ACTA ARITHMETICA
XVI (1969)

Sur certaines fonctions additives à valeurs entières

par

HUBERT DELANGE (Paris)

1. Introduction. Kubilius a établi le résultat suivant [1]:

Soit f une fonction arithmétique additive à valeurs entières. On suppose que $f(p) = 0$ pour tout p premier [2].

Alors, pour chaque entier q, l'ensemble des entiers positifs n pour lesquels $f(n) = q$ possède une densité d_q.

Plus precisèment, si $\nu_q(x)$ est le nombre des $n \leqslant x$ tels que $f(n) = q$, on a pour x infini

$$\nu_q(x) = d_q x + O\left[\frac{x \log\log x}{\log x}\right].$$

Nous nous proposons ici d'améliorer le résultat de Kubilius en montrant que *l'on a en fait*

$$\nu_q(x) = d_q x + O[x^{1/2}].$$

On peut même préciser *qu'il existe une constante absolue C telle que, quelle que soit la fonction f considérée et quel que soit l'entier q, on a pour* $x \geqslant 1$

$$|\nu_q(x) - d_q x| \leqslant C x^{1/2}. \tag{1}$$

2. Rappels.

2.1. Soit $\mathscr{A}$ l'ensemble des fonctions arithmétiques, c'est-à-dire des fonctions réelles ou complexes définies sur l'ensemble N^* des entiers $\geqslant 1$.

Il est usuel de définir une convolution dans $\mathscr{A}$ par la formule

$$(f_* g)(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right).$$

---

[1] Cf. J. Kubilius, *Probabilistic Methods in the Theory of Numbers* (Translations of mathematical Monographs, vol. 11, theorem 4.9, p. 88).

[2] Tout au long de cet article, la lettre p désigne un nombre premier. Les lettres m, n, r désignent des entiers $\geqslant 1$.

On sait que cette opération de convolution est commutative et associative, et qu'elle possède un élément neutre, à savoir la fonction e telle que

$$e(1) = 1 \quad \text{et} \quad e(n) = 0 \quad \text{pour tout } n > 1.$$

Les éléments inversibles de $\mathscr{A}$ forment naturellement un groupe $\mathscr{G}$ avec l'opération de convolution. Ce sont les fonctions arithmétiques f telles que $f(1) \neq 0$.

L'ensemble des fonctions multiplicatives est un sous-groupe de $\mathscr{G}$ ([3]).

Si a est un élément de $\mathscr{G}$ et si on désigne son inverse par a', les relations

$$g = f_* a \quad \text{et} \quad f = g_* a',$$

où f et g sont deux éléments quelconques de $\mathscr{A}$, sont évidemment équivalentes ([4]).

Lorsque $g = a_* f$, on voit immédiatement que l'on a pour tout $x \geqslant 1$

$$\sum_{n \leqslant x} g(n) = \sum_{n \leqslant x} a(n) F\left(\frac{x}{n}\right),$$

où F est la fonction définie pour $x \geqslant 1$ par

$$F(x) = \sum_{n \leqslant x} f(n).$$

2.2. On voit de suite que la fonction λ de Liouville, définie par

$$\lambda(1) = 1$$

et

$$\lambda(n) = (-1)^{a_1+a_2+\ldots+a_k} \quad \text{si} \quad n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_k^{a_k},$$

a pour inverse la fonction μ^2.

En effet, μ^2 et λ étant multiplicatives, la fonction $\mu^2{}_*\lambda$ est aussi multiplicative. Sa valeur pour $n = p^r$ est

$$\sum_{j=0}^{r} \mu^2(p^j)\lambda(p^{r-j}) = (-1)^r + (-1)^{r-1} = 0.$$

Elle est donc égale à la fonction e.

2.3. Si $Q(x) = \sum_{n \leqslant x} \mu^2(n)$, de sorte que $Q(x)$ est le nombre des entiers positifs "quadratfrei" au plus égaux à x, on a pour x infini

---

([3]) Nous disons que la fonction arithmétique f est multiplicative si l'on a $f(1) = 1$ et $f(mn) = f(m)f(n)$ quand $(m, n) = 1$.

