numbers with at most k prime factors, where k depends on τ, and $k \to \infty$ when $\tau \to \infty$. E.g. $k = 8$ if $\tau \leqslant 7.02$.

We take now $\{a_n\} = \{p+2\}$, $f(m) = m\varphi^{-1}(m)$, where p runs over the primes in the interval $[x, x+y]$. Then $N < y$, $t = \theta^{-1}$, $\gamma = \beta\theta^{-1}$, and

$$\tau = \frac{1}{\beta} = \frac{6+4c}{4c\theta+2\theta-1-4c}+\varepsilon .$$

When $\theta \to 1$, then $\tau \to 6+4c+\varepsilon < 7.02$. So $\theta(8) < 1$. The second assertion of Theorem 3 follows also immediately.

15. We remark finally that Theorem 2 is applicable to several other problems. E.g. it is possible to estimate the differences between "short" gaps between prime numbers, along the lines of the paper of Bombieri–Davenport [3]. Also it can be proved that every large even number is representable as a sum of two almost equal integers, one of which is a prime and the other has a finite number ($\leqslant 8$) of prime factors.

References

[1] M. B. Barban, *On the density hypothesis of E. Bombieri* (Russian), Dokl. Akad. Nauk SSSR 172 (1967), pp. 999–1000.

[2] E. Bombieri, *On the large sieve*, Mathematika 12 (1965), pp. 201–225.

[3] E. Bombieri and H. Davenport, *Small differences between prime numbers*, Proc. Royal Soc. Ser. A 193 (1966), pp. 1–18.

[4] P. X. Gallagher, *The large sieve*, Mathematika 14 (1967), pp. 14–20.

[5] — *Bombieri's mean value theorem*, Mathematika 15 (1968), pp. 1–6.

[6] W. Haneke, *Verschärfung der Abschätzung von $\zeta(\frac{1}{2}+it)$*, Acta Arith. 8 (1963), pp. 357–430.

[7] B. V. Levin, *The linear sieve* (Russian), Acta Arith. 10 (1965), pp. 387–397.

[8] K. Prachar, *Primzahlverteilung*, Berlin 1957.

[9] K. A. Rodosski, *On the density of zeros of L-functions* (Russian), Izv. vysš. utšebn. zaved., Mathematika, 3 (4) (1958), pp. 191–197.

[10] A. I. Vinogradov and Yu. V. Linnik, *An estimate for the sum of the number of divisors in a short segment of an arithmetical progression* (Russian), Uspehi Mat. Nauk 12:4 (1957), pp. 277–280.

UNIVERSITY OF TURKU
Turku, Finland

Reçu par la Rédaction le 15. 2. 1969

ACTA ARITHMETICA
XVI (1969)

Metrische Theorie einer Klasse zahlentheoretischer Transformationen (Corrigendum)

von

FRITZ SCHWEIGER (Wien)

Wie ich erst nach Drucklegung von [2] bemerkte, ist der Beweis von Satz 5 unrichtig. Die Abschätzung von der drittletzten Zeile zur vorletzten Zeile auf p. 6 ist grob fehlerhaft. Es soll hier ein neuer Beweis gegeben werden, der lediglich eine kleine Zusatzvoraussetzung, nämlich $0 < m \leqslant f_0(x) \leqslant M$ auf B verlangt. Da die Eindeutigkeit aus bekannten Sätzen der Ergodentheorie ohnedies folgt, werden wir Teil (b) von p. 7 an, neu beweisen.

Wir zeigen also: Es sei $f_0(x)$ gegeben mit

$$0 < m \leqslant f_0(x) \leqslant M,$$

$$|f_0(x)-f_0(y)| \leqslant N\cdot\|x-y\|.$$

Definiert man rekursiv

$$f_{s+1}(x) = \sum_k f_s(V_k x)\,\Delta_k(x)$$

so gilt

$$|f_s(x)-a\varrho(x)| < b\sigma(s)$$

wo $a = \int_B f_0(x)\,dx$ und $b = b(f_0)$ eine Konstante ist.

Zunächst folgern wir:

(a) $f_s(x) = \sum f_0(V_{k_1\ldots k_s}x)\,\Delta_{k_1\ldots k_s}(x)$.

(b) $|f_s(x)-f_s(y)| \leqslant N_1\|x-y\|$ mit einem passenden $N_1 > N$, unabhängig von s. Der Beweis ist in [2] auf p. 7.

(c) Da $C^{-1} \leqslant \varrho(x) \leqslant C$ ist $c_1\varrho(x) \leqslant f_0(x) \leqslant c_2\varrho(x)$ und daher $0 < m_1 \leqslant f_s(x) \leqslant M_1$ gleichmäßig in s mit $m_1 \leqslant m \leqslant M \leqslant M_1$.

(d) $\int_B f_s(x)\,dx = \int_B f_0(x)\,dx = a$.

(e) Aus (c) folgt nun

$$g_0 f_s(x) < f_{s+t}(x) < G_0 f_s(x)$$

mit $0 < g_0 \leqslant G_0$ gleichmäßig in s und t.

(f) Wir bilden nun

$$\varphi_s(x) = f_{s+t}(x) - g_0 f_s(x),$$
$$\psi_s(x) = G_0 f_s(x) - f_{s+t}(x),$$

φ_s und ψ_s erfüllen bei festem t wiederum die Rekursionsgleichungen.

Weiter ist

$$\varphi_s(x) = \sum \varphi_0(V_{k_1\ldots k_s}x)\Delta_{k_1\ldots k_s}(x) > C^{-2}\sum \varphi_0(u)\lambda(B_{k_1\ldots k_s}),$$

wo $u = V_{k_1\ldots k_s}x$.

