reproduit ici, donne

$$|h_n(m_n - \varepsilon_n)| < A_n\left(\frac{m_n}{2m_n+1} + \frac{1}{2}\log(2m_n+1)\right).$$

La suite (m_n) étant donnée, on considère pour chaque entier $n > 0$, les deux conditions

$$|g_n(m_n - \varepsilon_n)| < \tfrac{1}{3} f_n(m_n - \varepsilon_n)$$

et

$$|h_n(m_n - \varepsilon_n)| < \tfrac{1}{3} f_n(m_n - \varepsilon_n).$$

Les estimations précédentes montrent qu'elles équivalent à

$$a_{m_n} < u_n$$

et

$$A_n < v_n,$$

où u_n et v_n sont deux nombres positifs qui dépendent, outre des m_k et de ε_n, des a_{m_k} jusqu'à $k = n-1$. Il est donc possible de construire par récurrence une suite $a = (a_{m_n})$ de nombres réels positifs et de somme inférieure à 1 qui vérifie pour chaque n les deux conditions ci-dessus. Par ailleurs, il est clair que ces deux conditions entraînent $\varphi_a(m_n - \varepsilon_n) > 0$, ce qui termine la démonstration du lemme.

Additif: depuis la rédaction de cet article, G. Rauzy a donné une caractérisation complète des ensembles normaux (à paraître dans le Bulletin de la Société Mathématique de France).

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
FACULTÉ DES SCIENCES DE BORDEAUX
Talence, France

Reçu le 23.5.1969