Si l'on omettait la condition que $f(1) = 1$, l'ensemble des fonctions multiplicatives contiendrait en plus la fonction identiquement nulle.

([4]) Dans le cas particulier où $a(n) = 1$ pour tout $n \geqslant 1$, de sorte que a' est la fonction μ de Möbius, on obtient ce que l'on appelle "la formule d'inversion de Möbius".

$$Q(x) = \frac{6}{\pi^2} x + O\left[x^{1/2} e^{-a\sqrt{\log x}}\right],$$

où a est une constante > 0 ([5]).

Nous poserons

$$Q(x) = \frac{6}{\pi^2} x + R(x).$$

Ainsi, il existe une constante positive A telle que

$$|R(x)| \leqslant A x^{1/2} e^{-a\sqrt{\log x}} \quad \text{pour tout } x \geqslant 1. \tag{2}$$

3. Démonstration du résultat annoncé.

3.1. Pour chaque nombre réel θ, définissons une fonction arithmétique g_θ par

$$g_\theta(n) = \exp[i\theta f(n)]$$

et définissons la fonction G_θ sur $[1, +\infty[$ par

$$G_\theta(x) = \sum_{n \leqslant x} g_\theta(n).$$

Il est clair que l'on a pour tout $x \geqslant 1$

$$\nu_q(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G_\theta(x) e^{-qi\theta} d\theta. \tag{3}$$

3.2. Si l'on introduit la fonction arithmétique

$$h_\theta = g_{\theta *} \lambda,$$

on a $g_\theta = h_{\theta *} \mu^2$ et par suite on a pour tout $x \geqslant 1$

$$G_\theta(x) = \sum_{n \leqslant x} h_\theta(n) Q\left(\frac{x}{n}\right),$$

c'est-à-dire

$$G_\theta(x) = \frac{6}{\pi^2} x \sum_{n \leqslant x} \frac{h_\theta(n)}{n} + \sum_{n \leqslant x} h_\theta(n)\, R\left(\frac{x}{n}\right). \tag{4}$$

([5]) Comme il a été indiqué par Axer (Sitzungsber. Akad. Wien (2a), 120 (1911), p. 1253–1298), toute majoration de $M(x) = \sum_{n \leqslant x} \mu(n)$ fournit une majoration de $Q(x) - (6/\pi^2) x$ grâce à la formule $Q(x) = \sum_{mn^2 \leqslant x} \mu(n)$. En partant de $M(x) = O[xe^{-\beta\sqrt{\log x}}]$, on obtient le résultat indiqué ici, avec $a = \beta/2\sqrt{2}$. Ceci suffit pour les besoins de notre démonstration.

3.2.1. Comme g_θ et λ sont multiplicatives, la fonction h_θ est multiplicative. On a

$$h_\theta(p^r) = \sum_{j=0}^{r} g_\theta(p^j)\lambda(p^{r-j}) = \sum_{j=0}^{r}(-1)^{r-j}g_\theta(p^j)$$

et, comme $g_\theta(p) = 1$ pour tout p, ceci donne

$$h_\theta(p^r) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad r = 1, \\ \sum_{j=2}^{p}(-1)^{r-j}\, g_\theta(p^j) & \text{si} \quad r \geqslant 2. \end{cases}$$

Comme $|g_\theta(n)| = 1$ pour tout $n \geqslant 1$, on voit que l'on a toujours

$$|h_\theta(p^r)| \leqslant r-1.$$

Il résulte de là que l'on a pour tout $n \geqslant 1$

$$|h_\theta(n)| \leqslant h^*(n), \tag{5}$$

où h^* est la fonction multiplicative déterminée par

$$h^*(p^r) = r-1 \text{ quels que soient } p \text{ et } r.$$

3.2.2. Comme $\sum_{p,r}\frac{h^*(p^r)}{p^{r\sigma}} < +\infty$ pour $\sigma > \frac{1}{2}$, la série $\sum_1^{+\infty}\frac{h^*(n)}{n^s}$ est absolument convergente pour $\mathrm{Re}\, s > \frac{1}{2}$ et on a pour $\mathrm{Re}\, s > \frac{1}{2}$

$$\sum_1^{+\infty}\frac{h^*(n)}{n^s} = \prod_p\left[1+\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{h^*(p^r)}{p^{rs}}\right] = \prod_p\left[1+\frac{1}{(p^s-1)^2}\right]. \tag{6}$$

