[8] C. Pisot, *Répartition modulo 1 des puissances successives des nombres réels*, Comment. Math. Helv. 19 (1946–1947), p. 153–160.
[9] — et J. Dufresnoy, *Sur un ensemble fermé d'entiers algébriques*, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup., série 3, 70 (1953), p. 129–136.
[10] — *Etude de certaines fonctions méromorphes bornées dans le cercle unité. Application à un ensemble fermé d'entiers algébriques*, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup., série 3, 72 (1955), p. 69–92.
[11] — *Familles compactes de fractions rationnelles et ensembles fermés de nombres algébriques*, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup., série 3, 81 (1964), p. 165–188.
[12] R. Salem, *A remarquable class of algebraic integers. Proof of a conjecture of Vijayaraghavan*, Duke Math. Journ. 11 (1944), p. 103–109.
[13] — *Power series with integral coefficients*, Duke Math. Journ. 12 (1945), p. 153–172.
[14] — *Algebraic Numbers and Fourier Analysis*.
[15] A. Thue, *Über eine Eigenschaft die keine transcendente Grösse haben kann*, Videnskapss. Skrifter. Kristiana I, Math. naturv. Klasse, 1912, n° 25.

INSTITUT HENRI POINCARÉ
Paris

Reçu par la Rédaction le 28. 2. 1969

ACTA ARITHMETICA
XVI (1970)

Über eine Turánsche Ungleichung mit reellen Charakteren

von

W. Haneke (Marburg/Lahn)

1. Es sei eine natürliche Zahl $k \geqslant 3$ und eine Dirichletsche L-Funktion $L(s, \chi_1)$ zu einem reellen Charakter $\chi_1 \bmod k$ gegeben, die eine "Ausnahmenullstelle" β mit

$$0 < \delta = 1-\beta < \frac{c_0}{\log^2 k} \tag{1.1}$$

bei genügend kleinem c_0 besitzt. Dabei bezeichnet c_0 und ebenso im folgenden $c_1, c_2, \ldots$ eine positive absolute Konstante, die sich numerisch explizit angeben läßt. Dies gilt auch von den später auftretenden $\ll$-und O-Konstanten.

P. Turán [4] behandelte mit der in [3] entwickelten Methode die Frage nach dem Zusammenhang zwischen der Lage von β und der Verteilung der Primzahlen $p < X$ mit $\chi_1(p) = 1$ bei gegebenem $X > k^{c_1}$.

Ziel der vorliegenden Note ist es, ein weiteres Ergebnis in dieser Richtung herzuleiten: Wir beweisen die Abschätzung

$$\sum_{p<X} \frac{1+\chi_1(p)}{p} \log^2 p \ll \frac{\log k}{\log(1/\delta)} \log_2 k + \delta(\log^3 X + \log^3 k) \tag{1.2}$$

für

$$X > \exp\left(c_2 \left[\frac{\log k}{\log(1/\delta)} \log_2 k\right]^2\right).$$

Unsere Methode besteht darin, eine effektive Form des Linnikschen Satzes über die Lage der Ausnahmenullstelle β (vgl. Hilfssatz 1) zur Auswertung einer geeigneten Siebungleichung (vgl. Hilfssatz 5) heranzuziehen. Dazu benötigen wir zunächst die Abkürzungen

$$\chi_0(n) = 1 \quad \text{für alle ganzen } n \tag{1.3}$$

und

$$\theta = \frac{c_3}{\log k} \log \frac{ec_0}{\delta \log k} \tag{1.4}$$

bei genügend kleinem c_3.

2. Hilfssatz 1 (vgl. [1], S. 168, Theorem II). *Es gilt*

$$\zeta(s)L(s,\chi_1)\neq 0$$

für alle $s=\sigma+it\neq\beta$ *mit* $\sigma\geqslant 1-2\theta$, $|t|\leqslant 2k$.

Hilfssatz 2 (vgl. [2], S. 382–383, Satz 4.1 und 4.2). *Es sei* $g(s)$ *in* $|s-s_0|\leqslant R>0$ *holomorph und dort* $\neq 0$,

$$\log\left|\frac{g(s)}{g(s_0)}\right|\leqslant M \quad \textit{für} \quad |s-s_0|=R.$$

Dann gilt

$$\left|\log\frac{g(s)}{g(s_0)}\right|\leqslant\frac{2r}{R-r}M \quad \textit{in} \quad |s-s_0|\leqslant r<R,$$

wenn $\log z$ *den Hauptzweig der Logarithmusfunktion bezeichnet.*

Hilfssatz 3. *Es gilt*

$$|\log\zeta(s)(s-1)|,\ \left|\log\frac{L(s,\chi_1)}{s-\beta}\right|\ll(\log k)\theta$$

in $\sigma\geqslant 1-\theta$, $|t|\leqslant k$.