Ferner setzen wir

$$\int_B \varphi_0(x)\,dx = \sum \varphi_0(u')\lambda(B_{k_1\ldots k_s})$$

mit einem $u' \in B_{k_1\ldots k_s}$ durch Anwendung des Mittelwertsatzes. Daher ist

$$\varphi_s(x) - C^{-2}\int_B \varphi_0(x)\,dx > C^{-2}\sum \{\varphi_0(u) - \varphi_0(u')\}\lambda(B_{k_1\ldots k_s}).$$

Mit Hilfe von (b) sieht man

$$|\varphi_0(u) - \varphi_0(u')| \leqslant N_2\|u-u'\|$$

wobei $N_2 > N_1(1+g_0)$ unabhängig von s und t gewählt werden — und auch so, daß es für den Schritt (g) wieder paßt. Daraus erhält man

$$\varphi_s(x) > C^{-2}\int_B \varphi_0(x)\,dx - c_3\sigma(s)$$

d.h.

$$f_{s+t}(x) - g_0 f_s(x) > C^{-2}(1-g_0)\cdot a - c_3\sigma(s) \quad \text{und} \quad f_{s+t}(x) > f_s(x)\cdot g_1$$

mit $g_1 = g_0\cdot a + \beta(s)$ wo

$$a = 1 - \frac{a}{C^2 M_1} < 1 \quad \text{und} \quad \beta(s) = \frac{a}{C^2 M_1} - \frac{c_3}{m_1}\sigma(s).$$

Für $s \geqslant s_0$ ist bestimmt $\beta(s) > 0$ und damit $g_1 > 0$.

Analog wird:

$$G_0 f_s(x) - f_{s+t}(x) > C^{-2}(G_0-1)a - c_4\sigma(s), \quad f_{s+t}(x) < f_s(x)\cdot G_1$$

mit $G_1 = G_0\cdot\gamma + \delta(s)$ wo

$$\gamma = 1 - \frac{a}{C^2 M_1} = a < 1 \quad \text{und} \quad \delta(s) = \frac{a}{C^2 M_1} + \frac{c_4}{M_1}\sigma(s).$$

(g) Aus $g_0 f_s(x) \leqslant f_{s+t}(x) \leqslant G_0 f_s(x)$ folgt daher

$$g_1 f_s(x) = f_{s+t}(x) \leqslant G_1 f_s(x).$$

Wiederholen wir den Schritt (f) mit den neuen Konstanten g_1, G_1 statt g_0, G_0 gelangen wir zu

$$g_2 = g_1 a + \beta(s) = a^2 g_0 + \beta(s)(a+1),$$
$$G_2 = G_1\gamma + \delta(s) = \gamma^2 G_0 + \delta(s)(\gamma+1)$$

mit $g_2 f_s(x) \leqslant f_{s+t}(x) \leqslant G_2 f_s(x)$ gleichmäßig in s und t (eventuell $s \geqslant s_0$).

(h) Durch Iteration kommt man zu

$$g_r f_s(x) \leqslant f_{s+t}(x) \leqslant G_r f_s(x)$$

mit $g_r = a^r g_0 + \beta(s)(a^{r-1}+\ldots+1)$, $G_r = \gamma^r G_0 + \delta(s)(\gamma^{r-1}+\ldots+1)$.

Da

$$\lim_{r\to\infty} g_r = \frac{\beta(s)}{1-a} = 1 + c_5\sigma(s), \qquad \lim_{r\to\infty} G_r = \frac{\delta(s)}{1-\gamma} = 1 + c_6\sigma(s)$$

erhalten wir

$$|f_{s+t}(x) - f_s(x)| < b\sigma(s)$$

und für $t\to\infty$

$$|\varrho(x)a - f_s(x)| < b\sigma(s).$$

Dabei setzen wir $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \varrho(x)a$. Dieser Limes existiert, da die $\{f_n(x)\}$ eine Cauchyfolge bezüglich gleichmäßiger Konvergenz bilden. Er ist mit der Dichte des invarianten Maßes identisch, da diese fast überall eindeutig bestimmt ist.

(i) Man wird sich fragen, warum in [1] die Konvergenzgeschwindigkeit lediglich $\sigma(\sqrt{s})$ plus einem Exponentialterm $\exp(-\lambda\sqrt{s})$ ist (diese Aufspaltung wurde in [3] klar gezeigt). Dies scheint daran zu liegen, daß Kuzmin, anstatt die Folgen g_i, G_i direkt zu behandeln ihre Monotonie (übrigens nicht ganz korrekt) erzwungen hat und die Differenz dann behandelte.

Zuletzt sei noch auf die Arbeit [4] hingewiesen, in der eine ähnliche Aufspaltung in $\sigma(s)$ und Exponentialkorrekturglied zu beobachten ist.

Literaturverzeichnis

[1] A. Ya. Khintchine, *Continued Fractions*, Groningen 1963; oder: *Kettenbrüche*, Leipzig 1956.

[2] F. Schweiger, *Metrische Theorie einer Klasse zahlentheoretischer Transformationen*, Acta Arith. 15 (1968), S. 1–18.

[3] — *Ein Kuzminscher Satz über den Jacobischen Algorithmus*, J. Reine Angew. Math. 232 (1968), S. 35–40.

[4] P. Szüsz, *On Kuzmin's theorem II*, Duke Math. Journal 35 (1968), S. 535–540.

Reçu par la Rédaction le 15. 2. 1969