La série $\sum_1^{+\infty}\frac{h^*(n)}{n}$ est donc convergente, ce qui entraîne d'après (5) que la série $\sum_1^{+\infty}\frac{h_\theta(n)}{n}$ est uniformément convergente par rapport à θ pour θ parcourant $\boldsymbol{R}$.

Nous poserons

$$\Phi(\theta) = \sum_1^{+\infty}\frac{h_\theta(n)}{n},$$

de sorte que la fonction Φ est continue sur $\boldsymbol{R}$, et

$$\delta_q = \frac{6}{\pi^2}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(\theta)e^{-qi\theta}\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{6}{\pi^2}\,\Phi(\theta)e^{-qi\theta}\,d\theta.$$

3.2.3. D'après (4), on a pour tout $x \geqslant 1$

$$G_\theta(x) - \frac{6}{\pi^2}x\Phi(\theta) = -\frac{6}{\pi^2}x\sum_{n>x}\frac{h_\theta(n)}{n} + \sum_{n\leqslant x}h_\theta(n)R\left(\frac{x}{n}\right).$$

En tenant compte de (5) et (2), on en déduit

$$\left|G_\theta(x) - \frac{6}{\pi^2}\,x\,\Phi(\theta)\right| \leqslant \Psi(x),$$

où

$$\Psi(x) = \frac{6}{\pi^2}\,x\sum_{n>x}\frac{h^*(n)}{n} + A\sum_{n\leqslant x}h^*(n)\left(\frac{x}{n}\right)^{1/2}\exp\left[-a\sqrt{\log\frac{x}{n}}\right].$$

Compte tenu de cette inégalité, (3) donne

$$|\nu_q(x) - \delta_q x| \leqslant \Psi(x).$$

Pour établir le résultat annoncé, il suffit donc de montrer que l'on a pour x infini

$$\Psi(x) = O[x^{1/2}]. \tag{7}$$

Il en résultera en effet que

$$d_q = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\,\nu_q(x) = \delta_q$$

et que l'on a l'inégalité (1) avec

$$C = \operatorname*{Sup}_{x\geqslant 1}\Psi(x)x^{-1/2}.$$

3.3. Comme, pour $\mathrm{Re}\, s > \frac{1}{2}$,

$$1+\frac{1}{(p^s-1)^2} = \frac{1}{1-\frac{1}{p^{2s}}}\left[1+\frac{2}{p^{2s}(p^s-1)}\right],$$

la formule (6) peut s'écrire

$$\sum_1^{+\infty}\frac{h^*(n)}{n^s} = \zeta(2s)\prod_p\left[1+\frac{2}{p^{2s}(p^s-1)}\right]. \tag{8}$$

On voit immédiatement que le produit infini est convergent pour $\mathrm{Re}\, s > \frac{1}{3}$ et que, quel que soit $\sigma_0 > \frac{1}{3}$, il y a convergence uniforme pour $\mathrm{Re}\, s \geqslant \sigma_0$. Si on désigne sa valeur par $\mathscr{H}(s)$, la fonction $\mathscr{H}$ est holomorphe pour $\mathrm{Re}\, s > \frac{1}{3}$. Le second membre de (8) est donc une fonction de s holomorphe dans le demi-plan $\mathrm{Re}\, s > \frac{1}{3}$, sauf au point $\frac{1}{2}$, qui est un pôle simple de résidu $\frac{1}{2}\mathscr{H}(\frac{1}{2})$.