Beweis. Es sei

$$g(s) \text{ entweder } =\zeta(s)(s-1) \text{ oder } =\frac{L(s,\chi_1)}{s-\beta}.$$

Bei vorgegebenem reellem τ mit $|\tau|\leqslant k$ werde

$$s_0=1+\theta+i\tau$$

gesetzt. Nach Hilfssatz 1 und (1.4) ist dann $g(s)$ in $|s-s_0|\leqslant 3\theta$ holomorph und $\neq 0$, denn nach [2], S. 139, § 8, gilt insbesondere

$$\log\frac{1}{\delta}\ll\log k,$$

also bei genügend kleinem c_3

Offenbar ist $$\theta<1/2,\quad 3\theta<k.$$

$$|\log g(s_0)|<\log\zeta(1+\theta)+\log\frac{1}{\theta}\ll\log\frac{1}{\theta}. \tag{2.1}$$

Ferner hat man nach [2], S. 113–116,

$$\log|g(s)|\ll\theta\log k \quad \text{für} \quad |s-s_0|=3\theta \tag{2.2}$$

und wegen (1.1) und (1.4)

$$\log\frac{1}{\theta}\ll\theta\log k. \tag{2.3}$$

Nach Hilfssatz 2 folgt nun aus (2.1) bis (2.3) sofort die Behauptung.

Im folgenden Hilfssatz benötigen wir die Funktion

$$H(s)=\int_1^2\eta^s\,d\eta=\frac{2^{s+1}-1}{s+1}. \tag{2.4}$$

Hilfssatz 4. *Es sei*

$$f(s)=\sum_1^\infty a_n n^{-s}$$

für $\sigma>1$ *absolut konvergent.*

Dann gilt für alle $x>0$, $\sigma_0>1$

$$\int_1^2\sum_{n<\eta x}a_n\,d\eta=\frac{1}{2\pi i}\int_{(\sigma_0)}f(s)H(s)\frac{x^s}{s}\,ds.$$

Beweis. Setzt man

$$E(x)=\begin{cases}1, & \text{falls } x\geqslant 1,\\ 0 & \text{sonst},\end{cases}$$

so folgt mit dem Residuensatz aus (2.4) für alle $x>0$, $\sigma_0>1$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(\sigma_0)}\frac{H(s)x^s}{s}\,ds=2E(2x)\left(1-\frac{1}{2x}\right)-E(x)\left(1-\frac{1}{x}\right)=\int_1^2 E(\eta x)\,d\eta$$

und hieraus auf Grund der absoluten Konvergenz der Reihe $\sum_1^\infty a_n n^{-s}$ $(\sigma>1)$ die Behauptung.

Hilfssatz 5. *Für beliebige* $x, y, \xi>1$ *mit*

$$\sqrt{2x}<y<x \tag{2.5}$$

gilt

$$\int_1^2\left(\sum_{y<p<\eta x}\bigl(1+\chi_1(p)\bigr)-\sum_{\substack{p'<\eta x/y\\ y<p<\eta x/p'}}\bigl(\chi_1(p')+\chi_1(p)\bigr)\frac{\log^2 p'}{\log^2\xi}\right)d\eta$$

$$\leqslant\frac{1}{\log^2\xi}\sum_{l=0,1}\frac{1}{(2\pi i)^3}\int_{(2)}\int_{(2)}\int_{(2)}\frac{H(s)x^s\xi^{w_1+w_2}}{s(w_1w_2)^2}F(s,w_1,w_2,\chi_l,Y)\,ds\,dw_1\,dw_2$$

mit

$$F(s,w_1,w_2,\chi,Y)=\frac{L(s,\chi)L(s+w_1+w_2,\chi)}{L(s+w_1,\chi)L(s+w_2,\chi)}G(s,w_1,w_2,\chi)\Bigl(1+\sum_{m=1,2}J(s+w_m,\chi,Y)-J(s+w_1+w_2,\chi,Y)\Bigr) \quad (Y>0), \tag{2.6}$$

$$J(s,\chi,Y)=\sum_{p>Y}\chi(p)p^{-s} \quad (\sigma>1), \tag{2.7}$$

$$G(s,w_1,w_2,\chi)=\prod_p\left(1+\frac{\chi(p)}{p^{s+w_1+w_2}}\left[\frac{\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)\left(1-\frac{\chi(p)}{p^{s+w_1+w_2}}\right)}{\left(1-\frac{\chi(p)}{p^{s+w_1}}\right)\left(1-\frac{\chi(p)}{p^{s+w_2}}\right)}-1\right]\right) \tag{2.8}$$

