ACTA ARITHMETICA
XVI (1970)

Nombres algébriques, nombres transcendants et équirépartition modulo 1

par

YVES MEYER (Orsay)

1. THÉORÈME 1. *Pour tout ε positif, il existe une suite $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ de nombres réels telle que $|\lambda_n - n| \leqslant \varepsilon$ et que $(x\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ est équirépartie modulo 1 si et seulement si le nombre réel x est transcendant.*

En fait, nous prouverons un résultat plus précis. Soit $\mathscr{A}$ l'ensemble des nombres réels algébriques sur $\boldsymbol{Q}$ et soit $\theta_0 = 1, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k, \ldots$ une base de l'espace vectoriel $\mathscr{A}$ sur $\boldsymbol{Q}$; tout nombre algébrique peut donc être écrit comme une somme finie $\sum_0^\infty r_k\theta_k$ où $r_k \in \boldsymbol{Q}$ et où tous les r_k sont nuls sauf un nombre fini.

THÉORÈME 2. *Pour tout ε positif, il existe une suite $(\eta_k)_{k\geqslant 1}$ de nombres réels non nuls telle que $\sum_1^\infty |\eta_k| \leqslant \varepsilon$ et que, si*

$$\lambda_n = n + \sum_1^\infty \eta_k \sin(2\pi\theta_k n), \qquad n \in \boldsymbol{N}, \tag{1.1}$$

$(x\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ est équirépartie modulo 1 si et seulement si x est transcendant.

2. La preuve du théorème 2 nécessite les lemmes suivants.

LEMME 1. *Soit $(g_k(x))_{k\geqslant 1}$ une suite de fonctions continues d'une variable réelle, à valeurs complexes et périodiques de période 1. Supposons que $\sum_1^\infty \|g_k - 1\|_\infty < +\infty$. Soit $(\theta_k)_{k\geqslant 0}$, $\theta_0 = 1$, une suite de nombres réels, linéairement indépendants sur $\boldsymbol{Q}$. Posons $f(x) = \prod_1^\infty g_k(\theta_k x)$. Alors, si t est un nombre réel,*

$$\mathscr{M}_n(f;t) = \frac{f(1)\exp(-2i\pi t) + \ldots + f(n)\exp(-2i\pi nt)}{n}$$

a pour limite, selon les cas,

(i) 0 *si t ne s'écrit pas comme une somme finie* $\sum_{k\geqslant 0} p_k\theta_k$, $p_k\in\mathbf{Z}$,

(ii) $\prod_1^\infty \hat{g}_k(p_k)$ *si* $t = \sum_{k\geqslant 0} p_k\theta_k$, $p_k\in\mathbf{Z}$, *tous les* p_k *étant nuls sauf un nombre fini.*

Remarques. Bien que la somme en (ii) soit finie, le produit en (ii) est infini (il y a une infinité de termes $\hat{g}_k(0)$). Si g est périodique de période 1,

$$\hat{g}(n) = \int_0^1 g(x)\exp(-2i\pi nx)\,dx.$$

Enfin $\|g\|_\infty = \sup_{x\in\mathbf{R}} |g(x)|$.

La preuve du lemme est simple. Soit $f_\nu = \prod_1^\nu g_k(\theta_k x)$; alors f est la limite, uniforme sur tout $\mathbf{R}$, des f_ν et

$$\lim_{n\to+\infty} \mathscr{M}_n(f;t) = \lim_{\nu\to+\infty}\lim_{n\to+\infty} \mathscr{M}_n(f_\nu;t).$$

La série de Fourier de $g_k(\theta_k x)$ est $\sum_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}_k(p)\exp(2i\pi p\theta_k x)$ et donc la fonction $g_k(\theta_k x)$ est la limite uniforme sur tout $\mathbf{R}$ des polynômes trigonométriques

$$\sum_{-m}^{m}\left(1-\frac{|p|}{m}\right)\hat{g}_k(p)\exp(2i\pi p\theta_k x) = \sigma_m[g_k(\theta_k x)]$$

(les sommes de Fejér de la fonction continue g_k). Alors $\prod_1^\nu g_k(\theta_k x)$ est la limite uniforme de $\prod_1^\nu \sigma_m[g_k(\theta_k x)] = f_{\nu m}(x)$ et

$$\lim_{n\to+\infty} \mathscr{M}_n(f_\nu;t) = \lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty} \mathscr{M}_n(f_{\nu m};t).$$

Il reste à calculer $\lim_{n\to+\infty} \mathscr{M}_n(f_{\nu m};t)$, calcul immédiat car $f_{\nu m}$ est une somme finie $\sum_{\lambda\in E_\nu} a_\lambda\exp(2i\pi\lambda x)$ où E_ν est l'ensemble des sommes $\sum_1^\nu p_k\theta_k$, $p_k\in\mathbf{Z}$. Si $t\notin E_\nu$ (modulo 1),

$$\lim_{n\to+\infty} \mathscr{M}_n(f_{\nu m};t) = 0;$$

si, au contraire, $t = p_0+\lambda$, $\lambda\in E_\nu$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathscr{M}_n(f_{\nu m};t) = a_\lambda.$$

On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathscr{M}_n(f_\nu;t) = 0 \quad \text{si} \quad t \text{ ne s'écrit pas } \sum_0^\nu p_k\theta,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \mathscr{M}_n(f_\nu;t) = \prod_1^\nu \hat{g}_k(p_k) \quad \text{si} \quad t = \sum_0^\nu p_k\theta_k.$$

Le lemme en résulte.