Si l'on pose $H(x) = \sum_{n\leqslant x} h^*(n)$, le théorème de Ikehara permet de déduire de là que l'on a pour x infini

$$H(x) \sim \mathscr{H}(\tfrac{1}{2})x^{1/2}. \tag{9}$$

3.3.1. Ceci entraîne d'abord que

$$\sum_{n>x} \frac{h^*(n)}{n} \sim \mathscr{H}(\tfrac{1}{2})x^{-1/2}$$

puisque

$$\sum_{n>x} \frac{h^*(n)}{n} = -\frac{H(x)}{x} + \int_x^{+\infty} \frac{H(t)}{t^2}\,dt.$$

3.3.2. Pour obtenir (7) il ne reste plus qu'à montrer que

$$\sum_{n\leqslant x} h^*(n)\left(\frac{x}{n}\right)^{1/2} \exp\left[-a\sqrt{\log\frac{x}{n}}\right] = O[x^{1/2}].$$

On voit que, pour chaque $n \leqslant x$,

$$\begin{aligned} h^*(n)\left(\frac{x}{n}\right)^{1/2} \exp\left[-a\sqrt{\log\frac{x}{n}}\right] &= h^*(n) + \int_0^{\sqrt{\log\frac{x}{n}}} h^*(n)\,e^{t^2/2-at}(t-a)\,dt \\ &= h^*(n) + \int_0^{\sqrt{\log x}} h^*(n)\,Y\left(\sqrt{\log\frac{x}{n}}-t\right)e^{t^2/2-at}(t-a)\,dt, \end{aligned}$$

où Y est la fonction définie sur $\boldsymbol{R}$ par

$$Y(u) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad u<0, \\ 1 & \text{pour} \quad u \geqslant 0. \end{cases}$$

Par addition on obtient

$$\sum_{n\leqslant x} h^*(n)\left(\frac{x}{n}\right)^{1/2} \exp\left[-a\sqrt{\log\frac{x}{n}}\right] = H(x) + \int_0^{\sqrt{\log x}} H(xe^{-t^2})\,e^{t^2/2-at}(t-a)\,dt.$$

Mais (9) entraîne qu'il existe un $B>0$ tel que

$$H(x) \leqslant Bx^{1/2} \quad \text{pour tout } x \geqslant 1.$$

Alors on a pour tout $x\geqslant 1$

$$\begin{aligned} \sum_{n\leqslant x} h^*(n)\left(\frac{x}{n}\right)^{1/2} \exp\left[-a\sqrt{\log\frac{x}{n}}\right] &\leqslant Bx^{1/2} + Bx^{1/2}\int_0^{\sqrt{\log x}} e^{-at}(t+a)\,dt \\ &\leqslant Bx^{1/2}\left[1+\int_0^{+\infty} e^{-at}(t+a)\,dt\right]. \end{aligned}$$

4. Remarques.

4.1. L'existence des densités d_q et leur détermination, indiquée par Kubilius, par le fait que l'on a pour tout θ réel

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} d_q e^{i\theta q} = \prod_p \left(1-\frac{1}{p}\right)\left[1+\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{g_\theta(p^r)}{p^r}\right] \tag{10}$$

peuvent se déduire immédiatement du théorème général d'Erdös et Wintner sur l'existence d'une loi de distribution asymptotique pour une fonction additive réelle.

En effet, la condition d'Erdös et Wintner est évidemment satisfaite. Or, f prenant ses valeurs dans $\boldsymbol{Z}$, l'existence d'une loi de distribution asymptotique pour f est équivalente à l'existence des densités d_q avec

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} d_q = 1,$$

et l'égalité (10) exprime que la fonction caractéristique de cette loi de distribution est celle qu'indique de théorème d'Erdös et Wintner.