Beweis. Eine Verfeinerung der Selbergschen Siebungleichung (vgl. [2], S. 37, (3.11)) ergibt für

$$X>0,\quad \sqrt{X}<y<X,\quad P=\prod_{p\leqslant y}p \tag{2.9}$$

und beliebige reelle Zahlen λ_d $(d=1,2,\ldots)$ mit $\lambda_1=1$

$$\begin{aligned}\sum_{y<p\leqslant X}\frac{1+\chi_1(p)}{2}\leqslant \sum_{n\leqslant X}\frac{1+\chi_1(n)}{2}\Big(\sum_{d|(n,P)}\lambda_d\Big)^2-\\ -\sum_{\substack{p'<X/y\\ y<p\leqslant X/p'}}\Big(1-\frac{1+\chi_1(p')}{2}-\frac{1+\chi_1(p)}{2}\Big)(1+\lambda_{p'})^2.\end{aligned}\tag{2.10}$$

Denn wegen (2.9) gilt

$$\frac{X}{y}<y<X; \tag{2.11}$$

die Darstellung einer natürlichen Zahl n in der Form

$$n=p'p\quad\text{mit}\quad p'<\frac{X}{y},\quad y<p\leqslant\frac{X}{p'} \tag{2.12}$$

ist also eindeutig. Ferner folgt aus (2.11) und (2.12)

$$(n,P)=p'$$

und

$$\frac{1+\chi_1(n)}{2}\geqslant 1-\frac{1+\chi_1(p')}{2}-\frac{1+\chi_1(p)}{2}.$$

Im folgenden sei

$$\lambda_d=\begin{cases}\mu(d)\dfrac{\log\xi/d}{\log\xi} & \text{für}\quad 1\leqslant d\leqslant\xi,\\ 0 & \text{für}\quad d>\xi.\end{cases}\tag{2.13}$$

Insbesondere ist dann $\lambda_1=1$, und (2.10) gilt wegen (2.5) für

$$X=\eta x\quad(1\leqslant\eta\leqslant 2).$$

Man bekommt also die Ungleichung (vgl. (1.3))

$$\begin{aligned}\int_1^2 d\eta\Big(\sum_{y<p<\eta x}\big(1+\chi_1(p)\big)-\sum_{\substack{p'<\eta x/y\\ y<p\leqslant\eta x/p'}}\big(\chi_1(p')+\chi_1(p)\big)(1+\lambda_{p'})^2\Big)\\ \leqslant S:=\sum_{l=0,1}\int_1^2\sum_{n<\eta x}\chi_l(n)\sum_{d_1,d_2|(n,P)}\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}\,d\eta.\end{aligned}\tag{2.14}$$

Offenbar ist

$$S=\sum_{l=0,1}\sum_{d_1,d_2|P}\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}\int_1^2\sum_{\substack{n<\eta x\\ n\equiv 0([d_1,d_2])}}\chi_l(n)\,d\eta. \tag{2.15}$$

Nach Hilfssatz 4 gilt für jeden Charakter χ und jede natürliche Zahl d

$$\int_1^2\sum_{\substack{n<\eta x\\ n\equiv 0(d)}}\chi(n)\,d\eta=\chi(d)\frac{1}{2\pi i}\int_{(2)}L(s,\chi)H(s)\Big(\frac{x}{d}\Big)^s\frac{ds}{s}. \tag{2.16}$$

Wir betrachten nun die Funktion

$$f_\chi(s)=\sum_{\substack{d_1,d_2|P\\ d=[d_1,d_2]}}\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}\frac{\chi(d)}{d^s}. \tag{2.17}$$

Da für quadratfreies n und eine multiplikative zahlentheoretische Funktion $A(m)$

$$A(n)=\prod_{p|n}\big(1+A(p)-1\big)=\sum_{p|n}\prod_{p|d}\big(A(p)-1\big)$$

ist, folgt mit $A(m)=m^s/\chi(m)$, $n=(d_1,d_2)$ für $d_1,d_2|P$

$$\frac{\chi([d_1,d_2])}{[d_1,d_2]^s}=\frac{\chi(d_1)\chi(d_2)}{(d_1d_2)^s}\sum_{d|(d_1,d_2)}\prod_{p|d}\Big(\frac{p^s}{\chi(p)}-1\Big)$$

und daher

$$f_\chi(s)=\sum_{d|P}\prod_{p|d}\Big(\frac{p^s}{\chi(p)}-1\Big)\Big(\sum_{\substack{r|P\\ r\equiv 0(d)}}\frac{\lambda_r\chi(r)}{r^s}\Big)^2. \tag{2.18}$$