3. Appelons $(\eta_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de nombres réels tels que $\sum_1^\infty |\eta_k| < +\infty$. Soit $J_n(z)$ la n-ième fonction de Bessel définie par

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \exp\{iz\sin\theta - in\theta\}\,d\theta.$$

La suite $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ est définie par (1.1).

Lemme 2. *Si le nombre réel t ne peut être écrit comme une somme finie* $\sum_{k\geqslant 0} p_k\theta_k$, *alors*

$$N^{-1}\sum_1^N \exp(2i\pi t\lambda_n) \to 0 \qquad (N\to+\infty).$$

Si, au contraire, $t = \sum_{k\geqslant 0} p_k\theta_k$ *(tous les p_k sont nuls sauf un nombre fini), alors*

$$N^{-1}\sum_1^N \exp(2i\pi t\lambda_n) \to \prod_{k=1}^\infty (-1)^{p_k} J_{p_k}(2\pi t\eta_k) \qquad (N\to+\infty).$$

En effet,

$$\exp(2i\pi t\lambda_n) = \exp(2i\pi tn) f(n)$$

où

$$f(x) = \prod_1^\infty g_k(\theta_k x), \qquad g_k(x) = \exp\{2i\pi t\eta_k \sin(2\pi x)\}.$$

Le lemme 2 est alors une conséquence immédiate du lemme 1.

4. Passons à la preuve du théorème 2.

Si x est transcendant, le critère de Weyl s'applique et montre, grâce au lemme 2, que $(x\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ est équirépartie modulo 1. Nous allons montrer que l'on peut choisir les $(\eta_k)_{k\geqslant 0}$ de sorte que, pour tout nombre algébrique x, il existe un entier m tel que la limite de $N^{-1}\sum_{n=1}^N \exp(2i\pi m x\lambda_n)$ soit différente de 0.

On choisit m de sorte que $mx = t$ s'écrive $\sum_0^\infty p_k\theta_k$, $p_k \in \mathbf{Z}$. Alors la limite en question vaut, grâce au lemme 2, $(-1)^{\sum_{k\geqslant 0} p_k} \prod_1^\infty J_{p_k}(2\pi t\eta_k)$. Nous utiliserons le lemme:

LEMME 3. *Quel que soit ε positif et quelle que soit la partie dénombrable D de $\mathbf{R}$ il existe une suite $(\eta_k)_{k\geqslant 1}$ de nombres réels telle que pour tout entier k, tout entier p et tout élément non nul t de D, $J_p(t\eta_k) \neq 0$.*

Soit, en effet, $\Delta(p, t)$ l'ensemble des x réels tels que $J_p(tx) = 0$. Puisque J_p est une fonction entière, $\Delta(p, t)$ est dénombrable et il en est de même de $\Delta = \bigcup_{\substack{p\geqslant 0\\ 0\neq t\in D}} \Delta(p, t)$. Il suffit de choisir une suite $(\eta_k)_{k\geqslant 1}$ tendant assez rapidement vers 0 pour que $\sum_{k\geqslant 1} |\eta_k| \leqslant \varepsilon$ mais dont les termes n'appartiennent pas à l'ensemble dénombrable Δ ce qui est possible.

Les η_k étant ainsi choisis, lorsque $D = 2\pi\mathscr{A}$, le produit infini $\prod_1^\infty J_{p_k}(2\pi t\eta_k)$ est convergent et n'est donc pas nul si $t \in \mathscr{A}$.

Travaux cités

[1] M. Mendès-France, *Deux remarques concernant l'équirépartition des suites*, Acta Arith. 14 (1968), p. 163–167.

[2] Y. Meyer, *Nombres algébriques et répartition modulo* 1, C. R. Acad. Sc., Paris, 268 (1969), p. 25–27.

Reçu par la Rédaction le 31. 3. 1969

ACTA ARITHMETICA
XVI (1970)

On the distribution of prime numbers which are of the form x^2+y^2+1

by

YOICHI MOTOHASHI (Tokyo)

1. In 1957 Hooley [2] proved under the extended Riemann Hypothesis the asymptotic formulae for the sums

$$\sum_{p\leqslant N} r(p-a), \qquad \sum_{p<N} r(N-p), \tag{1.1}$$

where a is a fixed non-zero integer and p denotes generally a prime number and further $r(n)$ is the number of representations of n as the sum of two squares.

After Hooley's very interesting proof, in 1960 Linnik [4] proved rigorously these asymptotic formulae applying his very powerful "Dispersion Method". Therefore the longstanding conjecture of Hardy and Littlewood is completely proved.

On the other hand the large sieve method which is created by Linnik is recently astonishingly improved by Bombieri [1], and the extended Riemann Hypothesis which was used by Hooley can be replaced by the mean-value theorem for the remainder terms of the prime number theorem in an arithmetical progression.

Now from the asymptotic formula for the sum (1.1) we can conclude that there are infinitely many prime numbers which are of the form x^2+y^2+1. Then, how many such prime numbers are there up to N? This is the problem that we will treat in this paper.

Let $b(n) = 1$ if n is representable as the sum of two squares, and $= 0$ otherwise. Then the following asymptotic formula of Landau

$$\sum_{n\leqslant N} b(n) \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \prod_{p\equiv -1 \,(\mathrm{mod}\, 4)} \left(1-\frac{1}{p^2}\right)^{-1/2} N(\log N)^{-1/2} \tag{1.2}$$

is a well known result. Hence our problem is to study the behaviour of the sum

$$I(N) = \sum_{p\leqslant N} b(p-1),$$