4.1.1. La méthode utilisée ici permet aussi d'établir (10).

En effet, comme h_θ est multiplicative et comme on a pour $\sigma > \frac{1}{2}$

$$\sum_{p,r}\frac{|h_\theta(p^r)|}{p^{r\sigma}} \leqslant \sum_{p,r}\frac{h^*(p^r)}{p^{r\sigma}} < +\infty,$$

on a pour $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$

$$\sum_1^{+\infty}\frac{h_\theta(n)}{n^s} = \prod_p\left[1+\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{h_\theta(p^r)}{p^{rs}}\right].$$

Mais, comme $h_\theta = \lambda_* g_\theta$, on a

$$h_\theta(p^k) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j g_\theta(p^{k-j})$$

et par suite

$$1+\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{h_\theta(p^r)}{p^{rs}} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{h_\theta(p^k)}{p^{ks}} = \frac{1}{1+(1/p^s)}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{g_\theta(p^k)}{p^{ks}}$$

$$= \frac{1}{1-(1/p^{2s})}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)\left[1+\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{g_\theta(p^r)}{p^{rs}}\right].$$

On voit ainsi que l'on a pour $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$

$$\sum_{1}^{+\infty}\frac{h_\theta(n)}{n^s} = \zeta(2s)\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)\left[1+\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{g_\theta(p^r)}{p^{rs}}\right].$$

Pour $s=1$, ceci donne

$$\Phi(\theta) = \frac{\pi^2}{6}\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)\left[1+\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{g_\theta(p^r)}{p^r}\right],$$

ce qui peut s'écrire, compte tenu de ce que $g_\theta(p) = 1$,

$$\frac{6}{\pi^2}\Phi(\theta) = \prod_p [1+u_p(\theta)],$$

où

$$u_p(\theta) = \sum_{r=2}^{+\infty}\frac{g_\theta(p^r)-g_\theta(p^{r-1})}{p^r}.$$

On voit, grâce à cette égalité, que la fonction $\frac{6}{\pi^2}\Phi$ appartient à l'algèbre de Banach $\mathfrak{A}$ des fonctions complexes qui sont sommes de séries trigométriques absolument convergentes — et par suite est égale à la somme de sa série de Fourier — car u_p appartient à $\mathfrak{A}$ et le produit infini $\prod_p(1+u_p)$ est absolument convergent dans $\mathfrak{A}$.

4.2. Dans l'énoncé du théorème A de notre article *Sur un théoréme de Renyi. II*(6) figurent deux fonctions ω_E et Ω_E définies à partir d'un

(6) Acta Arithmetica 13 (1968), p. 339-362.

ensemble E de nombres premiers. La fonction $\Omega_E-\omega_E$ est une fonction additive à valeurs entières prenant la valeur zéro pour tous les nombres premiers.

On voit que le théorème établi ici donne, pour $q \geqslant 1$, un résultat meilleur que celui du théorème A.

Par contre, pour $q = 0$, la conclusion du théorème A est meilleure.

Cependant, la conclusion du théorème A pour $q = 0$ peut aussi être obtenue comme cas particulier d'un résultat plus général.

En effet, le théorème établi ici peut être complété comme suit:

Si l'on a $f(n) \geqslant 0$ pour tout $n \geqslant 1$, on a pour x infini

$$\nu_0(x) = d_0 x + o[x^{1/2}].$$

En effet, il est clair que, si g est la fonction multiplicative déterminée par

$$g(p^r) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad f(p^r) = 0, \\ 0 & \text{si} \quad f(p^r) > 0, \end{cases}$$

on a

$$g(n) = \begin{cases} 1 & \text{quand} \quad f(n) = 0, \\ 0 & \text{quand} \quad f(n) > 0, \end{cases}$$

et par suite on a pour $x \geqslant 1$

$$\nu_0(x) = \sum_{n\leqslant x} g(n).$$

Or on a le théorème suivant:

Soit g une fonction multiplicative telle que $g(n) = 0$ ou 1 pour tout $n \geqslant 1$ et $g(p) = 1$ pour tout p.

Alors on a pour x infini

$$\sum_{n\leqslant x} g(n) = \delta x + o[x^{1/2}],$$

où δ est une constante.