Nach (2.13) hat man

$$\lambda_d=\frac{\mu(d)}{\log\xi}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{(2)}\Big(\frac{\xi}{d}\Big)^w\frac{dw}{w^2}\qquad\text{für}\quad d=1,2,\ldots,$$

also wird für $d|P$

$$\sum_{\substack{r|P\\ r\equiv 0(d)}}\frac{\lambda_r\chi(r)}{r^s}=\frac{\mu(d)}{\log\xi}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{(2)}\xi^w\frac{\chi(d)}{d^{s+w}}\sum_{\substack{m|P\\ (m,d)=1}}\frac{\mu(m)\chi(m)}{m^{s+w}}\cdot\frac{dw}{w^2}. \tag{2.19}$$

Mit

$$L(s,\chi,Y)=\prod_{p\leqslant Y}\Big(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\Big)^{-1} \tag{2.20}$$

ergibt sich wegen

$$\sum_{\substack{m|P\\(m,d)=1}} \frac{\mu(m)\chi(m)}{m^z} = \prod_{\substack{p\leqslant y\\ p\nmid d}} \left(1-\frac{\chi(p)}{p^z}\right) \qquad (d|P)$$

in Verbindung mit (2.18) und (2.19)

$$(2.21)\ f_\chi(s) = \frac{\log^{-2}\xi}{(2\pi i)^2} \int_{(2)}\int_{(2)} \frac{\xi^{w_1+w_2}}{(w_1w_2)^2} \prod_{m=1,2} L^{-1}(s+w_m, \chi, y)\Phi_\chi(s, w_1, w_2)\,dw_1\,dw$$

wo

$$\Phi_\chi(s, w_1, w_2) = \sum_{d|P} \frac{\chi(d)}{d^{s+w_1+w_2}} \prod_{p|d} \left(\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right) \prod_{m=1,2}\left(1-\frac{\chi(p)}{p^{s+w_m}}\right)^{-1}\right)$$

gesetzt ist.

Mit

$$\varrho_p = \frac{\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)\left(1-\frac{\chi(p)}{p^{s+w_1+w_2}}\right)}{\left(1-\frac{\chi(p)}{p^{s+w_1}}\right)\left(1-\frac{\chi(p)}{p^{s+w_2}}\right)} - 1, \qquad z = s+w_1+w_2$$

hat man die multiplikative Darstellung

$$\Phi_\chi(s, w_1, w_2) = \prod_{p\leqslant y}\left(1+\frac{\chi(p)}{p^z\left(1-\frac{\chi(p)}{p^z}\right)}(1+\varrho_p)\right),$$

und dies liefert

$$\Phi_\chi(s, w_1, w_2) = L(z, \chi, y)G(s, w_1, w_2, \chi, y)$$

mit der Abkürzung

$$(2.22) \qquad G(s, w_1, w_2, \chi, y) = \prod_{p\leqslant y}\left(1+\frac{\chi(p)}{p^z}\varrho_p\right).$$

Trägt man diese Identitäten in (2.21) ein, so folgt in Verbindung mit (2.15), (2.16) und (2.17)

$$S = \frac{1}{(2\pi i)^3\log^2\xi}\int_{(2)}\int_{(2)}\int_{(2)} \frac{L(s, \chi)L(s+w_1+w_2, \chi, y)}{L(s+w_1, \chi, y)L(s+w_2, \chi, y)} \times$$
$$\times G(s, w_1, w_2, \chi, y)H(s)x^s\xi^{w_1+w_2}\frac{ds\,dw_1\,dw_2}{sw_1^2w_2^2}.$$

Unter Verwendung des Cauchyschen Integralsatzes gewinnt man nur wegen (2.5) aus (2.6) bis (2.8), (2.20), (2.22), (2.13) und (2.14) die Behauptung.

Hilfssatz 6. *Für* $w = u+iv$, $l = 0, 1$,

$$(2.23) \qquad u \geqslant 1-\theta/2, \quad |v| \leqslant k/2, \quad x \geqslant 3, \quad k' = \max(k, x)$$

gilt (vgl. (1.3))

$$(2.24)\ \sum_{n\leqslant x}\frac{\chi_l(n)\Lambda(n)}{n^w} = -\frac{L'}{L}(w, \chi_l) + (-1)^l\frac{x^{\beta_l-w}}{\beta_l-w} + O(x^{1-u-3\theta/4}\log^2k') +$$
$$+ O\left(\frac{x^{1-u}+1}{k'}\log^2x\right) + O(x^{-u}\log x)$$

mit

$$(2.25) \qquad \beta_0 = 1, \quad \beta_1 = \beta.$$

Beweis. Nach [2], S. 377, (3.5), ist die Summe auf der linken Seite von (2.24)

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{b-ik'/3}^{b+ik'/3} -\frac{L'}{L}(s+w, \chi_l)\frac{x^s}{s}ds + O\left(\frac{x^{1-u}+1}{k'}\log^2x\right) + O(x^{-u}\log x)$$

für $b = \max(0, 1-u)+1/\log x$, $l = 0, 1$.

Ersetzt man nun hierin nach dem Residuensatz b durch $1-u-3\theta/4$ (>0), so folgt unter Berücksichtigung von (2.23), (1.1) und (1.4) mit Hilfssatz 3 die Behauptung.

In analoger Weise folgt

Hilfssatz 7. *Für* $x > 3$, $l = 0, 1$, $k' = \max(k, x)$ *gilt*

$$\sum_{n\leqslant x}\chi_l(n)\Lambda(n) = (-1)^l\frac{x^{\beta_l}}{\beta_l} + O\left(\frac{x\log^2x}{k'}\right) + O(x^{1-3\theta/4}\log^2k') + O(\log x).$$

Hilfssatz 8. *Für* $w = u+iv$,

$$(2.26) \qquad u \geqslant 1-\theta/4, \quad |v| \leqslant k/4, \quad X \geqslant 3, \quad k' = \max(k, X)$$

gilt

$$\left(\frac{L'}{L}\right)'(w, \chi_1) + \left(\frac{\zeta'}{\zeta}\right)'(w) = \frac{1}{(w-1)^2} - \frac{1}{(w-\beta)^2} + \sum_{n\leqslant X}\frac{1+\chi_1(n)}{n^w}\Lambda(n)\log n$$
$$+ O\left(\delta(\log^2X)\int_1^X\eta^{-u}\,d\eta\right) + O(X^{1-u-3\theta/4}\log^3k') +$$
$$+ O\left(\frac{X^{1-u}+1}{k'}\log^3k'\right) + O(X^{-u}\log^2k').$$

Beweis. Nach (2.25) gilt

$$\frac{d}{dw}\sum_{l=0,1}(-1)^l\frac{X^{\beta_l-w}-1}{\beta_l-w} = \frac{d}{dw}\int_\beta^1\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{X^{\lambda-w}-1}{\lambda-w}d\lambda = -\int_\beta^1\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\left(\int_1^X\eta^{\lambda-w-1}\,d\eta\right)d\lambda.$$

Daraus folgt nach Anwendung des Cauchyschen Integralsatzes auf (2.24) wegen (1.4) die Behauptung.

Hilfssatz 9. *Für* $w = u+iv$, $l = 0, 1$,

$$u > 1, \quad |v| \leqslant k/2, \quad y \geqslant 3, \quad k' = \max(k, y)$$

gilt

$$\sum_{p>y} \frac{\chi_l(p)}{p^w} = (-1)^l \int_0^{\theta/8} \frac{y^{\beta_l - w - \lambda}}{w+\lambda-\beta_l}\, d\lambda + O(y^{1-u-\theta/8}\log^2 k') + O\left(\frac{\log^2 k'}{k'}\right). \tag{2.27}$$

Beweis. Wegen

$$\sum_{p>y} p^{-u-\theta/8} \ll \frac{1}{\theta} y^{1-u-\theta/8}$$

hat man

$$\sum_{p>y} \frac{\chi_l(p)}{p^w} + O\left(\frac{1}{\theta} y^{1-u-\theta/8}\right) = \int_0^{\theta/8} \sum_{p>y} \frac{\chi_l(p)}{p^{w+\lambda}} \log p \, d\lambda$$
$$= \int_0^{\theta/8} \left(\sum_{n>y} \frac{\chi_l(n)\Lambda(n)}{n^{w+\lambda}} + O(y^{-2u-2\lambda+1}) \right) d\lambda.$$

In Verbindung mit (1.4) und Hilfssatz 6 folgt daraus die Behauptung.

Hilfssatz 10. *Für*

$$X \geqslant 3, \quad \sqrt{X} < y < X/2, \quad \Delta = \frac{\log X}{\log y} - 1 \tag{2.28}$$

gilt

$$\sum_{\substack{p' < X/y \\ y < p \leqslant X/p'}} \log^2 p' = X\left(\left(\frac{\Delta^2}{2} + O(\Delta^3)\right)\log X + O(\Delta)\right). \tag{2.29}$$

Beweis. Die Summe auf der linken Seite von (2.29) ist wegen (2.28) nach dem Primzahlsatz

$$= \sum_{p' < X/y} \log^2 p' \left(\frac{X/p'}{\log(X/p')} + O\left(\frac{X/p'}{\log^2 y}\right) + O\left(\frac{y}{\log y}\right)\right)$$
$$= X \int_2^{X/y} \frac{\log \eta}{\eta \log(X/\eta)}\, d\eta + O\left(X \int_2^{X/y} \frac{d\eta}{\eta\log(X/\eta)}\right) +$$
$$+ O\left(\frac{X}{\log^2 y} \log^2 \frac{X}{y}\right) + O\left(\frac{y}{\log y}\cdot \frac{X}{y} \log \frac{X}{y}\right)$$

$$= X \int_{\log y}^{\log X/2} \frac{\log X - \omega}{\omega}\, d\omega + O\left(X \int_{\log y}^{\log X} \frac{d\omega}{\omega}\right) + O(X\Delta). \tag{2.30}$$