Pour établir ce résultat, introduisons les fonctions arithmétiques multiplicatives k et l déterminées par

$$k(p^r) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad g(p^2) = 0 \text{ et } r > 1, \\ 1 & \text{si} \quad g(p^2) = 1 \text{ ou } r = 1, \end{cases}$$

et

$$l(p^r) = \begin{cases} g(p^r) - g(p^{r-1}) & \text{si} \quad g(p^2) = 1, \\ \sum_{j=0}^{r}(-1)^j g(p^{r-j}) & \text{si} \quad g(p^2) = 0. \end{cases}$$

On vérifie que $g = l*k$, de sorte que l'on a pour tout $x \geqslant 1$

$$\sum_{n \leqslant x} g(n) = \sum_{n \leqslant x} l(n)\, K\left(\frac{x}{n}\right),$$

où K est la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par

$$K(x) = \sum_{n \leqslant x} k(n).$$

On voit d'autre part que $K(x)$ est le nombre des $n \leqslant x$ qui ne sont divisibles par le carré d'aucun nombre premier p tel que $g(p^2) = 0$. Si l'ensemble des nombres premiers pour lesquels $g(p^2) = 0$ n'est pas vide, le cas particulier où $q = 0$ du théorème A cité plus haut montre, en prenant E égal à cet ensemble, que l'on a pour x infini

$$K(x) = \delta_0 x + o[x^{1/2}], \quad \text{avec} \quad \delta_0 = \prod_{g(p^2)=0} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right).$$

La même relation a lieu, avec $\delta_0 = 1$, si $g(p^2) = 1$ pour tout p, car on a alors $k(n) = 1$ pour tout $n \geqslant 1$.

Si l'on pose, pour $x \geqslant 1$,

$$K(x) = \delta_0 x + x^{1/2} \eta(x),$$

on a $\eta(x) = o[1]$.

Par ailleurs, on a pour tout p

$$l(p) = l(p^2) = 0 \quad \text{et, pour } r > 2, \quad |l(p^r)| \leqslant r - 1.$$

Il en résulte que $\sum_{p,r} \frac{|l(p^r)|}{p^{r/2}} < +\infty$, ce qui entraîne la convergence absolue de la série $\sum_1^{+\infty} \frac{l(n)}{n^s}$ pour $\operatorname{Re} s \geqslant \frac{1}{2}$.

Ceci dit, on a pour $x \geqslant 1$

$$\sum_{n \leqslant x} g(n) = \delta_0 x \sum_{n \leqslant x} \frac{l(n)}{n} + x^{1/2} \sum_{n \leqslant x} \frac{l(n)}{n^{1/2}} \eta\left(\frac{x}{n}\right)$$

$$= \delta x - \delta_0 x \sum_{n > x} \frac{l(n)}{n} + x^{1/2} \sum_{n \leqslant x} \frac{l(n)}{n^{1/2}} \eta\left(\frac{x}{n}\right),$$

avec $\delta = \delta_0 \sum_1^{+\infty} \frac{l(n)}{n}$.

On a évidemment

$$\left|\sum_{n > x} \frac{l(n)}{n}\right| \leqslant x^{-1/2} \sum_{n > x} \frac{|l(n)|}{n^{1/2}} = o[x^{-1/2}]$$

quand x tend vers $+\infty$, et on voit aisément que

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{l(n)}{n^{1/2}} \eta\left(\frac{x}{n}\right) = o[1].$$

4.3. Au lieu de considérer, comme ici, une seule fonction f, on peut considérer un système de k fonctions additives $f_1, f_2, \ldots, f_k$ à valeurs entières, dont chacune prend la valeur zéro pour tous les nombres premiers.