Nun ist wegen (2.28) das erste Integral auf der rechten Seite von (2.30)

$$= (\log X) \log\left(\frac{\log X - \log 2}{\log y}\right) - \log \frac{X}{y} + \log 2$$
$$= (\log X)\left(\log(1+\Delta) - \left(1 - \frac{1}{1+\Delta}\right)\right) + O\left(\frac{1}{\log X}\right),$$

und das zweite Integral ist

$$= \log \frac{\log X}{\log y} = \log(1+\Delta) < \Delta.$$

In Verbindung mit (2.30) folgt daraus die Behauptung.

Hilfssatz 11. *Unter der Voraussetzung* (2.28) *gilt*

$$\int_0^{\theta/8} \operatorname*{Res}_{s=1,1-\lambda} \left(\frac{1}{(s-1)^2(s+\lambda-1)} \frac{1}{s} \left(\frac{X}{y}\right)^{s-1} y^{-\lambda}\right) d\lambda \tag{2.31}$$
$$= (\log X)\left(\frac{\Delta^2}{2} + O(\Delta^3)\right) + O(\Delta) + O\left(\frac{\theta^{-1} + \log(X/y)}{\theta \log X} y^{-\theta/8}\right).$$

Beweis. Das Integral in (2.31) wird, da der zugehörige Integrand

$$= \frac{X^{-\lambda}}{\lambda^2(1-\lambda)} + y^{-\lambda}\left(\frac{1}{\lambda}\log \frac{X}{y} - \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda}\right)$$

ist, vermöge der Substitution

$$\lambda = \frac{\omega}{\log y},$$

also

$$\log \frac{X}{y} = \Delta \frac{\omega}{\lambda}; \qquad \frac{1}{1-\lambda} = 1 + \lambda + O(\lambda^2) \quad (0 < \lambda < 1/2),$$

$$= (\log y)\left(\psi(1+\Delta) - \frac{1}{\log y}\psi'(1+\Delta)\right) + O\left(\frac{1}{\log X}\right) + \tag{2.32}$$
$$+ O\left(\frac{\theta^{-2}}{\log X} y^{-\theta/8}\right) + O\left(\frac{\theta^{-1}\log(X/y)}{\log X} y^{-\theta/8}\right)$$

mit

$$\psi(\varrho) = \int_0^\infty \omega^{-2}\left(e^{-\varrho\omega} + (\varrho - 1)\omega e^{-\omega} - e^{-\omega}\right) d\omega \quad (\varrho > 0),$$

also

$$\psi'(\varrho) = -\int_0^\infty \omega^{-1}(e^{-\varrho\omega}-e^{-\omega})\,d\omega \qquad (\varrho>0),$$

$$\psi''(\varrho) = \int_0^\infty e^{-\varrho\omega}\,d\omega = \frac{1}{\varrho} \qquad (\varrho>0).$$

Wegen $\psi(1)=\psi'(1)=0$ folgt daraus

$$\psi'(\varrho) = \log\varrho,$$

$$\psi(\varrho) = \varrho(\log\varrho-1)+1.$$

Insbesondere ist

$$\psi'(1+\Delta) = O(\Delta),$$

$$\psi(1+\Delta) = (1+\Delta)\big(-1+\Delta-\Delta^2/2+O(\Delta^3)\big)+1 = \Delta^2/2+O(\Delta^3).$$

Setzt man dies in (2.32) ein und berücksichtigt (2.28) und

$$\log y = (\log X)\big(1+O(\Delta)\big),$$

so ergibt sich (2.31).

3. Zur weiteren Auswertung von Hilfssatz 5 definieren wir bei vorgegebenem Charakter χ und reellen Zahlen $\beta'\leqslant 1$, λ, $y>0$, $\xi>1$ mit Hilfe einer Funktion $f(s,w_1,w_2)$, die entweder die Gestalt

$$(3.1)\qquad f(s,w_1,w_2) = \sum_{m=1,2}\frac{y^{\beta'-s-w_m-\lambda}}{s+w_m+\lambda-\beta'} - \frac{y^{\beta'-s-w_1-w_2-\lambda}}{s+w_1+w_2+\lambda-\beta'}$$

hat oder identisch

$$(3.2)\qquad = 1$$

ist, in Verbindung mit (2.7), (2.8) und (2.27)