On a alors le résultat suivant:

$q = (q_1, q_2, \ldots, q_k)$ étant un système quelconque de k entiers, l'ensemble des entiers positifs n tels que

$$f_j(n) = q_j \quad \text{pour} \quad j = 1, 2, \ldots, k$$

possède une densité d_q et, si $\nu_q(x)$ est le nombre de ces n qui sont $\leqslant x$, on a encore l'inégalité (1) *avec la même constante C.*

La démonstration est la même que pour le cas d'une seule fonction, si ce n'est que maintenant θ n'est plus un nombre réel mais un élément $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$ de $\boldsymbol{R}^k$, g_θ est définie par

$$g_\theta(n) = \exp\left[i \sum_{j=1}^{k} \theta_j f_j(n)\right]$$

et on a

$$\nu_q(x) = \frac{1}{(2\pi)^k} \int G_\theta(x) \exp\left[-i \sum_{j=1}^{k} q_j \theta_j\right] d\theta_1 d\theta_2 \ldots d\theta_k,$$

l'intégrale étant prise sur l'ensemble des $\theta \in \boldsymbol{R}^k$ tels que

$$0 \leqslant \theta_j \leqslant 2\pi \quad \text{pour} \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

4.3.1. Ici, la généralisation du théorème d'Erdös et Wintner aux fonctions à valeurs dans $\boldsymbol{R}^p$ (7) montre que l'on a

$$\sum_{q \in \boldsymbol{Z}^k} d_q = 1$$

(7) Cf. H. Delange, *Sur les fonctions arithmétiques multiplicatives*, Annales Scient. de l'Ecole Norm. Sup. (3) 78, 1961, p. 273–304, à § 6.4, p. 297.

et que les d_q sont déterminées par le fait que l'on a pour tout $\theta \in \boldsymbol{R}^k$

$$\sum_{q \in \boldsymbol{Z}^k} d_q \exp\Big(i \sum_{j=1}^{k} q_j \theta_j\Big) = \prod_p \Big(1-\frac{1}{p}\Big)\Big[1+\sum_{r=1}^{+\infty} \frac{g_0(p^r)}{p^r}\Big].$$

Comme dans le cas d'une seule fonction, cette égalité peut aussi être établie par la méthode utilisée ici.

Reçu par la Rédaction le 14. 2. 1969

ACTA ARITHMETICA
XVI (1969)

A statistical density theorem for L-functions with applications

by

MATTI JUTILA (Turku)

§ 1. Introduction

1. In the last years many interesting results in the analytical theory of numbers have been obtained by the so-called "large sieve" method, e.g. new statistical density theorems for L-functions [2], [1] and the mean value theorem of Bombieri [2] ((1.6) below) concerning the distribution of primes in arithmetical progressions.

We shall in this paper combine the large sieve with the method of Rodosski [9] and prove two statistical density results (Theorem 1) for L-functions. The estimate (1.4) is most effective for "high" rectangles and seems to be of a new type. As an arithmetical application of this we shall prove an analogue of Bombieri's theorem, concerning the primes in a "short" interval (Theorem 2). Finally we call attention to the consequences of Theorem 2 to some prime number problems.

2. Let $X \geqslant 1, T \geqslant 2, \alpha \geqslant \frac{1}{2}$, and let χ be a character $(\bmod q)$. Denote by $N(\alpha, T, q, \chi)$ the number of zeros of the function $L(s, \chi)$ in the rectangle

(1.1) $$1-\alpha \leqslant \sigma \leqslant 1, \quad |t| \leqslant T.$$

In the statistical theory of L-functions the main problem is to find an estimate for the sum

(1.2) $$\sum_{q \leqslant X} \sum_{\chi \bmod q}^{*} N(\alpha, T, q, \chi)$$

where the asterisk denotes summation over primitive characters only. Bombieri has in [2] proved that the sum (1.2) is (1)

(1.3) $$\ll (X^2+XT)^{\frac{4(1-\alpha)}{3-2\alpha}+\varepsilon} T,$$

(1) We use the following notation: $c_1, c_2, \ldots$ denote positive absolute constants; ε and A stand for positive constants, the former arbitrarily small and the latter arbitrarily large, which need not be always the same. Further, as usual, we write $e(a) = e^{2\pi i a}$, $e_q(a) = e^{2\pi i a/q}$.