$$\varphi_{1,f}(s,w_1,w_2) = \frac{L(s,\chi)L(s+w_1+w_2,\chi)}{L(s+w_1,\chi)L(s+w_2,\chi)}G(s,w_1,w_2,\chi)f(s,w_1,w_2)\frac{\xi^{w_1+w_2}}{w_1^2w_2^2}$$

$$(\mathrm{Re}(s),\mathrm{Re}(w_1),\mathrm{Re}(w_2)>0).$$

Damit folgt

$$(3.3)\qquad \varphi_{2,f}(s,w_1):=\operatorname*{Res}_{w_2=0}\varphi_{1,f}(s,w_1,w_2) = f(s,0,0)\frac{\xi^{w_1}}{w_1^2}\log\xi +$$

$$+\frac{\xi^{w_1}}{w_1^2}\left(\left(\frac{L'}{L}(s+w_1,\chi)-\frac{L'}{L}(s,\chi)\right)f(s,0,0)+\frac{\partial}{\partial w_2}G(s,w_1,w_2,\chi)|_{w_2=0}\times\right.$$

$$\left.\times f(s,0,0)+\frac{\partial}{\partial w_2}f(s,w_1,w_2)|_{w_2=0}\right).$$

Nach (2.8) ist

$$(3.4)\qquad G_1(s,w_1):=\frac{\partial}{\partial w_2}G(s,w_1,w_2,\chi)|_{w_2=0}$$

$$= \sum_p \frac{\chi(p)}{p^{s+w_1}}\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\big(1-\chi(p)p^{-s}\big)\big(1-\chi(p)p^{-z}\big)}{\prod_{m=1,2}\big(1-\chi(p)p^{-s-w_m}\big)}\Bigg|_{w_2=0}$$

$$(z:=s+w_1+w_2)$$

$$= \sum_p \frac{\chi(p)}{p^{s+w_1}}\left(\frac{\chi(p)\log p}{p^{s+w_1}\left(1-\frac{\chi(p)}{p^{s+w_1}}\right)} - \frac{\chi(p)\log p}{p^s\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)}\right)$$

$$= \sum_p \chi^2(p)\log p\,\big(p^{-s-w_1}(p^{s+w_1}-\chi(p))^{-1}-p^{-s}(p^s-\chi(p))^{-1}\big).$$

Im Falle (3.1) ist

$$(3.5)\qquad f_1(s,w_1):=\frac{\partial}{\partial w_2}f(s,w_1,w_2)\Big|_{w_2=0}$$

$$=\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\frac{y^{\beta'-s-\lambda}}{s+\lambda-\beta'}-\frac{y^{\beta'-s-\lambda-w_1}}{s+\lambda-\beta'+w_1}\right]$$

und im Falle (3.2) ist

$$(3.6)\qquad f_1(s,w_1)\equiv 0.$$

Aus (3.4) folgt

$$(3.7)\qquad G_1(s):=\frac{\partial}{\partial w_1}G_1(s,w_1)\Big|_{w_1=0} = -\sum_p\chi^2(p)\log^2 p\,\frac{2-\chi(p)p^{-s}}{(p^s-\chi(p))^2}.$$

Im Falle (3.1) folgt aus (3.5)

$$(3.8)\qquad f_1(s):=\frac{\partial}{\partial w_1}f(s,w_1)\Big|_{w_1=0} = \frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\frac{y^{\beta'-s-\lambda}\log y}{s+\lambda-\beta'}+\frac{y^{\beta'-s-\lambda}}{(s+\lambda-\beta')^2}\right]$$

und im Falle (3.2) aus (3.6)

$$(3.9)\qquad f_1(s)=0 \quad \text{für alle } s.$$

Andererseits erhält man mit (3.3), (3.4) und (3.5)

$$(3.10)\qquad \varphi_{1,f}(s):=\operatorname*{Res}_{w_1=0}\varphi_{2,f}(s,w_1)$$

$$= f(s,0,0)\left(\log^2\xi+\left(\frac{L'}{L}\right)'(s,\chi)+G_1(s)\right)+f_1(s)$$

für $\sigma>1$.

Nun sei bei genügend großem $C = c_4$

$$\log x > \log^2\frac{x}{y}, \quad \log\frac{x}{y} = C\frac{\log_2 k}{\theta},$$

(3.11)
$$\xi = \max(y^C, k^C), \quad \Delta = \frac{\log(x/y)}{\log y}$$

und

(3.12)
$$X = \sqrt{x}.$$

Insbesondere ist dann wegen (1.4) die Bedingung (2.5) und für $u = 1-\lambda$, $0 \leqslant \lambda \leqslant \theta/8$, $|v| \leqslant k/4$ die Bedingung (2.26) erfüllt.

Wir dürfen daher die Siebungleichung von Hilfssatz 5 mit den Hilfssätzen 3, 7, 8 und 9 unter Verwendung des Residuensatzes umformen. Dabei wird (3.10) in Verbindung mit (3.7), (3.8) und (3.9) in den Fällen (3.1) und (3.2) benötigt. Der Vergleich der beiden Hilfssätze 10 und 11 führt nunmehr zu der Abschätzung

$$\int_0^{\theta/8}\Bigg(\sum_{n<X}\frac{1+\chi_1(n)}{n^{1-\lambda}}\Lambda(n)(\log n)x^{-\lambda}+O\Big(x^{-\lambda}\big(1+\delta(\log^2\xi)\log x\big)\Big)+$$

$$+O\left(\delta(\log^2 x)\int_1^X\left(\frac{\eta}{x}\right)^{\lambda}\frac{d\eta}{\eta}\right)\Bigg)d\lambda$$

$$\ll \Delta^3\log x+\Delta+\frac{1}{\log x}+\delta\log^2 x,$$

wegen (3.11) und (3.12) erhält man also

$$\sum_{p<X}\frac{1+\chi_1(p)}{p}\log^2 p \ll \frac{\log_2 k}{\theta}+\delta(\log^3 x+\log^3 k)$$

und damit wegen (1.1) und (1.4) sofort (1.2) bei genügend großem c_2.

Literaturverzeichnis

[1] S. Knapowski, *On Linnik's theorem concerning exceptional zeros*, Publ. Math. Debrecen (1962), S. 168–178.

[2] K. Prachar, *Primzahlverteilung*, Berlin 1957.

[3] P. Turán, *Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen*, Budapest 1953.

[4] — *A note on the real zeros of Dirichlet's L-functions*, Acta Arith. 5 (1959), S. 309–314.

Reçu par la Rédaction le 1. 3. 1969

ACTA ARITHMETICA
XVI (1970)

On the Siegel formula for ternary skew-hermitian forms

by

S. Raghavan and S. S. Rangachari (Bombay)

§ 1. Introduction. Let $\mathscr{A}$ be a simple algebra over an algebraic number field k and let ι be an involution in $\mathscr{A}$. Then $\mathscr{A}$ is the total-matrix algebra $\mathfrak{M}_m(\mathfrak{K})$ of m-rowed matrices over a division-algebra $\mathfrak{K}$ with an involution $\xi \to \tilde{\xi}$ and the involution ι takes x in $\mathscr{A}$ to $h^{-1}\cdot{}^t\tilde{x}\cdot h$ for a fixed m-rowed nonsingular matrix h satisfying the condition ${}^t\tilde{h} = \eta h$, $\eta = \pm 1$. Let X be a left $\mathscr{A}$-module of rank n and let G be the group of elements u in $\mathscr{A}$ for which $u\cdot u^{\iota} = 1$. G is precisely the group of u in $\mathfrak{M}_m(\mathfrak{K})$ for which ${}^t\tilde{u}\cdot h\cdot u = h$. Let δ, δ' be the dimensions over k of $\mathfrak{K}$ and of the space of elements ξ in $\mathfrak{K}$ for which $\tilde{\xi}' = \eta\xi$ and let $\varepsilon = \delta'/\delta$. Then for $m > 2n+4\varepsilon-2$, Weil has proved in [10] that the tempered measure $E(\Phi)$ defined by means of the "Eisenstein–Siegel series" on the space $\mathscr{S}(X_A)$ of Schwartz–Bruhat functions Φ associated with the adele-space X_A attached to X, coincides with the tempered measure $I(\Phi)$ defined by means of the "theta series" associated with G.

For $m = 2n+4\varepsilon-2$, the Eisenstein–Siegel series does not make sense, since it does not in general converge absolutely. It has been proved in [4] that when $n = 1$, $m = 4$, $\varepsilon = 1$, $k = \boldsymbol{Q}$, the field of rational numbers, and G is the orthogonal group of a quadratic form of index not exceeding 1 and with rational integral coefficients, one can define by using a limiting process, an Eisenstein–Siegel series and identify it with the corresponding measure $I(\Phi)$ defined by means of theta series.

Here we take up the case when $\mathscr{A}$ is the total matrix-algebra $\mathfrak{M}_3(\boldsymbol{D})$ over an indefinite quaternion division algebra $\boldsymbol{D}$ with the rational number field $\boldsymbol{Q}$ as centre and with an involution $\sim$ (of the first kind). Let h be the matrix of a non-degenerate skew-hermitian form defined over X which is now a vector-space of dimension 3 over $\boldsymbol{D}$. As pointed out earlier, the main difficulty here is that the Eisenstein–Siegel series $E(\Phi)$ as defined by Weil [10] does not converge absolutely and we have to modify its definition by following an idea of Hecke and Siegel [5]. However the "theta series" $I(\Phi)$ makes sense even in this case as shown by Weil [10].